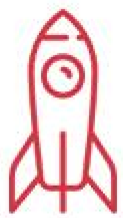
고3 수능대비
2020. 08. 29.

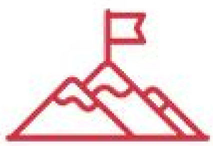
WORK BOOK #3

확통 – 전범위



Passion

Challenge

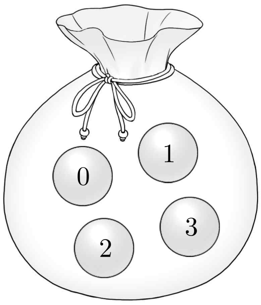


Professional

Action

[2019. 03. 서울교육청]

1. 주머니 속에 네 개의 숫자 $0,\ 1,\ 2,\ 3$이 각각 하나씩 적혀 있는 공 4개가 들어 있다. 이 주머니에서 1개의 공을 꺼내어 공에 적혀 있는 수를 확인한 후 다시 넣는다. 이 과정을 3번 반복할 때, 꺼낸 공에 적혀 있는 수를 차례로 $a,\ b,\ c$라 하자. $\dfrac{bc}{a}$가 정수가 되도록 하는 모든 순서쌍 $(a,\ b,\ c)$의 개수를 구하시오.



[2018. 04. 경기교육청]

2. 집합 $X=\{1,\ 2,\ 3,\ 4\}$에서 집합 $Y=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5\}$로의 함수 중에서

$$f(1)+f(2)+f(3)-f(4)=3m\ (m\text{은 정수})$$

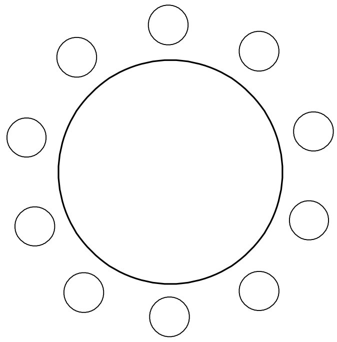
를 만족시키는 함수 f의 개수를 구하시오.

3. 집합 $X=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5\}$에 대하여 다음 조건을 만족시키는 함수 $f: X \to X$의 개수는?

(가) 치역의 원소의 개수는 3이다. (나) 치역의 모든 원소의 곱은 짝수이다.

① 1300 ② 1350 ③ 1400
④ 1450 ⑤ 1500

4. 남학생 3명, 여학생 3명이 그림과 같이 10개의 자리가 있는 원탁에 다음 두 조건에 따라 앉으려고 할 때, 앉을 수 있는 모든 경우의 수를 구하시오. (단, 회전하여 일치하는 것은 같은 것으로 본다.)



(가) 남학생, 여학생 모두 다른 성별끼리 2명씩 조를 만든다. (나) 서로 다른 두 개의 조 사이에 반드시 한 자리 이상을 비워둔다.

5. 두 집합 $A=\{1,\ 2,\ 3,\ 4\}$, $B=\{5,\ 6,\ 7\}$에 대하여 A에서 B로의 함수 f 중에서 다음 조건을 모두 만족하는 함수의 개수는?

(가) $B=\{f(x)\mid x\in A\}$
(나) $f(1)+f(2)+f(3)+f(4)\geq 24$

① 12　② 24　③ 36　④ 48　⑤ 60

6. 집합 $A=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5\}$에 대하여 다음 조건을 모두 만족하는 함수 $f:A\rightarrow A$의 개수는?

(가) 집합 A의 임의의 두 원소 x_1, x_2에 대하여 $x_1\neq x_2$이면 $f(x_1)\neq f(x_2)$이다.
(나) $f(1)=2f(f(2))$
(다) 집합 A의 원소 t에 대하여 $f(t)=t$를 만족시키는 t의 개수는 2보다 크지 않다.

① 6　② 9　③ 12　④ 15　⑤ 18

7. 서로 다른 종류의 빵 5개를 5명의 학생 A, B, C, D, E에게 남김없이 나누어줄 때, 다음 조건을 만족시키도록 하는 경우의 수를 구하시오. (단, 빵을 받지 못하는 학생이 있을 수 있다.)

> (가) A가 받는 빵의 개수가 B가 받는 빵의 개수보다 적다.
> (나) C가 받는 빵의 개수는 B가 받는 빵의 개수보다 적지 않다.

8. 주머니 속에 네 개의 숫자 1, 2, 3, 4가 각각 하나씩 적혀 있는 공 4개가 들어 있다. 이 주머니에서 1개의 공을 꺼내어 공에 적혀 있는 수를 확인한 후 다시 넣는다. 이 과정을 4번 반복할 때, 꺼낸 공에 적혀 있는 수를 차례로 a, b, c, d라 하자. $\frac{b}{a}+\frac{d}{c}$가 정수가 되도록 하는 모든 순서쌍 $(a,\ b,\ c,\ d)$의 개수를 구하시오.

[2019. 06. 평가원]

9. 다음 조건을 만족시키는 음이 아닌 정수 $x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4$의 모든 순서쌍 $(x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4)$의 개수는?

(가) $n=1,\ 2,\ 3$일 때, $x_{n+1}-x_n \geq 2$이다.
(나) $x_4 \leq 12$

① 210 ② 220 ③ 230
④ 240 ⑤ 250

10. 다음 조건을 만족시키는 1 이상 15 이하의 세 자연수 a, b, c의 모든 순서쌍 $(a,\ b,\ c)$의 개수를 구하시오.

(가) $a+2 < b$
(나) $1 < c-b < 6$

11. 두 종류의 카드 $\boxed{\mathrm{A}}$, $\boxed{\mathrm{B}}$ 가 8장씩 있다. 이 16장의 카드 중에서 8장의 카드를 선택하여 일렬로 나열할 때, $\boxed{\mathrm{A}}\boxed{\mathrm{B}}$ 가 이 순서대로 연속하여 놓인 것이 두 번만 나타나도록 카드를 나열하는 경우의 수는? (단, 같은 종류의 카드는 서로 구별하지 않는다.)

① 121 ② 122 ③ 124
④ 126 ⑤ 128

12. 다음 조건을 만족시키는 자연수 $a,\ b,\ c,\ d$의 모든 순서쌍 $(a,\ b,\ c,\ d)$의 개수를 구하시오.

(가) $a \le b \le 6$
(나) $c \le d \le 6$
(다) $c \le b$

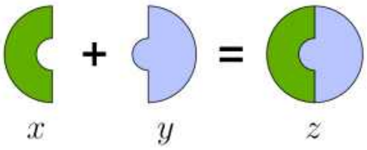
13. 다음 조건을 만족시키는 순서쌍 $(a,\ b,\ c,\ d,\ e)$의 개수를 구하시오.

> (가) $a,\ b,\ c,\ d,\ e$는 $0,\ 2,\ 4,\ 6,\ 8$ 중 하나의 숫자이다.
> (나) $a+b+c+d+e=32$

14. 세 학생 A, B, C가 일곱 가지 음식의 맛을 본 뒤 마음에 드는 음식에 ○모양의 스티커를 붙이기로 했다. 한 명이 같은 음식에 1개의 스티커만 붙일 수 있을 때, A, B는 각각 2개, C는 1개의 스티커를 붙였다. 표가 만들어지는 경우의 수를 구하시오. (아래의 표는 7개의 음식에 5개의 스티커를 붙인 하나의 예이다.)

자장면	짬뽕	탕수육	깐풍기	라조기	군만두	양장피
○	○○	○	○			

15. 1개의 재료 x와 1개의 재료 y를 소모해서 1개의 제품 z를 만들 수 있다. 10개의 재료 x와 9개의 재료 y를 3명의 학생 A, B, C에게 남김없이 나누어 줄 때, 3명의 학생들이 만든 제품 z의 개수의 합이 6이 되도록 하는 경우의 수는?
(단, 각 학생은 받은 재료를 이용하여 최대한 많은 제품을 만들고, 재료를 하나도 받지 못하는 학생이 있을 수 있다.)



① 288 ② 320 ③ 384
④ 462 ⑤ 588

16. $f(n)={}_7\mathrm{C}_n\left(\frac{1}{3}\right)^{7-n}\left(\frac{2}{3}\right)^n$ $(n=0,\,1,\,2,\,\cdots,\,7)$에 대하여 $A=\sum_{n=0}^{7}\frac{(-1)^n}{3^7}f(n)$일 때, $\log_3\frac{1}{|A|}$의 값은?

① 7 ② 14 ③ 21
④ 28 ⑤ 35

17.

$(1+x)+2(1+x)^2+3(1+x)^3+\ \cdots\ +8(1+x)^8$ 의 전개식에서 x^2 의 계수는?

① 546 ② 556 ③ 566
④ 576 ⑤ 586

18. 집합 $A=\{1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ 19\}$ 에 대하여 다음 조건을 만족시키는 서로 다른 집합 X 의 개수를 k 라 할 때, $\log_2 k$ 의 값을 구하시오.

(가) $1 \in X$, $X \subset A$
(나) 집합 X 의 원소의 개수는 홀수이다.

19. 그림과 같이 12개의 칸 속에 ○ 또는 ×를 임의로 표기할 때, ○× 또는 ×○ 와 같이 표기된 부분의 개수가 k가 되도록 표기하는 방법의 수를 a_k라 하자. 예를 들어

○	○	×	×	○	×	×	○	×	×	×	×

와 같이 표기한 것은 $k=5$인 경우의 하나이다. $\sum_{k=1}^{5} a_k$의 값은?

① 1024　② 1026　③ 2046
④ 2048　⑤ 2050

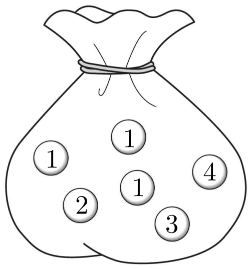
[2019. 06. 평가원]

20. 숫자 $1,\ 1,\ 2,\ 2,\ 3,\ 3$이 하나씩 적혀 있는 6개의 공이 들어 있는 주머니가 있다. 이 주머니에서 한 개의 공을 임의로 꺼내어 공에 적힌 수를 확인한 후 다시 넣지 않는다. 이와 같은 시행을 6번 반복할 때, $k(1 \le k \le 6)$번째 꺼낸 공에 적힌 수를 a_k라 하자. 두 자연수 $m,\ n$을

$$m = a_1 \times 100 + a_2 \times 10 + a_3,$$
$$n = a_4 \times 100 + a_5 \times 10 + a_6$$

이라 할 때, $m > n$일 확률은 $\frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오.
(단, p와 q는 서로소인 자연수이다.)

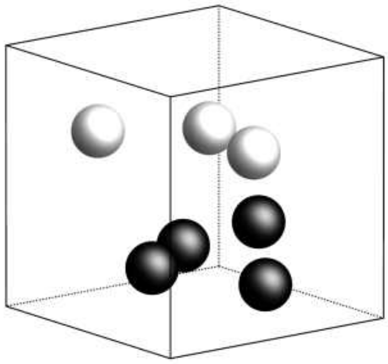
21. 주머니에 $1,\ 1,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4$의 숫자가 하나씩 적혀 있는 6개의 공이 들어 있다. 이 주머니에서 임의로 4개의 공을 동시에 꺼내어 임의로 일렬로 나열하고, 나열된 순서대로 공에 적혀 있는 수를 $a,\ b,\ c,\ d$라 할 때, $a \le b \le c \le d$일 확률은?



① $\frac{7}{72}$ ② $\frac{13}{72}$ ③ $\frac{17}{72}$

④ $\frac{7}{120}$ ⑤ $\frac{13}{120}$

22. 흰 공 3개와 검은 공 4개가 들어있는 상자에서 임의로 1개의 공을 꺼내는 시행을 반복할 때, 흰 공을 모두 꺼내면 시행을 멈춘다. 5번 이내에 시행을 멈출 확률은?
(단, 꺼낸 공은 다시 넣지 않는다.)



① $\frac{1}{7}$ ② $\frac{2}{7}$ ③ $\frac{3}{7}$

④ $\frac{4}{7}$ ⑤ $\frac{5}{7}$

[2020. 대학수학능력시험]

23. 한 개의 동전을 7번 던질 때, 다음 조건을 만족시킬 확률은?

(가) 앞면이 3번 이상 나온다.
(나) 앞면이 연속해서 나오는 경우가 있다.

① $\frac{11}{16}$ ② $\frac{23}{32}$ ③ $\frac{3}{4}$
④ $\frac{25}{32}$ ⑤ $\frac{13}{16}$

[2019. 06. 평가원]

24. 한 개의 주사위를 세 번 던져서 나오는 눈의 수를 차례로 $a,\ b,\ c$라 할 때, $a > b$이고 $a > c$일 확률은?

① $\frac{13}{54}$ ② $\frac{55}{216}$ ③ $\frac{29}{108}$
④ $\frac{61}{216}$ ⑤ $\frac{8}{27}$

25. 집합 $S=\{a,\ b,\ c,\ d,\ e,\ f\}$의 부분집합 중 서로 다른 3개의 집합을 택할 때, 원소 a를 포함하는 집합이 적어도 한 개 있을 확률이 $\frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오.
(단, p, q는 서로소인 자연수이다.)

26. 10개의 전구가 있다. 전구마다 스위치가 연결되어 스위치를 누르면 전구가 켜지고 다시 누르면 꺼진다. 전구가 모두 꺼져 있는 상태에서 학생 A가 임의로 서로 다른 3개의 스위치를 한 번씩 누르고 지나갔다. 학생 B가 임의로 서로 다른 3개의 스위치를 한 번씩 누르고 지나갈 때, 4개의 전구가 켜질 확률을 P_1, 6개의 전구가 켜질 확률을 P_2라 하자. $\mathrm{P}_1+\mathrm{P}_2$의 값은?

① $\frac{41}{60}$ ② $\frac{43}{60}$ ③ $\frac{3}{4}$
④ $\frac{47}{60}$ ⑤ $\frac{49}{60}$

27. 어느 회의실에 5개의 고정된 의자가 있다. 이 회의실에 사회자를 비롯하여 회의 참석자인 갑과 을 총3 명이 자리에 앉아 회의 준비를 하고 있었다. 잠시 후 새로운 회의 참여자 2 명이 더 들어왔다. 원활한 회의 진행을 위해 사회자를 제외한 회의 참여자들의 자리를 재배치하였다. 이때 갑과 을이 모두 처음 자리가 아닌 다른 자리에 앉게 될 확률은?

① $\frac{1}{2}$ ② $\frac{13}{24}$ ③ $\frac{7}{12}$
④ $\frac{5}{8}$ ⑤ $\frac{2}{3}$

28. 자연수가 하나씩 적혀있는 카드가 각각 3장, 5장이 들어 있는 두 상자 A, B가 있다. 두 상자 A, B에서 각각 카드를 한 장씩 뽑은 카드에 적혀 있는 수를 순서대로 a, b라 할 때, $a+b=n$일 확률을 P_n이라 하자. 다음 조건을 만족시킬 때, 상자 B에 들어 있는 카드의 숫자 중 p가 q개로 가장 많다. $p+q$의 값은?

(가) $\mathrm{P}_2=\frac{1}{15}$, $\mathrm{P}_3=\frac{1}{5}$
(나) $\mathrm{P}_2+\mathrm{P}_3+\mathrm{P}_4+\mathrm{P}_5=1$

① 3 ② 4 ③ 5
④ 6 ⑤ 7

29. 방정식 $a+b+c=10$를 만족시키는 음이 아닌 정수 $a,\ b,\ c$의 모든 순서쌍 $(a,\ b,\ c)$ 가운데 임의로 한 개를 선택할 때, 선택한 순서쌍 $(a,\ b,\ c)$가

$$|a-b|>2$$

를 만족시킬 확률은 $\frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오.
(단, p와 q는 서로소인 자연수이다.)

30. A, B 두 사람이 동전 한 개를 던져서 앞면이 나오면 A가, 뒷면이 나오면 B가 방에 들어갔다 나오기로 하였다.
A, B가 방에 들어가서 하는 일은 다음과 같다.

A: 방에 불이 켜져 있으면 그냥 나오고, 꺼져 있으면 불을 켜고 나온다. B: 방에 불이 켜져 있으면 끄고 나오고, 꺼져 있으면 불을 켜고 나온다.

처음에는 방에 불이 꺼져 있었고, A, B가 연속으로 동전을 총 6번 던져 위의 시행을 반복했을 때, 방에 불이 켜져 있을 확률은?

① $\frac{11}{32}$　② $\frac{17}{32}$　③ $\frac{35}{64}$
④ $\frac{21}{32}$　⑤ $\frac{43}{64}$

31. 주머니에 1부터 7까지의 숫자가 하나씩 적힌 공 7개가 들어 있다. 갑은 이 주머니에서 1개의 공을 꺼낸 다음 꺼낸 공을 넣지 않고 1개의 공을 더 꺼낸다. 을은 갑이 꺼내고 남은 5개의 공 중 1개의 공을 꺼낸 다음 꺼낸 공을 넣지 않고 1개의 공을 더 꺼낸다. 다음 조건을 모두 만족시킬 확률은?

(가) 갑이 첫 번째로 꺼낸 공과 을이 첫 번째로 꺼낸 공에 적힌 두 수의 합은 짝수이다.
(나) 갑이 두 번째로 꺼낸 공과 을이 두 번째로 꺼낸 공에 적힌 두 수의 곱은 짝수이다.

① $\frac{1}{5}$ ② $\frac{9}{35}$ ③ $\frac{11}{35}$
④ $\frac{13}{35}$ ⑤ $\frac{3}{7}$

32. 1이 적힌 공이 2개, 2가 적힌 공이 1개, 3이 적힌 공이 4개 들어 있는 주머니가 있다. 이 주머니에서 임의로 한 개의 공을 꺼낼 때, 꺼낸 공에 적혀 있는 수에 따라 A와 B가 다음과 같은 규칙으로 점수를 얻는 게임을 한다.

(가) 1이 적힌 공이 나오면 A는 5점, B는 0점을 얻는다.
(나) 2 또는 3이 적힌 공이 나오면 A는 0점, B는 2점을 얻는다.

한 번 꺼낸 공은 주머니에 다시 넣지 않고 주머니에서 공을 임의로 하나씩 꺼낼 때, 10점을 먼저 얻는 사람이 이기는 게임을 한다. 여섯 개의 공을 꺼내어 A가 게임에서 이길 확률은 $\frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.)

33. 어느 상자에 5개의 제비가 들어 있는데, 이 중 당첨제비는 3개가 있다고 한다. A, B, C 세 사람이 차례로 이 상자에서 임의로 제비를 하나씩 꺼낸다. A, B가 꺼낸 제비가 모두 당첨제비일 때, C가 꺼낸 제비도 당첨제비일 확률은 $\dfrac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, 한 번 꺼낸 제비는 다시 넣지 않고, p와 q는 서로소인 자연수이다.)

34. 그림과 같이 1부터 9까지 숫자가 쓰여진 번호판이 있다. 이 가운데 어떤 3개의 숫자 뒤에는 경품이 있고, 나머지 6개의 숫자 뒤에는 아무것도 없다. A, B, C 세 사람이 순서대로 서로 다른 숫자를 각각 한 개씩 선택하여 경품이 있는지 확인하였다. C가 경품에 당첨되었을 때, 번호판에 남은 경품의 개수가 적어도 1개 이상일 확률은?

1	2	3
4	5	6
7	8	9

① $\dfrac{23}{28}$ ② $\dfrac{6}{7}$ ③ $\dfrac{25}{28}$
④ $\dfrac{13}{14}$ ⑤ $\dfrac{27}{28}$

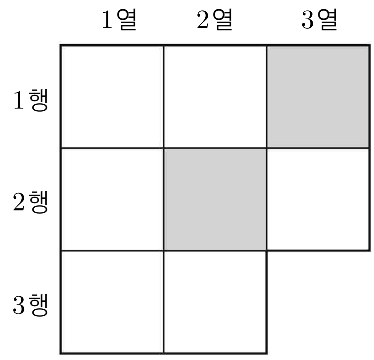
35. A가 한 개의 주사위를 두 번 던질 때, 나온 눈의 수를 각각 a, b라 하고, B가 한 개의 주사위를 한 번 던질 때, 나온 눈의 수를 c라 하자. $a < c < b$ 또는 $b < c < a$일 때, $c = 2$일 확률은?

① $\frac{1}{15}$　② $\frac{2}{15}$　③ $\frac{1}{5}$　④ $\frac{4}{15}$　⑤ $\frac{1}{3}$

36. 그림과 같이 8개의 좌석에 여학생 3명과 남학생 5명을 다음 조건을 만족하도록 임의로 1명씩 배정한다.

> k열에 배정된 남학생 수가 $k+1$열에 배정된 남학생 수보다 작지 않다. $(k=1,\ 2)$

색칠된 좌석 2개를 같은 성별의 학생에게 배정할 때, 2행 3열의 좌석에 여학생이 배정될 확률은?



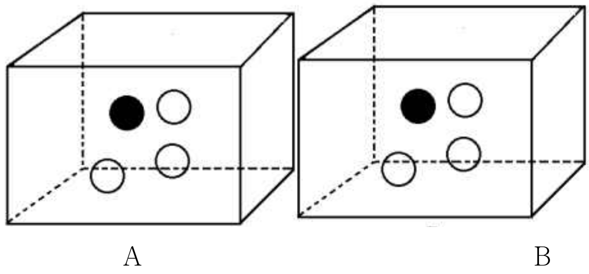
① $\frac{11}{13}$　② $\frac{8}{13}$　③ $\frac{8}{19}$　④ $\frac{5}{13}$　⑤ $\frac{5}{19}$

37. 상자 속에 흰 공 3개, 빨간 공 2개, 파란 공 1개가 들어 있다. 먼저 A 가 규칙 (1), (2)에 따라 주머니에서 공을 한 개 또는 두 개를 꺼낸다. 다음으로 B가 규칙 (1), (2)에 따라 주머니에서 공을 한 개 또는 두 개를 꺼낸다. (단, 꺼낸 공은 다시 넣지 않는다.)

규칙(1) 처음 꺼낸 공이 빨간색이면 다시 공을 꺼낼 수 없다. 규칙(2) 처음 꺼낸 공이 빨간색이 아니면 한 번 더 공을 꺼낸다.

흰 공은 1점, 빨간 공은 2점, 파란 공은 3점이고, 꺼낸 공의 합산 점수가 각자의 점수일 때, A 와 B가 같은 점수를 받을 확률은 $\frac{q}{p}$ 이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p, q는 서로소인 자연수이다.)

38. 그림과 같이 두 상자 A, B에 검은 공 1개, 흰 공 3개가 각각 들어 있다. 각 상자에서 임의로 한 개씩 공을 꺼내어 상자 A 에서 꺼낸 공은 상자 B 로 넣고, 상자 B에서 꺼낸 공은 상자 A 에 넣는 시행을 n번 반복할 때, n번 시행 후 다시 원래의 상태로 돌아올 확률을 p_n이라 하자. 두 상수 a, b에 대하여 $p_{n+1}=ap_n+b(1-p_n)$을 만족시킬 때, $80ab$의 값을 구하시오.



39. 상자 안에 1부터 $n\ (n \geq 2)$까지의 자연수가 하나씩 적혀 있는 n개의 공이 들어 있다. 1부터 $m\ (m < n)$까지는 빨간색의 숫자가 적혀 있고, $(m+1)$부터 n까지는 파란색의 숫자가 적혀 있다. 상자에서 임의로 1개의 공을 꺼낼 때, 2의 배수가 적혀 있는 공이 나오는 사건을 A, 파란색의 숫자가 적혀 있는 공이 나오는 사건을 B라 하자. 2 이상의 자연수 n에 대하여 두 사건 A, B가 서로 독립이 되도록 하는 모든 자연수 m의 값의 합을 a_n이라 할 때, $\sum_{n=2}^{30} a_n$의 값은?

① 1090　② 1100　③ 1110　④ 1120　⑤ 1130

40. 주머니 안에 1, 2, 3, 4, 5의 숫자가 적힌 카드가 각각 2장씩 있다. 현진이가 먼저 2장의 카드를 고르고, 이어서 미혜가 2장의 카드를 골라서 각자 고른 순서대로 차례로 나열하여 두 자리의 자연수를 만든다. 현진이가 만든 두 자리의 자연수가 미혜가 만든 두 자리의 자연수보다 클 확률을 $\frac{p}{q}$라 할 때, $p+q$의 값을 구하시오. (단, 고른 카드는 다시 주머니에 넣지 않으며, p와 q는 서로소인 자연수이다.)

[2018. 09. 평가원]

41. 동전 A의 앞면과 뒷면에는 각각 1과 2가 적혀 있고 동전 B의 앞면과 뒷면에는 각각 3과 4가 적혀 있다. 동전 A를 세 번, 동전 B를 네 번 던져 나온 7개의 수의 합이 19 또는 20일 확률은?

① $\frac{7}{16}$ ② $\frac{15}{32}$ ③ $\frac{1}{2}$

④ $\frac{17}{32}$ ⑤ $\frac{9}{16}$

42. 두 동전 A, B를 동시에 던져 그 결과에 따라 좌표평면 위의 점을 다음과 같이 이동시킨다.

(가) A, B 모두 앞면이 나오면 점 $(x,\ y)$를
점 $(x+1,\ y+1)$로 이동시킨다.
(나) A는 앞면, B는 뒷면이 나오면 점 $(x,\ y)$를
점 $(x+1,\ y-1)$로 이동시킨다.
(다) A는 뒷면, B는 앞면이 나오면 점 $(x,\ y)$를
점 $(x-1,\ y+1)$로 이동시킨다.
(라) A, B 모두 뒷면이 나오면 점 $(x,\ y)$를
점 $(x-1,\ y-1)$로 이동시킨다.

원점에 위치한 점 P가 두 동전 A, B를 동시에 던지는 시행을 6번 반복한 후 직선 $x+y=4$ 위로 옮겨지게 될 확률을 p라 할 때, $2^{12}\times p$의 값을 구하시오.

43. A, B, C 세 사람 중 두 사람이 1부터 13까지의 숫자가 적힌 13장의 카드 중에 동시에 한 장씩 선택하고 큰 숫자를 선택한 사람이 이기는 규칙에 따라 게임을 한다.
(단, 선택한 카드는 다음 게임을 위해 다시 돌려놓는다.)
처음에는 A와 B가 게임을 하고, 그 이후로는 게임에서 이긴 사람과 게임을 하지 않은 사람이 경기를 할 때, 4번째 대결에서 A가 출전할 확률은?

① $\frac{1}{8}$ ② $\frac{1}{4}$ ③ $\frac{3}{8}$
④ $\frac{1}{2}$ ⑤ $\frac{5}{8}$

44. 흰 공 2개, 검은 공 3개가 들어 있는 주머니에서 동시에 2개의 공을 임의로 꺼내고 다시 넣는 시행에서 꺼낸 2개의 공이 흰 공 1개와 검은 공 1개인 사건을 A라 하자. 이 시행을 50회 반복하였을 때 사건 A가 일어나는 횟수를 X라 하고, 함수 $f(x)$를

$$f(x)=\sum_{k=0}^{50}\{(-x^2+2kx+k^2)\cdot \mathrm{P}(X=k)\}$$

로 정의하자. 함수 $f(x)$의 최댓값은?

① 1662 ② 1712 ③ 1762
④ 1812 ⑤ 1862

45. 주사위를 던져 3의 배수의 눈이 나오면 해민이가 a점을 받고, 3의 배수의 눈이 나오지 않으면 혜연이가 b점을 받는다. 주사위를 36회 던져서 해민이와 혜연이가 얻은 점수의 곱을 확률변수 X라 하자. 다음은 해민이와 혜연이가 얻을 점수의 기댓값이 같을 때, $\mathrm{E}(X) < 10000$을 만족하는 자연수 a의 최댓값을 구하는 과정이다.

> 주사위를 36회 던질 때, 3의 배수의 눈이 나오는 횟수를 확률변수 Y라 하자.
> 확률변수 Y는 이항분포 $\mathrm{B}(36, \boxed{\text{(가)}})$를 따르고,
> 해민이와 혜연이의 점수는 각각 aY, $b(36-Y)$가 된다.
> 이 두 점수의 기댓값이 같기 위해서는
> $\dfrac{a}{b} = \boxed{\text{(나)}}$ 를 만족해야 한다.
> 이 때, 확률변수 X는 $ab \times Y(36-Y)$이고,
> $\dfrac{a}{b} = \boxed{\text{(나)}}$ 를 이용하여 a에 대해 정리한 뒤,
> 이에 대한 기댓값을 구하면 $\mathrm{E}(X) = \boxed{\text{(다)}} \times a^2$이다.
> 따라서 $\mathrm{E}(X) < 10000$를 만족하는
> 자연수 a의 최댓값은 $\boxed{\text{(라)}}$ 이다.

위의 과정에서 (가), (나), (다), (라)에 알맞은 수를 각각 p, q, r, s라 할 때, $\dfrac{qr}{ps}$의 값은?

① 95　② 105　③ 120
④ 150　⑤ 210

46. 전구 7개가 연결되어 일렬로 늘어서 있다. 스위치를 누르면 빨간색, 파란색, 노란색 불빛이 나올 확률이 각각 $\dfrac{1}{3}$인 이들 7개 전구에 대하여 왼쪽부터 전구의 불빛의 색이 변화되지 않는 횟수를 조사한다. 예를 들어, 전구가 빨간색, 파란색, 파란색, 파란색, 노란색, 노란색, 빨간색으로 나열되어 있는 경우를 (빨파파파노노빨)로 나타내기로 할 때, 불빛의 색이 변화되지 않는 횟수는 3이다. 스위치를 눌렀을 때, 전구의 불빛의 색이 변화되지 않는 횟수를 확률 변수 X라 할 때, $\mathrm{V}(6X+3)$의 값을 구하시오.

[2017. 대학수학능력시험]

47. 확률변수 X는 평균이 m, 표준편차가 5인 정규분포를 따르고, 확률변수 X의 확률밀도함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $f(10) > f(20)$
(나) $f(4) < f(22)$

z	$\mathrm{P}(0 \le Z \le z)$
0.6	0.226
0.8	0.288
1.0	0.341
1.2	0.385
1.4	0.419

m이 자연수일 때, $\mathrm{P}(17 \le X \le 18)$의 값을 오른쪽 표준정규분포표를 이용하여 구한 것은?

① 0.044 ② 0.053 ③ 0.062
④ 0.078 ⑤ 0.097

48. 평균이 10, 표준편차가 x인 정규분포를 따르는 확률변수 X에 대하여

$$f(x) = \mathrm{P}(10 - x^2 \le X \le 11)$$

이라 하자. 자연수 n에 대하여

$$\sum_{n=1}^{10} f\left(\frac{1}{n}\right) - \sum_{n=1}^{8} f(n+2)$$

의 값을 표준정규분포표를 이용하여 구한 것은?

z	$\mathrm{P}(0 \le Z \le z)$
0.5	0.1915
1.0	0.3413
1.5	0.4332
2.0	0.4772
2.5	0.4938

① 1.3513 ② 1.3826 ③ 1.4037
④ 1.4391 ⑤ 1.4724

49. 자연수 m에 대하여 정규분포 $\mathrm{N}(m,\ \sigma^2)$을 따르는 확률변수 X의 확률밀도함수 $f(x)$에 대하여 함수 $g(t)$는

$$g(t) = \int_t^{t+2} f(x)dx$$

이다. 두 함수 $f(x), g(t)$가 다음 조건을 모두 만족시킬 때, 아래의 표준정규분포표를 이용하여 $\frac{m}{\sigma}$의 값을 구하시오.

> (가) $g(12) < g(20) < g(16)$
> (나) 함수 $g(t)$의 최댓값은 0.9544이다.

z	$\mathrm{P}(0 \le Z \le z)$
0.5	0.1915
1.0	0.3413
1.5	0.4332
2.0	0.4772
2.5	0.4938

50. 서로 다른 두 실수 $m_1,\ m_2$에 대하여 확률변수 X는 정규분포 $\mathrm{N}(m_1,\ 6^2)$, 확률변수 Y는 정규분포 $\mathrm{N}(m_2,\ 6^2)$을 따르고, 확률변수 X와 Y의 확률밀도함수는 각각 $f(x)$와 $g(x)$이다. $f(44) = g(44)$이고,

$$\begin{aligned}&\mathrm{P}(41 \le Y \le 61)\\ &= \mathrm{P}(m_1 \le X \le m_1 + 17) + \mathrm{P}(0 \le Z \le 0.5)\end{aligned}$$

일 때, $2m_1 + m_2$의 값을 구하시오. (단, Z는 표준정규분포를 따르는 확률변수이다.)

51. A가 가위바위보를 한 번 할 때 가위, 바위, 보를 낼 확률은 각각 $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{4}$이고, B가 가위바위보를 한 번 할 때 가위, 바위, 보를 낼 확률은 각각 $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{2}$이다. A와 B가 가위바위보를 한 번 하여 이기면 3점을 얻고, 비기거나 지면 1점을 얻는 시행을 n회 반복한다. n회의 시행 후 A가 얻는 점수의 합의 기댓값이 105점일 때, n회의 시행 후 A가 얻는 점수의 합이 120점 이상일 확률을 아래의 표준정규분포표를 이용하여 구한 것은?

z	$\mathrm{P}(0 \le Z \le z)$
0.5	0.1915
1.0	0.3413
1.5	0.4332
2.0	0.4772

① 0.0013 ② 0.0062 ③ 0.0228
④ 0.0668 ⑤ 0.1587

52. K 수목원에 있는 나무의 높이가 정규분포를 따른다고 할 때, 이 수목원의 나무의 평균높이를 추정하려 한다. 이 수목원의 나무 중에서 400그루를 임의로 추출하여 신뢰도 96 %로 추정한 모평균의 신뢰구간은 $[a,\ b]$이고, n그루를 임의로 추출하여 신뢰도 90 %로 추정한 모평균의 신뢰구간은 $[c,\ d]$이다. $b+c=a+d$를 만족시키는 n의 값을 아래의 표준정규분포표를 이용하여 구하시오.

z	$\mathrm{P}(0 \le Z \le z)$
1.2	0.38
1.4	0.42
1.6	0.45
1.8	0.46
2.0	0.48

53. 어느 볼펜공장에서 생산하는 제품의 무게는 m, 표준편차가 σ인 정규분포를 이룬다고 한다. 이 공장에서 생산하는 제품 중 64개를 임의추출하여 신뢰도 95%로 추정한 모평균 m에 대한 신뢰구간이 $[a,\ b]$이고, 144개를 임의추출하여 신뢰도 99%로 추정한 모평균 m에 대한 신뢰구간이 $[c,\ d]$라 하자. 이 공장에서 생산하는 제품 중 임의로 1개를 선택할 때, 이 제품의 무게에서 m을 뺀 값이 $a-b$ 이상 $d-c$ 이하가 될 확률을 아래의 표준정규분포표를 이용하여 구한 것은? (단, 무게의 단위는 g이다.)

z	$\mathrm{P}(0 \le Z \le z)$
0.43	0.166
0.49	0.188
0.86	0.305
0.98	0.337
1.96	0.475
2.58	0.495

① 0.022 ② 0.354 ③ 0.493
④ 0.525 ⑤ 0.642

54. 어느 과수원에서 생산되는 배의 무게는 평균이 1000g이고 표준편차가 100g이다. 이 중에서 상자 A에는 임의로 추출한 25개의 배를 넣어서 전체 무게가 24500g 이상이면 정상 판매하고 24500g 미만이면 10% 할인 판매한다. 상자 B에는 임의로 추출한 4개의 배를 넣어서 3760g 이상이면 정상 판매하고 3760g 미만이면 10% 할인 판매한다. 상자 A의 정가가 11만원, 상자 B의 정가가 2만원일 때, 두 상자의 판매금액의 합이 12만원보다 클 확률을 다음 표준정규분포표를 이용하여 구한 것은?

z	$\mathrm{P}(0 \le Z \le z)$
0.6	0.23
0.8	0.29
1.0	0.34
1.2	0.38

① 0.62 ② 0.66 ③ 0.71
④ 0.84 ⑤ 0.88

55. 분산이 16인 정규분포를 따르는 모집단에서 크기가 n인 표본을 임의추출하여 표본평균을 구하였다. 이 표본평균을 이용하여 구한 모평균에 대한 신뢰도 $k\%$의 신뢰구간을 $[\alpha,\ \beta]$라 하자. 표준정규분포를 따르는 확률변수 Z에 대하여 $\mathrm{P}(Z \geq 1.96) = \dfrac{100-k}{200}$일 때, $\beta - \alpha \leq 2$를 만족시키는 n의 최솟값을 구하시오.

56. 모표준편차가 3으로 알려진 정규분포를 따르는 모집단에서 크기가 10인 표본을 임의추출하여 모평균 m에 대한 신뢰도 $90\,\%$의 신뢰구간을 구하는 추정을 100회 반복한다. n번째 추정에서 얻은 신뢰구간을 I_n이라 할 때, 수열 $\{a_n\}$을 다음과 같이 정의하자.

$$a_n = \begin{cases} 6 & (m \in I_n) \\ -4 & (m \notin I_n) \end{cases}$$

확률변수 $X = \sum_{n=1}^{100} a_n$에 대하여 $\mathrm{P}(X \leq 470)$의 값을 다음 표준정규분포표를 이용하여 구한 것은?

z	$\mathrm{P}(0 \leq Z \leq z)$
1.0	0.3413
1.5	0.4332
2.0	0.4772
2.5	0.4938

① 0.0062 ② 0.0228 ③ 0.0896
④ 0.1587 ⑤ 0.2255

확통

1. 40
2. 209
3. ②
4. 288
5. ②
6. ④
7. 425
8. 79
9. ①
10. 164
11. ④
12. 371
13. 70
14. 413
15. ⑤
16. ②
17. ①
18. 17
19. ③
20. 22
21. ⑤
22. ②
23. ①
24. ②
25. 79
26. ⑤
27. ③
28. ④
29. 53
30. ④
31. ③
32. 26
33. 4
34. ⑤
35. ③
36. ②
37. 13
38. 25
39. ④
40. 94
41. ①
42. 495
43. ⑤
44. ④
45. ②
46. 48
47. ③
48. ①
49. 36
50. 118
51. ③
52. 256
53. ②
54. ④
55. 62
56. ④

정답 및 해설(확통-워크북 #3)

1. 40

(ⅰ) $a=0$ 인 경우

$\frac{bc}{a}$ 가 정의되지 않으므로 정수가 되는 경우는

존재하지 않는다.

(ⅱ) $a=1$ 인 경우

$\frac{bc}{a}$ 는 항상 정수이므로 b, c 를 정하는 경우의 수는 $0,\ 1,\ 2,$

3 에서 2 개를 택하는 중복순열의 수와 같으므로 ${}_4\Pi_2=4^2=16$

(ⅲ) $a=2$ 인 경우

$bc=2k$ (k 는 정수)일 때 $\frac{bc}{a}$ 가 정수이다. $a=2$ 일 때 b 와 c 를

택하는 전체 경우의 수 16 에서 b 와 c 가 모두 홀수인 경우의 수

4 를 빼면 되므로 $16-4=12$

(ⅳ) $a=3$ 인 경우

$bc=3k$ (k 는 정수)일 때 $\frac{bc}{a}$ 가 정수이다. $a=3$ 일 때 b 와 c 를

택하는 전체 경우의 수 16 에서

$bc\neq 3k$ 인 경우의 수를 빼면 된다.

$bc\neq 3k$ 인 경우의 수는 1 , 2 에서 2 개를 택하는 중복순열의 수

${}_2\Pi_2=4$ 이므로

$16-4=12$

(ⅰ)~(ⅳ)에 의하여 $\frac{bc}{a}$ 가 정수가 되도록 하는 모든 순서쌍

$(a,\ b,\ c)$ 의 개수는 $16+12+12=40$

2. 209

집합 Y의 원소들을 3으로 나누었을 때의 나머지가

같은 수들을 원소로 하는 집합 Y의 부분집합을

각각 $A=\{1,\ 4\}$, $B=\{2,\ 5\}$, $C=\{3\}$이라 하자.

(ⅰ) $f(4)=3$인 경우

$f(1)+f(2)+f(3)=3k$ (k는 자연수)이므로

집합 A, B, C의 원소 중에서 $f(1)$, $f(2)$, $f(3)$의

값으로 선택할 수 있는 원소의 개수와 각 경우의

함수의 개수는 표와 같다.

A	B	C	함수의 개수
1	1	1	$3!\times 2\times 2=24$
3	0	0	$2^3=8$
0	3	0	$2^3=8$
0	0	3	$1^3=1$

$\therefore\ 24+8+8+1=41$

(ⅱ) $f(4)=1$ 또는 $f(4)=4$인 경우

$f(1)+f(2)+f(3)=3k+1$ (k는 자연수)이므로

집합 A, B, C의 원소 중에서 $f(1)$, $f(2)$, $f(3)$의

값으로 선택할 수 있는 원소의 개수와 각 경우의

함수의 개수는 표와 같다.

A	B	C	함수의 개수
1	0	2	$3\times 2=6$
2	1	0	$3\times 2^2\times 2=24$
0	2	1	$3\times 2^2=12$

$\therefore\ 2\times(6+24+12)=84$

(ⅲ) $f(4)=2$ 또는 $f(4)=5$인 경우

$f(1)+f(2)+f(3)=3k+2$ (k는 자연수)이므로

집합 A, B, C의 원소 중에서 $f(1)$, $f(2)$, $f(3)$의

값으로 선택할 수 있는 원소의 개수와 각 경우의

함수의 개수는 표와 같다.

A	B	C	함수의 개수
1	2	0	$3\times 2^2\times 2=24$
2	0	1	$3\times 2^2=12$
0	1	2	$3\times 2=6$

$\therefore\ 2\times(24+12+6)=84$

따라서 구하는 함수의 개수는 $41+84+84=209$

[다른 풀이]

(ⅰ) $f(4)=3$인 경우

집합 Y의 원소 중 중복을 허락하여 선택한 세 수들의

합을 3으로 나눈 나머지가 0이 되는 수들의 순서쌍은

$(1,\ 1,\ 1)$, $(2,\ 2,\ 2)$, $(3,\ 3,\ 3)$, $(4,\ 4,\ 4)$, $(5,\ 5,\ 5)$와

$(1,\ 1,\ 4)$, $(1,\ 4,\ 4)$, $(2,\ 2,\ 5)$, $(2,\ 5,\ 5)$와

$(1,\ 2,\ 3)$, $(1,\ 3,\ 5)$, $(2,\ 3,\ 4)$, $(3,\ 4,\ 5)$이고,

각 순서쌍을 이루는 수들을 $f(1)$, $f(2)$, $f(3)$이

되도록 나열하는 방법의 수는

$5\times\frac{3!}{3!}+4\times\frac{3!}{2!}+4\times 3!=41$

(ⅱ) $f(4)=1$ 또는 $f(4)=4$인 경우

집합 Y의 원소 중 중복을 허락하여 선택한 세 수들의

합을 3으로 나눈 나머지가 1이 되는 수들의 순서쌍은

$(1,\ 1,\ 2)$, $(1,\ 1,\ 5)$, $(1,\ 3,\ 3)$, $(2,\ 2,\ 3)$, $(2,\ 4,\ 4)$,

$(3,\ 3,\ 4)$, $(3,\ 5,\ 5)$, $(4,\ 4,\ 5)$와

$(1,\ 2,\ 4)$, $(1,\ 4,\ 5)$, $(2,\ 3,\ 5)$이고,

각 순서쌍을 이루는 수들을

$f(1)$, $f(2)$, $f(3)$이 되도록 나열하는 방법의 수는

$8\times\frac{3!}{2!}+3\times 3!=42$

$\therefore\ 42\times 2=84$

(ⅲ) $f(4)=2$ 또는 $f(4)=5$인 경우

집합 Y의 원소 중 중복을 허락하여 선택한 세 수들의

합을 3으로 나눈 나머지가 2가 되는 수들의 순서쌍은

$(1,\ 1,\ 3)$, $(1,\ 2,\ 2)$, $(1,\ 5,\ 5)$, $(2,\ 2,\ 4)$, $(2,\ 3,\ 3)$,

$(3,\ 3,\ 5)$, $(3,\ 4,\ 4)$, $(4,\ 5,\ 5)$와

$(1,\ 2,\ 5)$, $(1,\ 3,\ 4)$, $(2,\ 4,\ 5)$이고,

각 순서쌍을 이루는 수들을

$f(1)$, $f(2)$, $f(3)$이 되도록 나열하는 방법의 수는

$8\times\frac{3!}{2!}+3\times 3!=42$

$\therefore\ 42\times 2=84$

따라서 구하는 함수의 개수는 $41+84+84=209$

3. ②

치역의 원소의 개수가 3인 모든 함수의 개수에서 치역의 원소의 개수가 3이면서 치역의 모든 원소의 곱이 홀수인 함수의 개수를 뺀다.

$({}_5\mathrm{C}_3-1)\times S(5,\ 3)\times 3!=1350$

[다른 풀이]

치역이 적어도 하나의 짝수를 포함하고 있어야 하므로 짝수가 1개인 것과 짝수가 2개인 것으로 분류하여 치역이 될 수 있는 경우의 수를 구하고 함수를 만들어준다.

$({}_2\mathrm{C}_1\times{}_3\mathrm{C}_2+{}_2\mathrm{C}_2\times{}_3\mathrm{C}_1)\times S(5,\ 3)\times 3!=1350$

4. 288

2명씩 조 만들기 3!

서로 다른 두 개 조 사이에 자리 2개 하나, 자리1개 두개

이것은 조 4개를 원순열로 배치하는 것과 같음 3!

자리 바꾸는 경우 2^3

5. ②

같은 것이 있는 순열을 이용하여 함숫값이 각각

$(5,\ 5,\ 6,\ 7),\ (5,\ 6,\ 6,\ 7),\ (5,\ 6,\ 7,\ 7)$

인 경우로 나누어 보면

이중 함숫값의 합이 24보다 크거나 같은 경우는

$(5,\ 6,\ 6,\ 7),\ (5,\ 6,\ 7,\ 7)$로 2가지이다.

각각의 순열의 수를 계산하면

$2\times\dfrac{4!}{2!}=24$ (개)

6. ④

i) $f(1)=2\Rightarrow f(2)=3\quad \text{or}\quad 4\quad \text{or}\quad 5$

$\therefore\ 3\times 2!$

ii) $f(1)=4\Rightarrow f(2)=2\ \text{or}\ 3\ \text{or}\ 5$

$\begin{cases} f(2)=2 : 3!-1 \\ f(2)=3\quad \text{or}\quad 5 \end{cases}$

$\therefore\ (3!-1)+2\times 2!=9\quad \therefore\ 15$

7. 425

8. 79

$\dfrac{b}{a},\ \dfrac{d}{c}$가 모두 정수인 경우: $8^2=64$

$\dfrac{b}{a},\ \dfrac{d}{c}$가 모두 정수가 아니지만 $\dfrac{b}{a}+\dfrac{d}{c}$가 정수인 경우: 15

9. ①

$x_{n+1}-x_n=a_n\ (n=1,\ 2,\ 3)$이라 하면 조건 (가)에서

$a_n\geq 2$이고 $(x_4-x_3)+(x_3-x_2)+(x_2-x_1)=x_4-x_1$

이므로 $a_1+a_2+a_3=x_4-x_1$

이때 $x_1+a_1+a_2+a_3=x_4\leq 12$이므로

$12-x_4=a_4$라 하면 $a_4\geq 0$이고

$x_1+a_1+a_2+a_3+a_4=12\qquad\cdots\cdots$ ㉠

이때, $a_n{}'=a_n-2\ (n=1,\ 2,\ 3)$이라 하면

$x_1+a_1{}'+a_2{}'+a_3{}'+a_4=6\qquad\cdots\cdots$ ㉡

이때 $x_1\geq 0,\ a_1{}'\geq 0,\ a_2{}'\geq 0,\ a_3{}'\geq 0,\ a_4\geq 0$이므로

㉡을 만족시키는 순서쌍 $(x_1,\ a_1{}',\ a_2{}',\ a_3{}',\ a_4)$의 개수는

${}_5\mathrm{H}_6={}_{5+6-1}\mathrm{C}_6={}_{10}\mathrm{C}_6={}_{10}\mathrm{C}_4$

$=\dfrac{10\times 9\times 8\times 7}{4\times 3\times 2\times 1}=210$

10. 164

$b=a+x,\ c=b+y$라 하면 $c=a+x+y$이고 이는 15이하가 된다.

따라서 $15-c=z$라 하면 $a+x+y+z=15$를 만족하고

$a\geq 1,\ x\geq 3,\ y\in\{2,\ 3,\ 4,\ 5\}$이어야

한다.$a'=a-1,\ x'=x-3$이라 하면

$y=2$일 때, $a'+x'+z=9$의 음이 아닌 정수해의 개수 ${}_3\mathrm{H}_9=55$개,

$y=3$일 때, $a'+x'+z=8$의 음이 아닌 정수해의 개수 ${}_3\mathrm{H}_8=45$개,

$y=4$일 때, $a'+x'+z=7$의 음이 아닌 정수해의 개수 ${}_3\mathrm{H}_7=36$개,

$y=5$일 때, $a'+x'+z=6$의 음이 아닌 정수해의 개수 ${}_3\mathrm{H}_6=28$개

를 얻는다. 이를 합하면 총 164가지의 경우의 수가 된다.

[다른 풀이]

식을 정리하면 $a+3<b+1<c<b+6$

상황을 검은 공 3개와 흰 공 12개를 배열한다고 생각하면 검은공이 놓인 위치가 뽑는 숫자.

첫 번째 검은 공 앞에 놓인 흰 공의 수를 x, 첫 번째와 두 번째 검은 공 사이에 놓인 흰 공의 수를 y, 두 번째와 세 번째 검은 공 사이에 놓인 흰 공의 수를 z, 세 번째 검은 공 뒤에 놓인 흰 공의 수를 w라 하면

$x+y+z+w=12\ (x\geq 0,\ y\geq 2,\ 1\leq z\leq 4,\ w\geq 0)$

따라서 ${}_4\mathrm{H}_9-{}_4\mathrm{H}_5={}_{12}\mathrm{C}_3-{}_8\mathrm{C}_3=220-56=164$

11. ④

BABABA로 두고

각 자리에 들어갈 문자의 개수를 $x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4,\ x_5,\ x_6$이라 할 때,

$x_1+x_2+x_3+x_4+x_5+x_6=8$이고

$x_1\geq 0,\ x_6\geq 0,$

$x_2\geq 1,\ x_3\geq 1,\ x_4\geq 1,\ x_5\geq 1$

에서 ${}_6\mathrm{H}_4=126$

12. 371

두 조건(가),(나)를 만족사키는 순서쌍의 개수는

$({}_6\mathrm{H}_2)^2=21^2=441$

두 조건(가),(나)를 만족시키고 (다)를 만족시키지 않는 순서쌍의 개수는

${}_{6+1+1}\mathrm{C}_4=70\ (\because 1\leq a\leq b<c\leq d\leq 6)$

$\therefore 441-70=371$

13. 70

$a=2p,\ b=2q,\ c=2r,\ d=2s,\ e=2t$라 두면,

$2(p+q+r+s+t)=32$

그런데, $0 \le p, q, r, s, t \le 4$이다.

따라서 $4-p=a',\ 4-q=b',\ 4-r=c',\ 4-s=d',\ 4-t=e'$라 두면

$a'+b'+c'+d'+e'=4$ (단, $0 \le a', b', c', d', e' \le 4$)

$\therefore {}_5\mathrm{H}_4={}_8\mathrm{C}_4=70$

14. 413

가능한 조합은 다음과 같다.

○ / ○ / ○ / ○ / ○ : ${}_7\mathrm{C}_5=21$

○ / ○ / ○ / ○○ : ${}_7\mathrm{C}_3\times 4=140$

○ / ○ / ○○○ : ${}_7\mathrm{C}_2\times 5=105$

○ / ○○ / ○○ : ${}_7\mathrm{C}_2\times 5=105$

○○ / ○○○ : $7\times 6=42$

$21+140+105+105+42=413$

[다른 풀이]

중복조합을 이용하면 더 쉽게 풀이할 수 있다.

15. ⑤

${}_3\mathrm{H}_6\times 21=588$

$(21=\{4x,\ 3y,\ 0\}:6,\ \{4x,\ 2y,\ y\}:6,\ \{3x,\ x,\ 3y\}:6,$
$\{2x,\ 2x,\ 3y\}:3)$

16. ②

$$A=\sum_{n=0}^{7}\frac{(-1)^n}{3^7}f(n)$$

$$=\sum_{n=0}^{7}\frac{(-1)^n}{3^7}\left\{{}_7\mathrm{C}_n\left(\frac{1}{3}\right)^{7-n}\left(\frac{2}{3}\right)^n\right\}$$

$$=\frac{1}{3^7}\sum_{n=0}^{7}{}_7\mathrm{C}_n\left(\frac{1}{3}\right)^{7-n}\left(-\frac{2}{3}\right)^n$$

$$=\frac{1}{3^7}\left(\frac{1}{3}-\frac{2}{3}\right)^7$$

$$=\frac{1}{3^7}\times\left(-\frac{1}{3}\right)^7$$

$$=-\frac{1}{3^{14}}$$

$$\therefore\ \frac{1}{A}=-3^{14}$$

17. ①

x^2의 계수는

$$2\times{}_2\mathrm{C}_2+3\times{}_3\mathrm{C}_2+4\times{}_4\mathrm{C}_2+\cdots+8\times{}_8\mathrm{C}_2$$

$$=\sum_{k=2}^{8}(k\times{}_k\mathrm{C}_2)$$

$$=\sum_{k=2}^{8}\left\{k\times\frac{k(k-1)}{2}\right\}$$

$$=\sum_{k=2}^{8}\frac{k^3-k^2}{2}$$

$$=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{8}(k^3-k^2)$$

$$=\frac{1}{2}\times\left(\frac{8\times 9}{2}\right)^2-\frac{1}{2}\times\frac{8\times 9\times 17}{6}$$

$$=648-102$$

$$=546$$

[다른 풀이]

$$f(x)=(1+x)+2(1+x)^2+3(1+x)^3+4(1+x)^4+\cdots+8(1+x^8) \quad \cdots\cdots ㉠$$

이라 하면

$$(1+x)f(x)=(1+x)^2+2(1+x)^3+3(1+x)^4+4(1+x)^5+\cdots+7(1+x)^8+8(1+x)^9 \quad \cdots\cdots ㉡$$

㉠$-$㉡에서

$$-xf(x)=(1+x)+(1+x)^2+(1+x)^3+(1+x)^4+\cdots+(1+x)^8-8(1+x)^9$$

$$=\frac{(1+x)\{(1+x)^8-1\}}{x}-8(1+x)^9$$

$$f(x)=-\frac{(1+x)^9-(1+x)}{x^2}+\frac{8(1+x)^9}{x} \quad \cdots\cdots ㉢$$

따라서 $(1+x)+2(1+x)^2+3(1+x)^3+\cdots+8(1+x)^8$의 전개식에서 x^2의 계수는 ㉢의 $-(1+x)^9$의 전개식에서 x^4의 계수와 $8(1+x)^9$의 전개식에서 x^3의 계수의 합과 같으므로

$$-{}_9\mathrm{C}_4+8\times{}_9\mathrm{C}_3=-\frac{9\times 8\times 7\times 6}{4\times 3\times 2\times 1}+8\times\frac{9\times 8\times 7}{3\times 2\times 1}$$

$$=\frac{9\times 8\times 7}{4\times 3\times 2\times 1}(-6+32)$$

$$=546$$

18. 17

조건 (가)에서 1 을 원소로 갖는 집합 X는 집합 A의 부분집합이고, 조건 (나)에서 원소의 개수가 홀수이므로 집합 X의 개수는 집합 $\{2,\ 3, \cdots,\ 19\}$의 부분집합 중에서 원소의 개수가 짝수인 것의 개수와 같다.

원소의 개수가 $2n$ $(n=0,\ 1,\ 2, \cdots,\ 9)$인 부분집합의 개수는 ${}_{18}\mathrm{C}_{2n}$이다.

$\therefore {}_{18}\mathrm{C}_0+{}_{18}\mathrm{C}_2+{}_{18}\mathrm{C}_4+\cdots+{}_{18}\mathrm{C}_{18}=2^{18-1}=2^{17}=k$

$\therefore \log_2 k=\log_2 2^{17}=17$

19. ③

$k=1$인 경우는 예를 들어 다음과 같다.

○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	×

○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	×	×

○	○	○	○	○	○	○	○	○	×	×	×

…

○	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×

위와 같은 경우의 수는 ○와 ×의 경계인 11개의 세로 막대 중 1개를 선택하는 경우의 수와 같으므로 ${}_{11}C_1$이고 ○와 ×를 반대로 나열하는 경우를 생각하면

$a_1=2\times{}_{11}C_1$

$k=2$인 경우도 ○와 ×의 경계인 세로 막대를 2개 선택하는 경우의 수와 같으므로 ${}_{11}C_2$이고 ○와 ×를 반대로 나열하는 경우를 생각하면

$a_2=2\times{}_{11}C_2$

$$\begin{aligned}\therefore\ \sum_{k=1}^{5}a_k&=a_1+a_2+a_3+a_4+a_5\\&=2({}_{11}C_1+{}_{11}C_2+{}_{11}C_3+{}_{11}C_4+{}_{11}C_5)\\&=2({}_{11}C_0+{}_{11}C_1+{}_{11}C_2+{}_{11}C_3+{}_{11}C_4+{}_{11}C_5)-2\\&=2^{11}-2\\&=2046\end{aligned}$$

20. 22

$a_k(1\le k\le 6)$를 순서쌍 $(a_1,\ a_2,\ a_3,\ a_4,\ a_5,\ a_6)$으로

나타내면 순서쌍의 개수는 $\dfrac{6!}{2!2!2!}=90$

이때, $m>n$이기 위해서는 $a_1>a_4$또는 $a_1=a_4,\ a_2>a_5$ 이어야 한다.

i) $a_1>a_4$인 순서쌍은

$(2,\ a_2,\ a_3,\ 1,\ a_5,\ a_6)$ 또는 $(3,\ a_2,\ a_3,\ 1,\ a_5,\ a_6)$

또는 $(3,\ a_2,\ a_3,\ 2,\ a_5,\ a_6)$이므로 그 개수는

$3\times\dfrac{4!}{2!}=36$

ii) $a_1=a_4,\ a_2>a_5$인 순서쌍은

$(1,\ 3,\ a_3,\ 1,\ 2,\ a_6)$ 또는 $(2,\ 3,\ a_3,\ 2,\ 1,\ a_6)$

또는 $(3,\ 2,\ a_3,\ 3,\ 1,\ a_6)$이므로 그 개수는 $3\times2!=6$

i), ii)에 의하여 구하는 확률은 $\dfrac{36+6}{90}=\dfrac{7}{15}$

따라서 $p=15,\ q=7$이므로 $p+q=22$

21. ⑤

1이 적혀 있는 공이 다른 공이라고 생각하자.

$a,\ b,\ c,\ d$를 뽑은 모든 경우의 수는

$6\times5\times4\times3=360$

(i) $a=b=c=1$인 경우의 수는

$a,\ b,\ c$는 1이 들어있는 공을 뽑고 d는 2, 3, 4중 하나의 공을 뽑는 경우의 수이므로

$3\times2\times1\times3=18$

(ii) $a=b=1$인 경우의 수는

$a,\ b$는 1이 적혀있는 공을 뽑고 $c,\ d$는

$(c,\ d)=(2,\ 3),\ (2,\ 4),\ (3,\ 4)$인 경우가 존재하므로

$3\times2\times3=18$

(iii) $a=1$인 있는 경우의 수는

a는 1이 적혀있는 공을 뽑고 $b,\ c,\ d$는

$b=2,\ c=3,\ d=4$인 공을 뽑아야 하므로

3

(i)~(iii)에서 구하는 확률은

$\dfrac{18+18+3}{360}=\dfrac{13}{120}$

22. ②

5번 이내에 시행을 마치려면

3회째에 시행을 마치려면 3번 모두 흰 공을 꺼내야 하므로

$\dfrac{3!}{{}_7P_3}=\dfrac{1}{35}$

4회째에 시행을 마치려면 3회까지 흰 공을 2개, 검은 공을 1개 꺼내야 하므로

$\dfrac{{}_3C_2\times{}_4C_1\times3!}{{}_7P_3}\times\dfrac{1}{4}=\dfrac{3}{35}$

5회째에 시행을 마치려면 4회까지 흰 공을 2개, 검은 공을 2개 꺼내야 하므로

$\dfrac{{}_3C_2\times{}_4C_2\times4!}{{}_7P_4}\times\dfrac{1}{3}=\dfrac{6}{35}$

따라서 확률$=\dfrac{1+3+6}{35}=\dfrac{2}{7}$

[다른 풀이]

6회째에 시행을 마치려면 5회까지 흰 공을 2개, 검은 공을 3개 꺼내야 하므로

$\dfrac{{}_3C_2\times{}_4C_3\times5!}{{}_7P_5}\times\dfrac{1}{2}=\dfrac{2}{7}$

7회째에 시행을 마치려면 6회까지 흰 공을 2개, 검은 공을 4개 꺼내야 하므로

$\dfrac{{}_3C_2\times{}_4C_4\times6!}{{}_7P_6}\times1=\dfrac{3}{7}$

따라서 확률$=1-\dfrac{2}{7}-\dfrac{3}{7}=\dfrac{2}{7}$

23. ①

i) 앞면이 3번 나오는 경우

앞면이 이웃하지 않는 경우는 뒷면 4개를 배치하고 뒷면 사이 5개 중 3개를 선택하여 앞면을 배치하면 되므로

${}_5C_3={}_5C_2=10$가지

$\dfrac{{}_7C_3-{}_5C_3}{2^7}=\dfrac{25}{128}$

(ii) 앞면이 4번 나오는 경우

앞면이 이웃하지 않는 경우는 뒷면 4개를 배치하고 뒷면 사이 4개 중

4개를 선택하여 앞면을 배치하면 되므로 ${}_4C_4=1$가지

$$\frac{{}_7C_4-{}_4C_4}{2^7}=\frac{34}{128}$$

(iii) 앞면이 5, 6, 7번 나오는 경우는 반드시 연속하는 경우가 존재하므로

$$\frac{{}_7C_5+{}_7C_6+{}_7C_7}{2^7}=\frac{29}{128}$$

따라서 구하고자 하는 확률은 $\frac{88}{128}=\frac{11}{16}$이다.

24. ②

$a>b$, $a>c$를 만족하는 경우는 다음 표와 같다.

a	b	c
2	1	1
3	1, 2	1, 2
4	1, 2, 3	1, 2, 3
5	1, 2, 3, 4	1, 2, 3, 4
6	1, 2, 3, 4, 5	1, 2, 3, 4, 5

즉, 주어진 조건을 만족시키는 경우의 수는

$1\times1+2\times1+3\times3+4\times4+5\times5$

$=1+4+9+16+25$

$=55$

한편, 한 개의 주사위를 세 번 던질 때 나오는 경우의 수는

$6^3=216$

따라서 구하는 확률은 $\frac{55}{216}$

25. 79

원소 a를 포함하는 집합이 하나도 없을 사건을 A라고 하면 적어도 한 개 있을 사건은 A^c이다.

집합 S의 부분집합의 총 개수는

$2^6=64$

이때, a를 원소로 갖지 않는 부분집합의 개수는

$2^5=32$

따라서 구하는 확률은

$$P(A^c)=1-P(A)=1-\frac{{}_{32}C_3}{{}_{64}C_3}$$

$$=1-\frac{5}{42}=\frac{37}{42}$$

26. ⑤

4 개의 전구가 켜질 확률은 A 가 켜놓은 전구 3 개의 스위치 중 1 개를 누르고 A 가 누르지 않은 7 개 중에서 2 개의 스위치를 누르는 경우의 확률이므로 $\frac{{}_3C_1\times{}_7C_2}{{}_{10}C_3}=\frac{63}{120}=\frac{21}{40}$

$\therefore\ P_1=\frac{21}{40}$

6 개의 전구가 켜질 확률은 A 가 누른 3 개의 스위치를 제외하고 B 가 다른 스위치 3 개를 누르는 경우의 확률이므로

$$\frac{{}_7C_3}{{}_{10}C_3}=\frac{35}{120}=\frac{7}{24}$$

$\therefore\ P_2=\frac{7}{24}\quad\therefore\ P_1+P_2=\frac{21}{40}+\frac{7}{24}=\frac{49}{60}$

27. ③

4 명이 4 개의 의자에 앉는 경우의 수는

$4!=24$

자리를 재배치할 때 갑 또는 을이 자기 자리에 앉도록 4 명의 자리를 배치하는 경우는 다음과 같다.

(i) 갑과 을이 모두 처음 앉았던 자리에 앉는 경우의 수는

$2!=2$

(ii) 갑만 처음 앉았던 자리에 앉는 경우의 수는

$2\times2!=4$

(iii) 을만 처음 앉았던 자리에 앉는 경우의 수는

$2\times2!=4$

따라서 갑과 을이 모두 처음 자리가 아닌 다른 자리에 앉게 될 확률을 여사건의 확률을 이용하여 구하면

$$1-\frac{10}{24}=\frac{14}{24}=\frac{7}{12}$$

[다른 풀이]

(i) 갑이 자기 자리에 앉을 확률은 $\frac{3!}{4!}=\frac{1}{4}$

(ii) 을이 자기 자리에 앉을 확률은 $\frac{3!}{4!}=\frac{1}{4}$

(iii) 갑, 을 모두 자기 자리에 앉을 확률은 $\frac{2!}{4!}=\frac{1}{12}$

따라서 갑 또는 을이 자기 자리에 앉을 확률은

$$\frac{1}{4}+\frac{1}{4}-\frac{1}{12}=\frac{5}{12}$$

따라서 여사건의 확률을 이용하여 구하면

$$1-\frac{5}{12}=\frac{7}{12}$$

28. ④

$(p=3,\ q=3)$

(가), (나)에서

$P_2+P_3+P_4+P_5=1$이고

$n\ge6$에서 $P_n=0$이므로 두 상자 A, B에 들어 있는 최대의 숫자는 3이고,

두 상자 모두에 3이 들어갈 수 없다.

$P_2=\frac{1}{15}=\frac{1}{3\times5}$에서 각각의 상자에 1이 1장씩 있다.

(i) 상자 A에 $(1,2,3)$의 카드가 있을 경우

상자 B에는 3이 들어 있을 수 없으므로 $(1,2,2,2,2)$가 된다.

이 때, $P_3=\frac{1\times4+1}{15}=\frac{1}{3}$이므로 주어진 조건을 만족시키지 못한다.

(ii) 상자 A에 $(1,3,3)$의 카드가 있을 경우

상자 B에는 3이 들어 있을 수 없으므로 $(1,2,2,2,2)$가 된다.

이 때, $P_3=\frac{1\times4}{15}=\frac{4}{15}$이므로 주어진 조건을 만족시키지 못한다.

(iii) 상자 A에 $(1,\ 2,\ 2)$의 카드가 있을 경우
상자 B에는 3이 들어 있을 수 있다. 상자 B에 들어갈 2의 개수를 m개 3의 개수를 $4-m$개라 두면

$$\mathrm{P}_3=\frac{1\times m+2\times 1}{15}=\frac{1}{5},\ \therefore m=1$$

따라서 상자 B에는 $(1,\ 2,\ 3,\ 3,\ 3)$이 들어 있다.

29. 53

전체 경우의 수는 ${}_3\mathrm{H}_{10}={}_{12}\mathrm{C}_2=66$

$a-b=2$인 경우의 수는 5

($a-b=-2$인 경우의 수도 마찬가지로 5)

$a-b=1$인 경우의 수는 5

($a-b=-1$인 경우의 수도 마찬가지로 5)

$a-b=0$인 경우의 수는 6

$$1-\frac{26}{66}=\frac{20}{33}=\frac{q}{p}$$

$p+q=53$

30. ④

동전을 6번 던지므로 전체 경우의 수는

$2^6=64$가지

방에 불이 꺼져있기 위해서는 다음과 같은 경우만 가능함을 알 수 있다.

				A	B

: $2^4=16$가지

		A	B	B	B

: $2^2=4$가지

A	B	B	B	B	B

: 1가지

B	B	B	B	B	B

: 1가지

따라서 총 $16+4+1+1=22$가지의 경우 방에 불이 꺼질 것이므로

켜져 있을 확률은 $\frac{64-22}{64}=\frac{42}{64}=\frac{21}{32}$이다.

[다른 풀이]

n번째 시행에서 방에 불이 켜져 있을 확률을 p_n이라 하자.

1번째 시행에서는 방에 불이 꺼져 있었으므로 누가 들어가든 불이 켜진다. 즉 $p_1=1$이다.

만약 n번째 시행 후 불이 켜져 있다면 $(n+1)$번째 시행에서 반드시 A가 들어가야 한다.

만약 n번째 시행 후 불이 꺼져 있다면 $(n+1)$번째 시행에서 누가 들어가도 상관없다.

따라서 $p_{n+1}=p_n\times\frac{1}{2}+(1-p_n)\times 1=-\frac{1}{2}p_n+1$이 성립한다.

식을 변형하면 $p_{n+1}-\frac{2}{3}=-\frac{1}{2}\left(p_n-\frac{2}{3}\right)$에서

$$p_n=\left(p_1-\frac{2}{3}\right)\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}+\frac{2}{3}=\frac{1}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}+\frac{2}{3}$$

따라서 $p_6=\frac{1}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^{6-1}+\frac{2}{3}=-\frac{1}{96}+\frac{2}{3}=\frac{63}{96}=\frac{21}{32}$

31. ③

조건 (가)에서 갑이 처음 꺼낸 공과 을이 처음 꺼낸 공에 적힌 수의 합이 짝수이므로 다음과 같이 두 가지 경우로 나눌 수 있다.

(i) 갑이 처음 꺼낸 공과 을이 처음 꺼낸 공에 적힌 수가 모두 짝수인 경우

조건 (나)에서 갑과 을이 두 번째로 꺼낸 공에 적힌 수의 곱이 짝수이고 주머니에 짝수가 적힌 공은 모두 3개이므로 순서쌍으로 나타내면 다음과 같다.

(짝수, 홀수, 짝수, 짝수), (짝수, 짝수, 짝수, 홀수)

이때 확률은

$$\frac{3}{7}\times\frac{4}{6}\times\frac{2}{5}\times\frac{1}{4}+\frac{3}{7}\times\frac{2}{6}\times\frac{1}{5}\times\frac{4}{4}$$

$$=\frac{24+24}{7\times6\times5\times4}=\frac{48}{7\times6\times5\times4}$$

(ii) 갑이 처음 꺼낸 공과 을이 처음 꺼낸 공에 적힌 수가 모두 홀수인 경우

조건 (나)에서 갑과 을이 두 번째로 꺼낸 공에 적힌 수의 곱이 짝수이므로 순서쌍으로 나타내면 다음과 같다.

(홀수, 홀수, 홀수, 짝수), (홀수, 짝수, 홀수, 홀수),

(홀수, 짝수, 홀수, 짝수)

이때 확률은

$$\frac{4}{7}\times\frac{3}{6}\times\frac{2}{5}\times\frac{3}{4}+\frac{4}{7}\times\frac{3}{6}\times\frac{3}{5}\times\frac{2}{4}+\frac{4}{7}\times\frac{3}{6}\times\frac{3}{5}\times\frac{2}{4}$$

$$=\frac{72+72+72}{7\times6\times5\times4}=\frac{216}{7\times6\times5\times4}$$

따라서 구하는 확률은 (i), (ii)에서

$$\frac{48}{7\times6\times5\times4}+\frac{216}{7\times6\times5\times4}=\frac{264}{7\times6\times5\times4}=\frac{11}{35}$$

[다른 풀이]

조건 (가)에서 두 수의 합이 짝수이므로 다음 두 가지로 나눌 수 있다.

(i) 갑과 을이 처음 꺼낸 공에 적힌 수가 모두 짝수인 경우

갑과 을이 처음 꺼낸 공이 모두 짝수일 확률은 짝수는 $2,\ 4,\ 6$이므로

$$\frac{3\times2}{7\times6}=\frac{1}{7}$$

이때 두 번째로 꺼낸 공에 적힌 수의 곱이 짝수인 사건은 곱이 모두 홀수인 사건의 여사건이고 홀수는 $1,\ 3,\ 5,\ 7$이므로

$$1-\frac{4\times3}{5\times4}=\frac{2}{5}$$

확률은 $\frac{1}{7}\times\frac{2}{5}=\frac{2}{35}$

(ii) 갑과 을이 처음 꺼낸 공에 적힌 수가 모두 홀수인 경우

갑과 을이 처음 꺼낸 공이 모두 홀수일 확률은 홀수는 $1,\ 3,\ 5,\ 7$이므로

$$\frac{4\times3}{7\times6}=\frac{2}{7}$$

이때 두 번째로 꺼낸 공에 적힌 수의 곱이 짝수인 사건은 곱이 모두 홀수인 사건의 여사건이고 남아 있는 홀수는 2개이므로

$$1-\frac{2\times1}{5\times4}=\frac{9}{10}$$

확률은 $\frac{2}{7}\times\frac{9}{10}=\frac{9}{35}$

따라서 (i), (ii)에서 구하는 확률은 $\frac{2}{35}+\frac{9}{35}=\frac{11}{35}$

32. 26

다섯 개의 공을 꺼낼 때까지 1이 적힌 공이 한 개, 여섯 번째 공을 꺼낼 때 1이 적힌 공이 한 개 나오면 되므로 $\frac{{}_2\mathrm{C}_1\times{}_5\mathrm{C}_4}{{}_7\mathrm{C}_5}\times\frac{1}{2}=\frac{5}{21}$

[다른 풀이]

7번째 시행에서 2또는 3이 나오고 6번째 시행에서 1이 나오면 되므로 곱셈정리에 의해 $\frac{5}{7}\times\frac{2}{6}=\frac{5}{21}$

33. 4

A, B가 꺼낸 제비가 모두 당첨제비인 사건을 X, C가 꺼낸 제비가 당첨제비인 사건을 Y라 하면 구하는 확률은 $\mathrm{P}(Y|X)$이다.

$\mathrm{P}(X)=\frac{3}{5}\times\frac{2}{4}=\frac{3}{10}$,

$\mathrm{P}(X\cap Y)=\frac{3}{10}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{10}$ 이므로

$$\mathrm{P}(Y|X)=\frac{\mathrm{P}(X\cap Y)}{\mathrm{P}(X)}=\frac{\frac{1}{10}}{\frac{3}{10}}=\frac{1}{3}$$

$\therefore\ p+q=3+1=4$

34. ⑤

조건부확률 $\mathrm{P}(A)=\frac{8\times7\times{}_3\mathrm{C}_1}{9\times8\times7}=\frac{1}{3}$

$\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)-\mathrm{P}(A,\ B,\ C$ 모두 당첨$)$

$=\frac{1}{3}-\frac{3\times2\times1}{9\times8\times7}=\frac{9}{28}$

$\therefore \mathrm{P}(B|A)=\frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(A)}=\frac{27}{28}$

[다른 풀이]

C는 이미 당첨되었으니, 남은 경품이 적어도 1개 이상이 되려면

$1-\frac{{}_2\mathrm{C}_2}{{}_8\mathrm{C}_2}=\frac{27}{28}$

35. ③

$a<c<b$ 또는 $b<c<a$인 사건을 A라 하면

$\mathrm{P}(A)=\frac{{}_6P_3}{6^3}\times\frac{1}{3}=\frac{5}{27}$

$c=2$인 사건을 B라 하면

$\mathrm{P}(A\cap B)=\frac{1}{6}\times\frac{1}{6}\times\frac{4}{6}\times2=\frac{1}{27}$

따라서 구하는 확률은

$\mathrm{P}(B|A)=\frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(A)}=\frac{1}{5}$

36. ②

$1st$	$2nd$	$3rd$	
3	2	0	1 (1)
3	1	1	3 (1)
2	2	1	3+6 (6)

$\therefore\ \frac{1+1+6}{1+3+9}=\frac{8}{13}$

37. 13

점수에 따라 공을 꺼내는 방법은 다음과 같다.

2점 : 빨간 공 / 흰 공 → 흰 공

3점 : 흰 공 → 빨간 공

4점 : 흰 공 → 파란 공 / 파란 공 → 흰 공

이때 4점을 얻기 위해서는 적어도 청색 공을 한 번을 뽑아야 한다.

그런데 주머니에 파란 공은 한 개 뿐이므로 A와 B 모두 4점이 될 수 없다.

(i) A와 B의 점수가 둘 다 2점 일 때

i) A가 빨간 공, B가 빨간 공을 뽑을 확률

$\frac{1}{3}\times\frac{1}{5}=\frac{1}{15}$

ii) A가 빨간 공, B가 흰 공 → 흰 공을 뽑을 확률

$\frac{1}{3}\times\frac{3}{5}\times\frac{2}{4}=\frac{1}{10}$

iii) A가 흰 공 → 흰 공, B가 빨간 공을 뽑을 확률

$\frac{3}{6}\times\frac{2}{5}\times\frac{2}{4}=\frac{1}{10}$

i), ii), iii)에 의하여 구하는 확률은

$\frac{1}{15}+\frac{1}{10}+\frac{1}{10}=\frac{4}{15}$

(ii) A와 B의 점수가 둘 다 3점 일 때

A, B 모두 흰 공 → 빨간 공을 뽑은 경우로 그 확률은

$\frac{3}{6}\times\frac{2}{5}\times\frac{2}{4}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{30}$

(i), (ii)에 의하여 구하는 확률은

$\frac{4}{15}+\frac{1}{30}=\frac{3}{10}$

38. 25

(i) n번 반복한 후 원래의 상태인 경우

시행을 했을 때, 다시 원래의 상태로 돌아올 확률은 A, B 모두 검은 공을 뽑거나 A, B 모두 흰 공을 뽑을 확률이다.

$\left(\frac{3}{4}\times\frac{3}{4}\right)+\left(\frac{1}{4}\times\frac{1}{4}\right)=\frac{5}{8}$

(ii) n번 반복한 후 원래의 상태가 아닌 경우

두 상자 중 한 쪽은 흰 공만 있고 한 쪽은 검은 공 2개와 흰 공 2개가 있다. 이때 시행 후에 원래의 상태가 되기 위해서는 검은 공과 흰 공이 2개씩 상자에서 검은 공을 뽑아야 한다. 즉, 확률은

$$\frac{{}_2C_1}{{}_4C_1}=\frac{1}{2}$$

(ⅰ), (ⅱ)에 의하여 $p_{n+1}=\frac{5}{8}p_n+\frac{1}{2}(1-p_n)$

이므로 $a=\frac{5}{8}$, $b=\frac{1}{2}$에서 $80ab=25$

39. ④

상자 안에 1부터 n $(n \geq 2)$까지의 자연수가 하나씩 적혀 있는 n개의 공이 들어 있다. 1부터 m $(m < n)$까지는 빨간색의 숫자(n개)가 적혀 있고, $(m+1)$부터 n까지는 파란색의 숫자($n-m$개)가 적혀 있다.
상자에서 임의로 1개의 공을 꺼낼 때, 2의 배수가 적혀 있는 공이 나오는 사건을 A, 파란색의 숫자가 적혀 있는 공이 나오는 사건을 B라 하자. 2 이상의 자연수 n에 대하여 두 사건 A, B가 서로 독립이 되도록 하는 모든 자연수 m의 값의 합을 a_n이라 할 때, $\sum_{n=2}^{30} a_n$의 값은? [4점]

❶ $n=2k$일 때, $\mathrm{P}(A)=\frac{1}{2}$, $n=2k+1$일 때, $\mathrm{P}(A)=\frac{k}{2k+1}$

❷ $n=2k$일 때, $\mathrm{P}(B)=\frac{2k-m}{2k}$, $n=2k+1$일 때, $\mathrm{P}(B)=\frac{2k+1-m}{2k+1}$

❸ $\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)$

① 1090 ② 1100 ③ 1110 ④ 1120 ⑤ 1130

❶ n이 짝수일 때 즉, $n=2k$일 때를 생각한다.

(ⅰ) $n=2k$ $(k=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$일 때,

$$\mathrm{P}(A)=\frac{1}{2},\ \mathrm{P}(B)=\frac{2k-m}{2k}$$

$$\mathrm{P}(A\cap B)=\frac{l}{2k}\quad (l=1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ k)$$

서로 독립이 되기 위해서는
$\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)$이므로

$$\frac{l}{2k}=\frac{1}{2}\times\frac{2k-m}{2k}$$

$m=2k-2l$
따라서 될 수 있는 m의 값은
$2,\ 4,\ 6,\ \cdots,\ 2(k-1)$

$$\therefore\ a_{2k}=2+4+6+\cdots+2(k-1)$$
$$=\sum_{k=1}^{n}2(k-1)=n(n-1)$$

❷ n이 홀수일 때 즉, $n=2k+1$일 때를 생각한다.

(ⅱ) $n=2k+1$ $(k=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$일 때,

$$\mathrm{P}(A)=\frac{k}{2k+1},\ \mathrm{P}(B)=\frac{2k+1-m}{2k+1}$$

$$\mathrm{P}(A\cap B)=\frac{l}{2k+1}\quad (l=1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ k)$$

서로 독립이 되기 위해서는
$\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)$이므로

$$\frac{l}{2k+1}=\frac{k}{2k+1}\times\frac{2k+1-m}{2k+1}$$

$$l(2k+1)=2k^2+k-km$$

$$m=2k+1-2l-\frac{l}{k}$$

위의 식이 성립하기 위해서는 $l=k$이므로
$m=0$이다.

$$\therefore\ a_{2k+1}=0$$

❸ a_n의 홀수항과 짝수항을 분리 즉,
$\sum_{n=2}^{30}a_n=\sum_{k=1}^{15}(a_{2k}+a_{2k+1})$로 분리해서 $\sum_{n=2}^{30}a_n$을 구한다.

$$\therefore\ \sum_{n=2}^{30}a_n=\sum_{k=1}^{15}a_{2k}$$
$$=\sum_{k=1}^{15}k(k-1)$$
$$=\sum_{k=1}^{15}(k^2-k)$$
$$=\frac{15\times16\times31}{6}-\frac{15\times16}{2}$$
$$=1240-120=1120$$

40. 94

현진이가 만든 두 자리의 자연수가 미혜가 만든 두 자리의 자연수보다 더 클 확률과 더 작은 확률은 같으므로 같은 자연수를 만들 확률을 구해서 여사건을 적용한다.

$$\frac{1}{2}\times(1-1\times\frac{1}{9}\times1\times\frac{1}{7})=\frac{1}{2}\times(1-\frac{1}{63})=\frac{31}{63}$$

41. ①

i) 동전 A 의 경우:

$1+1+1=3$ 이 될 확률은 ${}_3C_3\left(\frac{1}{2}\right)^3\left(\frac{1}{2}\right)^0=\frac{1}{2^3}$

마찬가지로

$1+1+2=4$ 이 될 확률은 $\frac{3}{2^3}$

$1+2+2=5$ 이 될 확률은 $\frac{3}{2^3}$

$2+2+2=6$ 이 될 확률은 $\frac{1}{2^3}$

ii) 동전 B 의 경우도 마찬가지로

$3+3+3+3=12$ 이 될 확률은 $\frac{1}{2^4}$

$3+3+3+4=13$ 이 될 확률은 $\frac{4}{2^4}$

$3+3+4+4=14$ 이 될 확률은 $\frac{6}{2^4}$

$3+4+4+4=15$ 이 될 확률은 $\frac{4}{2^4}$

$4+4+4+4=16$ 이 될 확률은 $\frac{1}{2^4}$

이상에 의해, 합이 19가 될 확률은

$$\frac{1}{2^3}\times\frac{1}{2^4}+\frac{3}{2^3}\times\frac{4}{2^4}+\frac{3}{2^3}\times\frac{6}{2^4}+\frac{1}{2^3}\times\frac{6}{2^4}=\frac{37}{2^7}$$

합이 20 이 될 확률은

$$\frac{3}{2^3}\times\frac{1}{2^4}+\frac{3}{2^3}\times\frac{4}{2^4}+\frac{1}{2^3}\times\frac{4}{2^4}=\frac{19}{2^7}$$

그러므로 19 또는 20 일 확률은

$$\frac{37}{2^7}+\frac{19}{2^7}=\frac{7}{16}$$

$$\frac{{}_2\mathrm{C}_1\times{}_3\mathrm{C}_1}{{}_5\mathrm{C}_2}=\frac{2\times3}{10}=\frac{3}{5}$$

42. 495

동전 A가 앞면이 a 번 나오고, 동전 B가 앞면이 b번 나왔다고 하면 이동된 점 P의

x좌표는 $a-(6-a)=2a-6\ (0\le a\le6)$

y좌표는 $b-(6-b)=2b-6\ (0\le b\le6)$

이 된다.

옮겨진 점이 직선 $x+y=4$ 위에 있으므로

$(2a-6)+(2b-6)=4$에서 $a+b=8$

조건을 만족시키는 a, b를 순서쌍 $(a,\ b)$로 나타내면

$(6,\ 2)$, $(5,\ 3)$, $(4,\ 4)$, $(3,\ 5)$, $(2,\ 6)$

동전 A가 앞면이 a번, 동전 B가 앞면이 b번 나올 확률은

$${}_6\mathrm{C}_a\left(\frac{1}{2}\right)^6\times{}_6\mathrm{C}_b\left(\frac{1}{2}\right)^6=\frac{{}_6\mathrm{C}_a\cdot{}_6\mathrm{C}_b}{2^{12}}$$

이므로 구하는 확률은

$$p=\frac{{}_6\mathrm{C}_6\cdot{}_6\mathrm{C}_2+{}_6\mathrm{C}_5\cdot{}_6\mathrm{C}_3+{}_6\mathrm{C}_4\cdot{}_6\mathrm{C}_4+{}_6\mathrm{C}_3\cdot{}_6\mathrm{C}_5+{}_6\mathrm{C}_2\cdot{}_6\mathrm{C}_6}{2^{12}}$$

$$=\frac{{}_{12}\mathrm{C}_8}{2^{12}}=\frac{495}{2^{12}}$$

$\therefore\ 2^{12}\times p=495$

43. ⑤

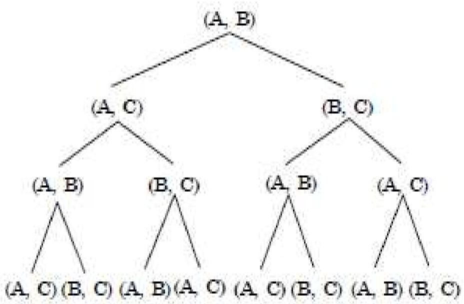
A와 B가 대결하여 A가 k인 카드를 이기는 것은 B가 $k-1$이하인 카드일 때이고, 그 확률 p_k는

$$p_k=\frac{k-1}{12\cdot13}\quad(2\le k\le13)$$

따라서 A가 이길 확률은

$$\sum_{k=2}^{13}p_k=\sum_{k=2}^{13}\frac{k-1}{12\cdot13}=\sum_{k=1}^{12}\frac{k}{12\cdot13}=\frac{1}{2}$$

네 번째 대결에서 A가 출장하는 것은 그림과 같이 다섯 가지 경우가 있다.



따라서 구하는 확률은

$$5\times\left(\frac{1}{2}\right)^3=\frac{5}{8}$$

A, B중 한 명이 이길 확률이 $\frac{1}{2}$라는 것을 직관적으로 알 수 있음.

44. ④

한 번의 시행에서 사건 A가 일어날 확률은

$$\frac{{}_2\mathrm{C}_1\times{}_3\mathrm{C}_1}{{}_5\mathrm{C}_2}=\frac{2\times3}{10}=\frac{3}{5}$$

이므로 확률변수 X는 이항분포 $\mathrm{B}\left(50,\ \frac{3}{5}\right)$을 따른다.

$$\mathrm{E}(X)=50\times\frac{3}{5}=30$$

$$\mathrm{V}(X)=50\times\frac{3}{5}\times\frac{2}{5}=12$$

이고,

$\mathrm{E}(X^2)=\mathrm{V}(X)+\{\mathrm{E}(\mathrm{X})\}^2=912$ 이므로

$$f(x)=\sum_{k=0}^{50}\{(-x^2+2kx+k^2)\cdot\mathrm{P}(X=k)\}$$

$$=-x^2\sum_{k=0}^{50}\mathrm{P}(X=k)+2x\sum_{k=0}^{50}k\mathrm{P}(X=k)+\sum_{k=0}^{50}k^2\mathrm{P}(X=k)$$

$$=-x^2\cdot1+2x\cdot\mathrm{E}(X)+\mathrm{E}(X^2)$$

$$=-x^2+60x+912$$

$$=-(x-30)^2+1812$$

따라서 함수 $f(x)$ 의 최댓값은 1812 이다.

45. ②

$p=\frac{1}{3}$, $q=2$, $r=140$, $s=8$

$$\frac{qr}{ps}=\frac{2\times140}{\frac{1}{3}\times8}=2\times3\times140\times\frac{1}{8}=105$$

46. 48

$$X\sim\mathrm{B}\left(6,\ \frac{1}{3}\right)$$

47. ③

조건 (가)에서 $f(10)>f(20)$이므로 $m<15$이어야 한다.

조건 (나)에서 $f(4)<f(22)$이므로 $m>13$이어야 한다.

$13<m<15$에서 $m=14$

$\mathrm{P}(17\le X\le18)$

$$=\mathrm{P}\left(\frac{17-14}{5}\le Z\le\frac{18-14}{5}\right)$$

$=\mathrm{P}(0.6\le Z\le0.8)$

$=0.288-0.226=0.062$

48. ①

확률변수 X가 정규분포 $\mathrm{N}(10,\ x^2)$을 따를 때, $\frac{X-10}{x}=Z$라

하면 Z는 표준정규분포를 따르고

$\mathrm{P}(10-x^2\le X\le11)$

$$=\mathrm{P}\left(\frac{10-x^2-10}{x}\le Z\le\frac{11-10}{x}\right)$$

$= P\left(-x \le Z \le \frac{1}{x}\right)$

이므로

$$f(x) = P\left(-x \le Z \le \frac{1}{x}\right)$$

$$= P(0 \le Z \le x) + P\left(0 \le Z \le \frac{1}{x}\right)$$

$$\therefore\ f\left(\frac{1}{x}\right) = P\left(0 \le Z \le \frac{1}{x}\right) + P(0 \le Z \le x)$$

$$= f(x)$$

$$\therefore\ \sum_{n=1}^{10} f\left(\frac{1}{n}\right) - \sum_{n=1}^{8} f(n+2)$$

$$= \sum_{n=1}^{10} f(n) - \sum_{n=3}^{10} f(n)$$

$$= f(1) + f(2)$$

$$= \{P(0 \le Z \le 1) + P(0 \le Z \le 1)\}$$

$$+ \left\{P(0 \le Z \le 2) + P\left(0 \le Z \le \frac{1}{2}\right)\right\}$$

$$= 2 \times 0.3413 + 0.4772 + 0.1915$$

$$= 1.3513$$

49. 36

(가) 조건에서

$|m-17| < |m-21| < |m-13|$

이고 m이 자연수이므로 $m = 18$

(나) 조건에서 $g(t)$의 최댓값은 $P(17 \le Z \le 19)$이고

$P(17 \le X \le 19) = P\left(\frac{-1}{\sigma} \le Z \le \frac{1}{\sigma}\right)$이고

함수 $g(t)$의 최댓값이 0.9544이므로 $\frac{1}{\sigma} = 2$, 따라서 $\sigma = \frac{1}{2}$

따라서 구하는 값은 $\frac{m}{\sigma} = 36$

50. 118

정규분포를 따르는 두 확률변수 X, Y의 표준편차가 서로 같으므로 확률밀도함수 $y = f(x)$ 와 $y = g(x)$ 의 그래프는 평행이동에 의하여 일치할 수 있다.

$P(41 \le Y \le 61) = P(m_1 \le X \le m_1 + 17) + P(0 \le Z \le 0.5)$

에서

$$P\left(\frac{41-m_2}{6} \le Z \le \frac{61-m_2}{6}\right)$$

$$= P\left(0 \le Z \le \frac{17}{6}\right) + P\left(0 \le Z \le \frac{1}{2}\right)$$

$$= P\left(-\frac{1}{2} \le Z \le \frac{17}{6}\right)$$

$$= P\left(-\frac{17}{6} \le Z \le \frac{1}{2}\right)$$

한편 $\frac{61-m_2}{6} - \frac{41-m_2}{6} = \frac{20}{6}$ 로 일정하므로

다음과 같이 두 가지 경우로 나누어 생각할 수 있다.

(1) $\frac{41-m_2}{6} = -\frac{1}{2}$ 이고 $\frac{61-m_2}{6} = \frac{17}{6}$ 인 경우

$m_2 = 44$ 이고 $f(x) = g(x)$ 를 만족시키는 x의 값이 44 이므로

$\frac{m_1 + m_2}{2} = \frac{m_1 + 44}{2} = 44$, $m_1 = 44$

$m_1 = m_2 = 44$ 이므로 확률밀도함수 $y = f(x)$ 와 $y = g(x)$ 의 그래프는 일치하게 되어, $f(x) = g(x)$ 를 만족시키는 x 의 값이 44 뿐이라는 조건에 모순된다.

(2) $\frac{41-m_2}{6} = -\frac{17}{6}$ 이고 $\frac{61-m_2}{6} = \frac{1}{2}$ 인 경우

$m_2 = 58$ 이고 $f(x) = g(x)$ 를 만족시키는 x 의 값이 44 이므로

$\frac{m_1 + m_2}{2} = \frac{m_1 + 58}{2} = 44$, $m_1 = 30$

$m_1 = 30$, $m_2 = 58$ 이면, $f(x) = g(x)$ 를 만족시키는 x 의 값이 44 뿐이라는 조건을 만족시킨다.

따라서 $m_1 = 30$, $m_2 = 58$ 이므로

$2m_1 + m_2 = 60 + 58 = 118$

51. ③

가위바위보를 한 번 할 때 A가 이기는 경우는 다음과 같다.

(i) A가 가위, B가 보를 낸 경우

이 경우의 확률은 $\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$

(ii) A가 바위, B가 가위를 낸 경우

이 경우의 확률은 $\frac{1}{4} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{16}$

(iii) A가 보, B가 바위를 낸 경우

이 경우의 확률은 $\frac{1}{4} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{16}$

(i), (ii), (iii)에서 가위바위보를 한 번 할 때 A가 이길 확률은

$\frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16} = \frac{6}{16} = \frac{3}{8}$

이 시행을 n 회 반복할 때, A가 이기는 횟수를 확률변수 X 라 하고, A가 얻는 점수의 합을 확률변수 Y 라 하자.

확률변수 X 는 이항분포 $B\left(n,\ \frac{3}{8}\right)$을 따르므로

$E(X) = n \times \frac{3}{8} = \frac{3}{8}n$

또, $Y = 3X + (n - X) = 2X + n$ 이므로

$$E(Y) = E(2X + n)$$

$$= 2E(X) + n$$

$$= 2 \times \frac{3}{8}n + n$$

$$= \frac{7}{4}n$$

A가 얻는 점수의 합의 기댓값이 105점이므로

$$\frac{7}{4}n = 105$$

$$n = 60$$

즉, 확률변수 X 는 이항분포 $B\left(60,\ \frac{3}{8}\right)$을 따르므로

$E(X) = 60 \times \frac{3}{8} = \frac{45}{2}$

$\mathrm{V}(X)=60\times\frac{3}{8}\times\frac{5}{8}=\frac{225}{16}=\left(\frac{15}{4}\right)^2$

이때 60은 충분히 큰 수이므로 확률변수 X는 근사적으로 정규분포

$\mathrm{N}\left(\frac{45}{2},\ \left(\frac{15}{4}\right)^2\right)$을 따르고,

$Z=\dfrac{X-\frac{45}{2}}{\frac{15}{4}}$ 로 놓으면

확률변수 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다.

따라서 구하는 확률은

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(Y\geq 120)&=\mathrm{P}(2X+60\geq 120)\\&=\mathrm{P}(X\geq 30)\\&=\mathrm{P}\left(\frac{X-\frac{45}{2}}{\frac{15}{4}}\geq\frac{30-\frac{45}{2}}{\frac{15}{4}}\right)\\&=\mathrm{P}(Z\geq 2)\\&=0.5-\mathrm{P}(0\leq Z\leq 2)\\&=0.5-0.4772\\&=0.0228\end{aligned}$$

52. 256

모집단의 표준편차를 σ 표본의 크기가 400일 때, 표본평균을 $\overline{X}$라 하면 신뢰도 96 %의 신뢰구간은

$$\left[\overline{X}-2\frac{\sigma}{\sqrt{400}},\ \overline{X}+2\frac{\sigma}{\sqrt{400}}\right]$$

$\therefore\ b-a=2\times2\frac{\sigma}{\sqrt{400}}=\frac{\sigma}{5}$

표본의 크기가 n일 때,

표본평균을 $\overline{X}'$이라 하면 신뢰도 90%의 신뢰구간은

$$\left[\overline{X}'-1.6\frac{\sigma}{\sqrt{n}},\ \overline{X}'+1.6\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right]$$

$\therefore\ d-c=2\times1.6\frac{\sigma}{\sqrt{n}}=\frac{3.2\sigma}{\sqrt{n}}$

이때 $b-a=d-c$이므로

$\frac{\sigma}{5}=\frac{3.2\sigma}{\sqrt{n}},\quad \sqrt{n}=16$

$\therefore\ n=256$

53. ②

$\mathrm{P}(0\leq Z\leq 1.96)=0.475$이므로

$b-a=2\times1.96\times\frac{\sigma}{\sqrt{64}}=0.49\sigma$

$\mathrm{P}(0\leq Z\leq 2.58)=0.495$이므로

$d-c=2\times2.58\times\frac{\sigma}{\sqrt{144}}=0.43\sigma$

이 공장에서 생산하는 제품 중 임의로 선택한 1개의 제품의 무게를 X라고 하면

X는 정규분포 $\mathrm{N}(m,\ \sigma^2)$을 따르므로 구하는 확률은

$$\begin{aligned}&\mathrm{P}(a-b\leq X-m\leq d-c)\\&=\mathrm{P}(-0.49\leq Z\leq 0.43)\\&=\mathrm{P}(0\leq Z\leq 0.49)+\mathrm{P}(0\leq Z\leq 0.43)\\&=0.188+0.166\\&=0.354\end{aligned}$$

54. ④

$\overline{X}\sim\mathrm{N}(1000,\ 20^2)$

$\rightarrow\mathrm{P}(\overline{X_A}\geq 980)=\mathrm{P}\left(Z\geq\frac{980-1000}{20}\right)=\mathrm{P}(Z\geq-1)=0.84$

$\overline{X}\sim\mathrm{N}(1000,\ 50^2)$

$\rightarrow\mathrm{P}(\overline{X_B}\geq 940)=\mathrm{P}\left(Z\geq\frac{940-1000}{50}\right)=\mathrm{P}(Z\geq-1.2)=0.88$

$\rightarrow\mathrm{P}(\overline{X_B}\leq 940)=0.12$

(1) A(정상)+B(정상) $\Rightarrow 11+2=13$ (O) $\Rightarrow 0.84\times0.88$

(2) A(할인)+B(정상) $\Rightarrow 9.9+2=11.9$ (X)

(3) A(정상)+B(할인) $\Rightarrow 11+1.8=12.8$ (O) $\Rightarrow 0.84\times0.12$

(4) A(할인)+B(할인) $\Rightarrow 9.9+1.8=11.7$ (X)

식 (1)과 (3)을 합하면 $0.84(0.88+0.12)=0.84$의 값이 나온다.

55. 62

$\mathrm{P}(|Z|\leq 1.96)=1-2\mathrm{P}(Z\geq 1.96)=\frac{k}{100}=k\%$ 이므로

신뢰구간의 길이

$\beta-\alpha=2\times1.96\times\frac{4}{\sqrt{n}}\leq 2$이다.

$\sqrt{n}\geq 1.96\times4=7.84$

$n\geq 7.84^2=61.4656$

n은 자연수이므로 n의 최솟값은 62이다.

56. ④

Y를 $a_n=6$인 n의 개수라 하면 $Y\sim\mathrm{B}(100,\ 0.9)\sim\mathrm{N}(90,\ (3)^2)$

$X=6Y-4(100-Y)=10Y-400$

$\mathrm{P}(X\leq 470)=\mathrm{P}(10Y-400\leq 470)=\mathrm{P}(Z\leq-1)=0.1587$