2020 고2 목동고반
Workbook
미적분 복습 프린트

2020.08.28

-송영주, 김병수 Teacher-

‘Quality Education Creation’

수열의 극한

1. 두 상수 a, b에 대하여 $\lim_{n\to\infty}\frac{a}{\sqrt{n^2+n}-bn}=4$일 때, $a+b$의 값은? (단, $b>0$)

① 1　② 3　③ 5　④ 7　⑤ 9

2. $\lim_{n\to\infty}\frac{2+6+10+\cdots+(4n-2)}{n^2+5}$의 값은?

① 1　② 2　③ 3　④ 4　⑤ 5

3. 자연수 n에 대하여 $\sqrt{n^2+6n+3}$의 소수부분을 a_n이라고 할 때, $\lim_{n\to\infty}a_n$의 값은?

① 1　② $\frac{1}{2}$　③ $\frac{1}{3}$　④ $\frac{1}{4}$　⑤ $\frac{1}{5}$

4. 두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$에 대하여

$$\lim_{n\to\infty}(2n+1)a_n=3,\ \lim_{n\to\infty}(4n^2+3)b_n=6$$

일 때, $\lim_{n\to\infty}\frac{(3n-2)a_n}{(n^2+n)b_n}$의 값은?

① 1　② $\frac{3}{2}$　③ 2　④ $\frac{5}{2}$　⑤ 3

5. 수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여 $n < a_n < n+1$을 만족시킬 때, $\lim_{n\to\infty} \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n^2}$의 값은?

① $\frac{1}{2}$ ② $\frac{1}{3}$ ③ $\frac{1}{4}$
④ $\frac{1}{5}$ ⑤ $\frac{1}{6}$

6. 수열 $\{(x^2-5x+6)(2x^2-4x-5)^n\}$이 수렴하기 위한 모든 정수 x의 값의 합은?

① 4 ② 5 ③ 6
④ 7 ⑤ 8

7. 수렴하는 수열 $\{a_n\}$에 대하여

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2^{2n+2} + 3^n a_n}{3^{n+1} - 2^{2n} a_n} = 2$$

일 때, $\lim_{n\to\infty} a_n$의 값은?

① -4 ② -2 ③ -1
④ 1 ⑤ 2

8. 자연수 n에 대하여 42^n의 양의 약수의 총합을 $f(n)$이라 할 때, $\lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{42^n}$의 값은?

① 3 ② $\frac{7}{2}$ ③ 4
④ $\frac{9}{2}$ ⑤ 5

9. 함수 $f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{x^{2n+2}+ax+b}{x^{2n}+1}$ 가 $x=1$에서 미분가능할 때, 상수 $a,\ b$에 대하여 $a-b$의 값을 구하시오.

10. 실수 전체의 집합에서 정의된 함수 $f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{|x|^{n+1}+1}{|x|^{n}+3}$ 의 그래프가 직선 $y=ax-\frac{5}{2}$ 와 서로 다른 세 점에서 만나도록 하는 상수 a의 값을 $\alpha,\ \beta$라 할 때, $|\beta-\alpha|$의 값을 구하시오.

11. 함수 $f(x)=x^2-4x-a$와 함수 $g(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{2\left|x-\frac{b}{2}\right|^n+1}{\left|x-\frac{b}{2}\right|^n+1}$ 에 대하여 $h(x)=f(x)g(x)$라 하자. 함수 $h(x)$가 모든 실수 x에서 연속이 되도록 하는 두 상수 $a,\ b$의 합 $a+b$의 값은?

① -5 ② -3 ③ -1
④ 1 ⑤ 3

12. 수열 $\{a_n\},\ \{b_n\},\ \{c_n\}$에 대하여 <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

〈 보 기 〉

ㄱ. 수열 $\{a_n-b_n\}$이 수렴할 때, 수열 $\{a_n\}$이 발산하면 수열 $\{b_n\}$도 발산한다.
ㄴ. 수열 $\{a_n+b_n\},\ \{a_n-b_n\}$ 모두 수렴하면 수열 $\{a_n^2\},\ \{b_n^2\}$도 수렴한다.
ㄷ. 모든 자연수 n에 대하여 $a_n<c_n<b_n$이고 $\lim_{n\to\infty}a_n=\alpha,\ \lim_{n\to\infty}b_n=\beta$일 때, $\{c_n\}$이 수렴하면 $\alpha=\beta$이다.
ㄹ. 모든 자연수 n에 대하여 $a_n<c_n<b_n$이고, $\lim_{n\to\infty}(a_n-b_n)=0$이면 $\lim_{n\to\infty}c_n$은 수렴한다.

① ㄱ, ㄴ ② ㄴ, ㄷ ③ ㄷ, ㄹ
④ ㄱ, ㄴ, ㄹ ⑤ ㄴ, ㄷ, ㄹ

13. 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$에 대한 설명 중 <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? (단, α는 실수이다.)

< 보 기 >

ㄱ. $\lim_{n\to\infty}(a_n - b_n) = 0$이면 $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n} = 1$이다.

ㄴ. $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{2^n} = \alpha\ (\alpha \neq 0)$이면 $\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} = 2$이다.

ㄷ. 두 수열 $\{|a_n + b_n|\}$, $\{|a_n - b_n|\}$이 모두 수렴하면 두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$도 수렴한다.

ㄹ. $\lim_{n\to\infty}(a_n - b_n) = 5$이고 $\lim_{n\to\infty}a_n = \infty$이면 $\lim_{n\to\infty}\frac{b_n}{a_n} = 1$이다.

① ㄱ, ㄴ ② ㄴ, ㄹ ③ ㄱ, ㄹ
④ ㄷ, ㄹ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ, ㄹ

14. $1\,[\mathrm{L}]$의 물을 두 개의 그릇 A, B에 적당히 나누어 담는다. 먼저 A그릇에 들어 있는 물의 반을 B그릇에 담고, 그 다음 B그릇에 들어 있는 물의 반을 A그릇에 담는 것을 한 번의 "시행"이라 하자. 이와 같은 "시행"을 무한히 반복하면 A그릇에 들어 있는 물의 양은 $x\,[\mathrm{L}]$에 한없이 가까워진다. $30x$의 값은?

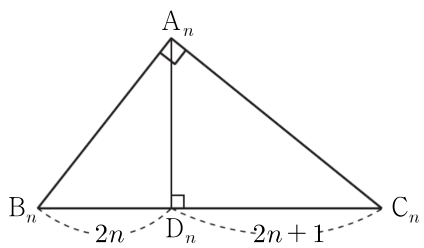
① 10 ② 15 ③ 20
④ 25 ⑤ 30

15. 자연수 n에 대하여 함수 $y = \sqrt{x}$ 위의 점 $\mathrm{A}(4^n,\ 2^n)$와 원점 O에 대하여 선분 $\overline{\mathrm{OA}}$와 수직이고, 점 A를 지나는 직선이 x축과 만나는 점을 B라 한다. 선분 $\overline{\mathrm{OB}}$의 중점 C에 대하여 선분 $\overline{\mathrm{AC}}$를 $2:1$로 내분하는 점을 M이라 할 때, 점 M의 좌표는 $(x_n,\ y_n)$이다

$\lim_{n\to\infty}\frac{x_n + {y_n}^2}{x_n - {y_n}^2}$의 값은?

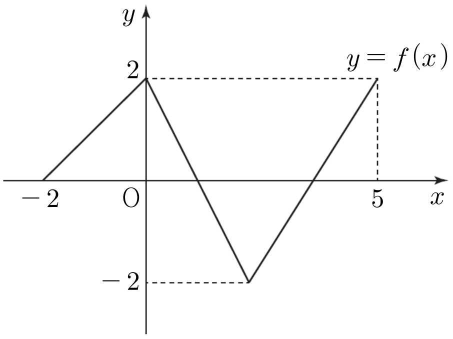
① $\frac{3}{5}$ ② $\frac{5}{3}$ ③ $\frac{5}{7}$
④ $\frac{7}{5}$ ⑤ 1

16. 그림과 같이 자연수 n에 대하여 삼각형 $\mathrm{A}_n\mathrm{B}_n\mathrm{C}_n$은 $\angle \mathrm{A}_n = 90°$인 직각삼각형이다. 꼭짓점 A_n에서 변 $\mathrm{B}_n\mathrm{C}_n$에 내린 수선의 발을 D_n이라 하자. $\overline{\mathrm{B}_n\mathrm{D}_n} = 2n$, $\overline{\mathrm{C}_n\mathrm{D}_n} = 2n+1$일 때, $\lim_{n\to\infty}\left\{\overline{\mathrm{A}_n\mathrm{D}_n} - (2n-1)\right\}$의 값은?



① $\frac{1}{2}$ ② 1 ③ $\frac{3}{2}$
④ 2 ⑤ $\frac{5}{2}$

17. 닫힌 구간 $[-2,\ 5]$에서 정의된 함수 $y=f(x)$의 그래프가 다음과 같다.



자연수 n에 대하여 $\lim_{n\to\infty}\frac{|nf(a)+1|+nf(a)}{2n+3}=1$을 만족시키는 상수 a의 개수는?

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

18. 두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$이 $\lim_{n\to\infty}a_n=\infty$, $\lim_{n\to\infty}(a_n-2b_n)=3$을 만족시킬 때,

$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{(a_n)^2}{2b_n}-\frac{(2b_n)^2}{a_n}\right)$의 값을 구하시오.

19. 다음과 같이 정의된 수열 $\{a_n\}$이 있다.

$$\begin{cases} a_1=1,\ a_2=1 \\ a_{n+2}=a_n+a_{n+1}\ (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots) \end{cases}$$

$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+2}}{a_n}$의 값은?

① $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ ② $\frac{2+\sqrt{5}}{2}$ ③ $\frac{3+\sqrt{5}}{2}$
④ $\frac{4+\sqrt{5}}{2}$ ⑤ $\frac{5+\sqrt{5}}{2}$

20. 삼차함수 $y=f(x)$가 극댓값 $\frac{1}{2}$, 극솟값 -2를 가질 때, 함수 $g(x)$를 다음과 같이 정의한다.

$$g(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{1+\{f(x)\}^{2n}}$$

실수 전체의 집합에서 함수 $y=g(x)$는 $x=\alpha$에서 불연속이다. 실수 α의 개수는?

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

급수

1. 수열 $\{a_n\}$의 일반항이 $a_n = \dfrac{1}{n^2(n+2)}$ 일 때, $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} na_n$의 값은?

① $\dfrac{1}{4}$ ② $\dfrac{1}{2}$ ③ $\dfrac{3}{4}$
④ 1 ⑤ $\dfrac{3}{2}$

2. $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{2n}{(n+1)^2(n-1)^2}$ 의 값은?

① $\dfrac{5}{8}$ ② $\dfrac{3}{4}$ ③ $\dfrac{5}{4}$
④ $\dfrac{3}{2}$ ⑤ $\dfrac{5}{2}$

3. 급수

$$\log_a\left(1-\frac{1}{3^2}\right)+\log_a\left(1-\frac{1}{4^2}\right)+\log_a\left(1-\frac{1}{5^2}\right)+\cdots=1$$

일 때, 상수 a의 값은?

① $\dfrac{2}{3}$ ② 1 ③ $\dfrac{4}{3}$
④ $\dfrac{3}{2}$ ⑤ 2

4. 모든 항이 양수이고 공비가 $\dfrac{3}{2}$인 등비수열 $\{a_n\}$에 대하여 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{a_{n+1}}-\sqrt{a_n}}{\sqrt{a_n a_{n+1}}} = \frac{1}{4}$ 일 때, a_4의 값은?

① 46 ② 48 ③ 50
④ 52 ⑤ 54

5. 등비급수 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2a-3}{5}\right)^n$ 이 수렴하도록 하는 모든 정수 a의 값의 합은?

① 5 ② 6 ③ 8
④ 9 ⑤ 10

6. 첫째항이 3이고 공비가 $\frac{1}{2}$인 등비수열 $\{a_n\}$에 대하여 수열 $\{b_n\}$을 $b_n = \sum_{k=n}^{\infty} a_k$로 정의할 때, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$의 값은?

① 12 ② 9 ③ 6
④ 3 ⑤ 0

7. 이차방정식 $6x^2+3x-1=0$의 두 근을 $\alpha,\ \beta$라고 할 때, $\frac{1}{\beta-\alpha}\sum_{n=1}^{\infty}(\beta^{n-1}-\alpha^{n-1})$의 값은?

① $\frac{1}{4}$ ② $\frac{3}{4}$ ③ $\frac{17}{9}$
④ $\frac{13}{6}$ ⑤ $\frac{29}{10}$

8. 자연수 n에 대하여 9^n을 10으로 나눈 나머지를 a_n이라고 하자. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{10^n}=\frac{p}{q}$일 때, $q-p$의 값은? (단, $p,\ q$는 서로소인 자연수이다.)

① 4 ② 5 ③ 6
④ 7 ⑤ 8

9. 수열 $\{a_n\}$에 대하여 $\sum_{n=1}^{\infty}(na_n-3)=10$일 때,

$\lim_{n\to\infty}\frac{2n-1+3n^2a_n}{n+1}$의 값은?

① $\frac{5}{2}$ ② 5 ③ $\frac{11}{2}$
④ 11 ⑤ 15

10. 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$에 대하여 <보기>에서 옳은 것의 개수는?

〈 보 기 〉

ㄱ. 등비급수 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$이 수렴하면 $\sum_{n=1}^{\infty}a_{2n}$도 수렴한다.

ㄴ. 등비급수 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$이 발산하면 $\sum_{n=1}^{\infty}a_{2n}$도 발산한다.

ㄷ. 급수 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 또는 $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$이 수렴하면 $\lim_{n\to\infty}a_nb_n=0$이다.

ㄹ. 급수 $\sum_{n=1}^{\infty}a_nb_n$이 수렴하면 $\lim_{n\to\infty}a_n=0$ 또는 $\lim_{n\to\infty}b_n=0$이다.

ㅁ. $\lim_{n\to\infty}a_n=0$이면 급수 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$는 수렴한다.

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

11. 수열 $\{a_n\}$에 대하여 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n=1$, $\lim_{n\to\infty}na_n=0$일 때, $\sum_{n=1}^{\infty}n(a_n-a_{n+1})$의 값을 구하시오.

12. 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$에 대하여 <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

〈 보 기 〉

ㄱ. 수열 $\{a_nb_n\}$이 0으로 수렴하면 수열 $\{a_n\}$ 또는 수열 $\{b_n\}$이 0으로 수렴한다.

ㄴ. $\lim_{n\to\infty}\frac{b_n}{a_n}=2$이고 수열 $\{b_n\}$이 수렴하면 수열 $\{a_n\}$도 수렴한다. (단, $a\neq0$, $b_n\neq0$이다.)

ㄷ. $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n)$과 $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n-3b_n)$이 모두 수렴하면 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$과 $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$도 모두 수렴한다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄷ

13. 실수 전체의 집합에서 정의된 함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $-1 \le x \le 1$인 실수 x에 대하여 $f(x) = -2x^2 + 2$이다.
(나) 모든 실수 x에 대하여 $f(x+2) = f(x)$이다.

자연수 n에 대하여 함수 $y = f(x)$의 그래프와 직선 $y = \frac{1}{n}x$가 만나는 점의 개수를 a_n이라 할 때, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_n a_{n+1}}$의 값은?

① $\frac{1}{2}$ ② $\frac{1}{4}$ ③ $\frac{1}{6}$ ④ $\frac{1}{8}$ ⑤ $\frac{1}{10}$

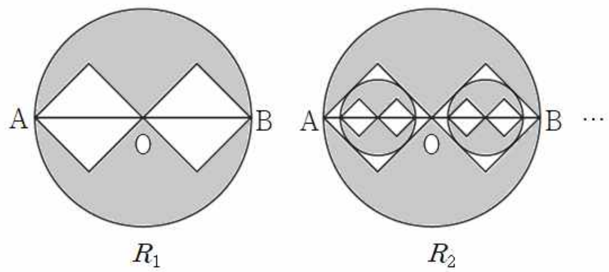
14. 2보다 큰 자연수 n에 대하여 $(-3)^{n-1}$의 n제곱근 중 실수인 것의 개수를 a_n이라 할 때, $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{a_n}{2^n}$의 값은?

① $\frac{1}{6}$ ② $\frac{1}{4}$ ③ $\frac{1}{3}$ ④ $\frac{5}{12}$ ⑤ $\frac{1}{2}$

15. 자연수 n에 대하여 $3^n \cdot 5^{n+1}$의 모든 양의 약수의 개수를 a_n이라 할 때, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_n}$의 값은?

① $\frac{1}{2}$ ② $\frac{7}{12}$ ③ $\frac{2}{3}$ ④ $\frac{3}{4}$ ⑤ $\frac{5}{6}$

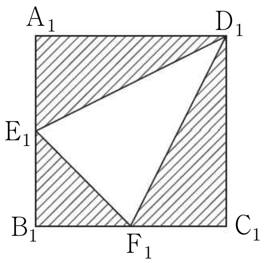
16. 그림과 같이 반지름의 길이가 3인 원 O의 지름 AB를 두 개의 반지름 OA, OB로 나누고 각각의 반지름을 대각선으로 하는 두 정사각형을 그린 다음 두 정사각형의 외부의 영역에 색칠하여 얻은 그림을 R_1이라 하자. 또, R_1의 두 정사각형에 내접하는 원을 각각 그리고 그 안에 그림 R_1을 얻은 것과 같은 방법으로 얻은 그림을 R_2라 하자. 이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 그림 R_n에서 색칠된 부분의 넓이를 S_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty} S_n = p\pi - q$이다. 유리수 p, q의 합 $p+q$의 값을 구하시오.



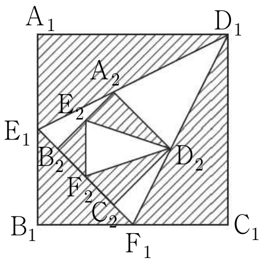
17. 그림과 같이 한 변의 길이가 4인 정사각형 $A_1B_1C_1D_1$에서 선분 A_1B_1과 선분 B_1C_1의 중점을 각각 E_1, F_1이라 하자. 정사각형 $A_1B_1C_1D_1$의 내부와 삼각형 $E_1F_1D_1$의 외부의 공통부분에 색칠하여 얻은 그림을 R_1이라 하자.

그림 R_1에 선분 D_1E_1 위의 점 A_2, 선분 D_1F_1 위의 점 D_2와 선분 E_1F_1 위의 두 점 B_2, C_2를 꼭짓점으로 하는 정사각형 $A_2B_2C_2D_2$를 그리고, 정사각형 $A_2B_2C_2D_2$에 그림 R_1을 얻은 것과 같은 방법으로 삼각형 $E_2F_2D_2$를 그리고 정사각형 $A_2B_2C_2D_2$의 내부와 삼각형 $E_2F_2D_2$의 외부의 공통부분에 색칠하여 얻은 그림을 R_2라 하자.

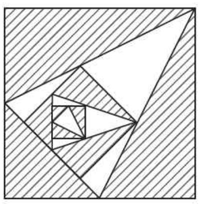
이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 그림 R_n에 색칠되어 있는 부분의 넓이를 S_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty} S_n = \frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p, q는 서로소인 자연수이다.)



R_1



R_2


R_3

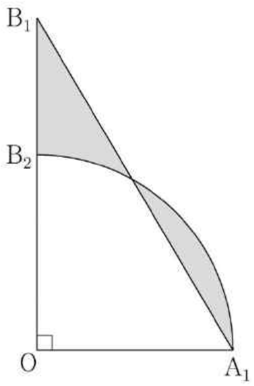
⋯

⋯

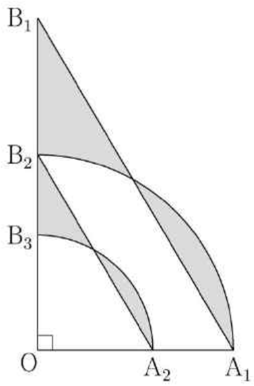
18. 그림과 같이 $\overline{OA_1}=4$, $\overline{OB_1}=4\sqrt{3}$인 직각삼각형 OA_1B_1이 있다. 중심이 O이고 반지름의 길이가 $\overline{OA_1}$인 원이 선분 OB_1과 만나는 점을 B_2라 하자. 삼각형 OA_1B_1의 내부와 부채꼴 OA_1B_2의 내부에서 공통된 부분을 제외한  모양의 도형에 색칠하여 얻은 그림을 R_1이라 하자.

그림 R_1에서 점 B_2를 지나고 선분 A_1B_1에 평행한 직선이 선분 OA_1과 만나는 점을 A_2, 중심이 O이고 반지름의 길이가 $\overline{OA_2}$인 원이 선분 OB_2와 만나는 점을 B_3이라 하자. 삼각형 OA_2B_2의 내부와 부채꼴 OA_2B_3의 내부에서 공통된 부분을 제외한  모양의 도형에 색칠하여 얻은 그림을 R_2라 하자.

이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 그림 R_n에 색칠되어 있는 부분의 넓이를 S_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty} S_n$의 값은?



R_1



R_2

⋯

⋯

① $\frac{3}{2}\pi$　② $\frac{5}{3}\pi$　③ $\frac{11}{6}\pi$
④ 2π　⑤ $\frac{13}{6}\pi$

지수로그함수의 극한과 미분

1. $\lim_{x\to\infty}\frac{3^{x+1}(2^{x+1}+3^{-x})}{6^{x-1}-2}$ 의 값은?

① 33 ② 34 ③ 35
④ 36 ⑤ 37

2. $\lim_{x\to0+}\frac{\log_2 x+4^x}{\log_4 x+2^x}$ 의 값은?

① -2 ② -1 ③ 1
④ $\frac{1}{2}$ ⑤ 2

3. <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

< 보 기 >

ㄱ. $\lim_{x\to\infty}\left\{\log_2(4x+1)+\log_{\frac{1}{2}}2x\right\}=1$

ㄴ. $\lim_{x\to0+}\log_2 2x=\infty$

ㄷ. $\lim_{x\to\infty}\frac{2\times3^{x+1}-4}{3^{x-1}+2^x}=18$

ㄹ. $\lim_{x\to0}\frac{1-3^{\frac{1}{x}}}{1+3^{\frac{1}{x}}}=-1$

① ㄱ, ㄴ ② ㄱ, ㄷ ③ ㄴ, ㄷ
④ ㄷ, ㄹ ⑤ ㄱ, ㄷ, ㄹ

4.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{4^n}\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{1}{n+1}\right)\left(1+\frac{1}{n+2}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{2n}\right)\right\}^{2n}$$

의 값은?

① $\frac{1}{e}$ ② $\frac{1}{\sqrt{e}}$ ③ 1
④ $\sqrt{e}$ ⑤ e

5. $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2}\right)^{2n}$ 의 값은?

① e ② e^2 ③ e^3
④ e^4 ⑤ e^5

6. $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x-a}{x+a}\right)^{x}=e^2$를 만족시키는 실수 a의 값은?

① $-\frac{3}{2}$ ② -1 ③ $-\frac{1}{2}$
④ $\frac{1}{2}$ ⑤ 1

7. 자연수 n에 대하여 직선 $x=n$과 함수 $f(x)=\frac{x-1}{x}$의 그래프가 만나는 점의 y좌표를 a_n이라 하자. $\lim_{n\to\infty}(a_n)^n=p$, $\lim_{x\to1}\{1-f(x)\}^{\frac{1}{f(x)}}=q$일 때, 상수 p, q의 합 $p+q$의 값은?

① $\frac{-1}{e}$ ② $\frac{1}{e^2}$ ③ $\frac{1}{e}$
④ $\frac{2}{e}$ ⑤ $\frac{3}{e}$

8. 함수 $f(n)=\lim_{x\to0}\{1+n\cdot2^{n-1}\cdot x\}^{\frac{1}{x}}$이라고 하자. $\sum_{n=1}^{20}\ln f(n)=a\cdot2^{20}+1$일 때, 실수 a의 값은?

① 16 ② 17 ③ 18
④ 19 ⑤ 20

9. $\lim_{x\to\infty} x^2 \ln\left(a+\frac{b}{x^c}\right)=2$를 만족시키는 세 양수 $a,\ b,\ c$에 대하여 $a+b-c$의 값은?

① -2 ② -1 ③ 1
④ 2 ⑤ 3

10. 등식 $\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{\sqrt{ax+b}-1}=1$을 만족시키는 상수 $a,\ b$에 대하여 $a-b$의 값은?

① 0 ② 1 ③ 5
④ 6 ⑤ 7

11. $\lim_{x\to 0}\frac{\ln(a+2x)}{x^2+x}=b$를 만족시키는 상수 $a,\ b$에 대하여 $a+b$의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

12. 자연수 n에 대하여 $f(n)$을

$f(n)=\sum_{k=0}^{n}\{\ln(n+k+1)-\ln(n+k)\}$라 할 때,

$\lim_{n\to\infty} n\{f(n)-\ln 2\}$의 값은?

① $\frac{1}{4}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ 1
④ 2 ⑤ 4

13. 이차항의 계수가 1인 이차함수 $f(x)$와 함수

$g(x)=\begin{cases}\frac{1}{\ln(x+1)} & (x\neq 0)\\ 8 & (x=0)\end{cases}$ 에 대하여 함수

$f(x)g(x)$가 구간 $(-1,\ \infty)$에서 연속일 때, $f(3)$의 값은?

① 9 ② 12 ③ 15
④ 18 ⑤ 21

14. 함수 $f(x)$가 열린 구간 $\left(-\frac{1}{4},\ \infty\right)$에서 부등식

$\frac{\ln(1+4x)}{4} < f(x) < e^x - 1$이 만족할 때,

$\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{x}$ 의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

15. 두 실수 $a,\ b$에 대하여 실수 전체에서 정의된 함수

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{e^{-2x}+1-ae^{-x}}{x^2} & (x\neq0)\\ b & (x=0)\end{cases}$$

가 모든 실수 x에 대하여 연속일 때, $a+b$의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

16. $\lim_{x\to0}\frac{\ln(1+x)}{1-e^{ax+b}}=\frac{1}{5}$ 이 성립할 때, 상수 $a,\ b$에 대하여 $a+b$의 값은?

① -5 ② -4 ③ -3
④ -2 ⑤ -1

17. 부등식 $\frac{\ln a}{\ln b}>1$을 만족시키는 1보다 작은 양의 실수 $a,\ b$에 대하여 <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

〈 보 기 〉

ㄱ. $\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{a}{x}\right)^{bx} < \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{b}{x}\right)^{ax}$

ㄴ. $\lim_{x\to0}\frac{ax}{e^{bx}-1} < \lim_{x\to0}\frac{bx}{e^{ax}-1}$

ㄷ. $\lim_{x\to0}\frac{\ln(1+ax)}{bx} < \lim_{x\to0}\frac{\ln(1+bx)}{ax}$

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

18. 미분 가능한 함수 $f(x)$에 대하여

$\lim_{x \to 2} \frac{e^x f(x) - 4}{x - 2} = 2e$ 일 때, $f(2) + f'(2)$를 구하시오.

19. 함수 $f(x) = e^{2x} + \ln x^3$에 대하여

$f'(3) = ae^m + b$이다. $a + m + b$의 값은? (단, a, m, b는 유리수이다.)

① 6 ② 7 ③ 8
④ 9 ⑤ 10

20. 함수 $f(x) = 2e^x \ln x$에 대하여

$\lim_{h \to 0} \frac{f(1+2h) - f(1-2h)}{h}$ 의 값은?

① $\frac{1}{8e}$ ② $\frac{1}{e}$ ③ e
④ $4e$ ⑤ $8e$

21. 함수 $f(x) = 2^{x+1}$에 대하여

$\lim_{h \to 0} \frac{f(2+h) - f(2-3h)}{h} = k$일 때, $\frac{k}{\ln 2}$의 값을 구하시오.

22. $a > 0$, $b > 0$, $a \neq 1$, $b \neq 1$일 때, 함수

$$f(x) = \frac{b^x + \log_a x}{a^x + \log_b x}$$

에 대하여 <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

〈보 기〉

ㄱ. $1 < a < b$ 이면 $x > 1$인 모든 x에 대하여 $f(x) > 1$이다.

ㄴ. $b < a < 1$이면 $\lim_{x \to \infty} f(x) = 0$이다.

ㄷ. $\lim_{x \to 0+} f(x) = \log_a b$

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

삼각함수의 덧셈정리

1. 원점 O와 점 $\mathrm{P}(-4,\ 3)$를 지나는 동경이 나타내는 각의 크기를 θ라 할 때, $\csc\theta-\sec\theta$의 값은?

① $-\dfrac{35}{12}$ ② $-\dfrac{5}{7}$ ③ $\dfrac{5}{12}$
④ $\dfrac{5}{7}$ ⑤ $\dfrac{35}{12}$

2. $\dfrac{2}{\csc\theta-\cot\theta}+\dfrac{2}{\csc\theta+\cot\theta}-\dfrac{1}{\sin\theta}$ 과 같은 식은?

① 0 ② $\csc\theta$ ③ $2\csc\theta$
④ $3\csc\theta$ ⑤ $4\csc\theta$

3. $\dfrac{2\sin\left(\dfrac{3}{2}\pi-\theta\right)}{\sin\left(\dfrac{\pi}{2}+\theta\right)\cos^2\theta}-\dfrac{\sin(\pi+\theta)\tan^2(\pi-\theta)}{\cos\left(\dfrac{3}{2}\pi+\theta\right)}$
$+\dfrac{\sin(\pi+\theta)}{1+\cos\left(\dfrac{\pi}{2}+\theta\right)}\times\dfrac{\cos\left(\dfrac{\pi}{2}+\theta\right)}{1+\cos\left(\dfrac{3}{2}\pi+\theta\right)}$ 의 값은?

① -2 ② -1 ③ 0
④ 1 ⑤ 2

4. $\sin\theta+\cos\theta=\sqrt{2}$ 일 때, $\csc^2\theta+\sec^2\theta$의 값은?

① 2 ② 3 ③ 4
④ 5 ⑤ 6

5. $\overline{AB}=\overline{AC}$인 이등변삼각형 ABC에서 $\angle A=\alpha$, $\angle B=\beta$라 하자. $\tan(\alpha+\beta)=-\frac{3}{2}$일 때, $\tan\alpha$의 값은?

① $\frac{21}{10}$ ② $\frac{11}{5}$ ③ $\frac{23}{10}$
④ $\frac{12}{5}$ ⑤ $\frac{5}{2}$

6. $\sin\alpha=\frac{3}{5}$, $\cos\beta=\frac{\sqrt{5}}{5}$ 일 때, $\sin(\beta-\alpha)$ 의 값은? (단, α, β 는 예각이다.)

① $\frac{3\sqrt{5}}{20}$ ② $\frac{\sqrt{5}}{5}$ ③ $\frac{\sqrt{5}}{4}$
④ $\frac{3\sqrt{5}}{10}$ ⑤ $\frac{7\sqrt{5}}{20}$

7. $\tan\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)=2$일 때, $\tan\alpha$ 의 값은?

① $\frac{1}{3}$ ② $\frac{4}{9}$ ③ $\frac{5}{9}$
④ $\frac{2}{3}$ ⑤ $\frac{7}{9}$

8. $0<\alpha<\beta<\frac{\pi}{2}$인 두 수 α, β가

$$\sin\alpha\sin\beta=\frac{\sqrt{3}+1}{4},\ \cos\alpha\cos\beta=\frac{\sqrt{3}-1}{4}$$

을 만족시킬 때, $\cos(3\alpha+\beta)$의 값은?

① -1 ② $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ ③ $-\frac{\sqrt{2}}{2}$
④ $-\frac{1}{2}$ ⑤ 0

9. 등식 $\sin\theta-\cos\theta=\frac{1}{2}$을 만족하는 θ에 대하여 $\cos^2 2\theta=\frac{b}{a}$이다. $a+b$의 값을 구하시오.
(단, a, b는 서로소인 자연수이다.)

10. $(\tan x+2)(\tan y+2)=5$를 만족시키는 x, y에 대하여 $\cos(x+y)$의 값은? (단, $0<x<\frac{\pi}{4}$, $0<y<\frac{\pi}{4}$)

① $\frac{\sqrt{5}}{2}$ ② $\frac{2\sqrt{5}}{5}$ ③ $\frac{\sqrt{5}}{10}$
④ $\frac{\sqrt{5}}{5}$ ⑤ $\frac{5}{4}$

11. 이차방정식 $2x^2-6x-1=0$의 두 근이 $\tan\alpha$, $\tan\beta$일 때, $\tan(\alpha+\beta)$의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

12. $\sin\left(\theta-\frac{\pi}{3}\right)$, $\sin\theta$, $\sin\left(\theta+\frac{\pi}{6}\right)$이 이 순서대로 등차수열을 이룰 때, $\csc\theta$의 값은? (단, $0<\theta<\pi$)

① 0 ② 1 ③ 2
④ 3 ⑤ 4

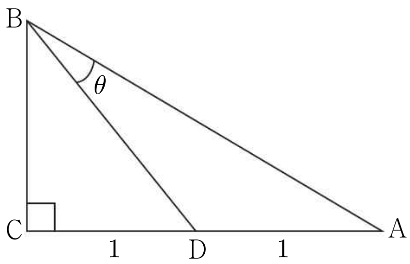
13. 함수 $f(x)=\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)\cos\left(x-\frac{\pi}{3}\right)$의 주기를 p라고 할 때, $f(p)$의 값은?

① $-\frac{\sqrt{3}}{4}$ ② $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ ③ $\sqrt{3}$
④ $\frac{\sqrt{3}}{4}$ ⑤ $\frac{\sqrt{3}}{2}$

14. 두 직선 $x-3y+1=0$, $y=mx+2$이 이루는 예각의 크기가 $\frac{\pi}{4}$가 되도록 하는 모든 실수 m의 값의 곱은?

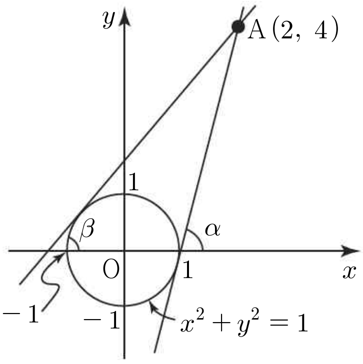
① -1 ② -2 ③ -3
④ -4 ⑤ -5

15. 그림과 같이 $\overline{\mathrm{AD}}=\overline{\mathrm{DC}}=1$이고 $\angle \mathrm{C}$가 직각인 직각삼각형 ABC에서 $\angle \mathrm{ABD}$의 크기를 θ라고 한다. $\tan\theta$의 값이 최대일 때, $\overline{\mathrm{BC}}$의 길이는?



① 1 ② $\sqrt{2}$ ③ $2\sqrt{2}$
④ 2 ⑤ $\sqrt{5}$

16. 그림과 같이 점 $\mathrm{A}(2,\ 4)$에서 원 $x^2+y^2=1$에 그은 두 접선이 x축의 양의 방향과 이루는 각의 크기를 각각 α, β라고 할 때, $\tan(\alpha+\beta)$의 값은?



① $-\frac{8}{3}$ ② $-\frac{7}{3}$ ③ -2
④ $-\frac{5}{3}$ ⑤ $-\frac{4}{3}$

17. 함수 $f(x)=3\sin x-2\cos\left(x+\frac{5\pi}{6}\right)$의 최댓값은?

① $\sqrt{15}$ ② 4 ③ $\sqrt{17}$
④ $3\sqrt{2}$ ⑤ $\sqrt{19}$

18. 함수 $f(x)=\sin x-\cos x-1\ (0\le x\le\pi)$의 최댓값과 최솟값의 곱은 $a-b\sqrt{2}$이다. $a+b$의 값을 구하시오.(단, a, b는 정수이다.)

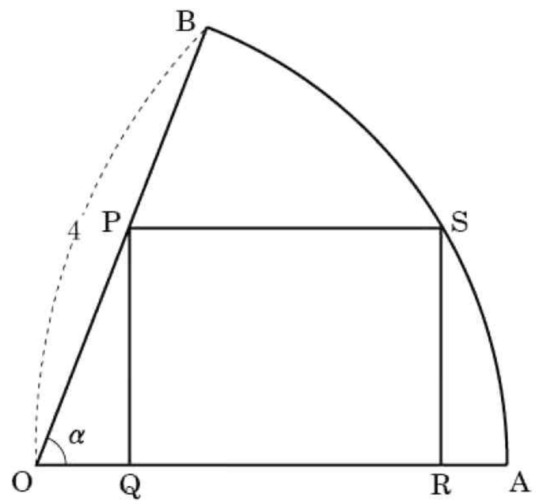
19. 직선 $y=mx\ (0<m<\sqrt{3})$가 x축과 이루는 예각의 크기를 θ_1, 직선 $y=mx$가 직선 $y=\sqrt{3}x$와 이루는 예각의 크기를 θ_2라 하자. $3\sin\theta_1+2\sin\theta_2$의 값이 최대가 되도록 하는 m의 값은?

① $\frac{1}{2}$ ② $\frac{\sqrt{3}}{3}$ ③ $\frac{\sqrt{2}}{2}$
④ $\sqrt{2}$ ⑤ $\frac{2\sqrt{3}}{3}$

20. 함수 $f(x)=\dfrac{\sin x+\cos x}{\sin x+\cos x-2}$의 최댓값과 최솟값의 합은?

① $-2\sqrt{2}$ ② $2\sqrt{2}$ ③ -2
④ 2 ⑤ $-2-\sqrt{2}$

21. 그림과 같이 반지름의 길이가 4, 중심각의 크기가 α인 부채꼴 OAB가 있다. $\tan\alpha=4$일 때, 이 부채꼴에 내접하는 직사각형 PQRS의 둘레의 길이의 최댓값을 구하시오.
(단, 점 Q, R는 반지름 OA 위에 점 S는 호 AB 위에 있다.)



삼각함수의 극한, 미분

1. $\lim_{x \to 0} \frac{\sin x^\circ}{x}$ 의 값은?

① $\frac{\pi}{360}$ ② $\frac{\pi}{180}$ ③ 1

④ $\frac{180}{\pi}$ ⑤ $\frac{360}{\pi}$

2. $\lim_{x \to 0} \frac{\sin(ax+b)}{\tan x} = 2$를 만족시키는 상수 a, b의 합 $a+b$의 값은? (단, $0 \le b < \pi$)

① 0 ② 1 ③ 2

④ 3 ⑤ 4

3. $\lim_{x \to 0} \frac{x \ln(1+ax)}{1-\cos 2x} = 1$을 만족시키는 상수 a의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3

④ 4 ⑤ 5

4. 자연수 m, n에 대하여

$\lim_{x \to 0} \frac{\sin^2 2x}{\tan mx \cdot \ln(x^n+1)} = 2$일 때, $m+n$의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3

④ 4 ⑤ 5

5. 함수 $f(x)$가

$f(x) = \begin{cases} 2\sin x + x^2 \cos \frac{1}{x} & (x \neq 0) \\ 0 & (x = 0) \end{cases}$일 때,

$f'(0)$의 값은?

① 2 ② 3 ③ 4

④ 5 ⑤ 6

6. $\lim_{x\to 0}\dfrac{-3\cos^2 x - 2\cos x + 5}{x^2}$ 의 값을 구하시오.

7. $\lim_{x\to 0}\dfrac{\cos^3 x - 1}{x\sin x}$ 의 값은?

① $-\dfrac{3}{2}$ ② $-\dfrac{1}{2}$ ③ $\dfrac{1}{2}$
④ $\dfrac{3}{2}$ ⑤ $\dfrac{5}{2}$

8. $\lim_{x\to 0}\dfrac{\csc x - \cot x}{x}$ 의 값은?

① $\dfrac{1}{5}$ ② $\dfrac{1}{4}$ ③ $\dfrac{1}{3}$
④ $\dfrac{1}{2}$ ⑤ 1

9. 함수 $f(x) = 2x\cos x$에 대하여

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(\pi+3h)-f(\pi-2h)}{h}$$

의 값은?

① 10 ② 5 ③ -10
④ -5 ⑤ -2

10. 함수 $f(x) = \lim_{h\to 0}\dfrac{x\cos(x+h) - x\cos x}{h}$ 에 대하여 $f'\left(\dfrac{\pi}{2}\right)$의 값은?

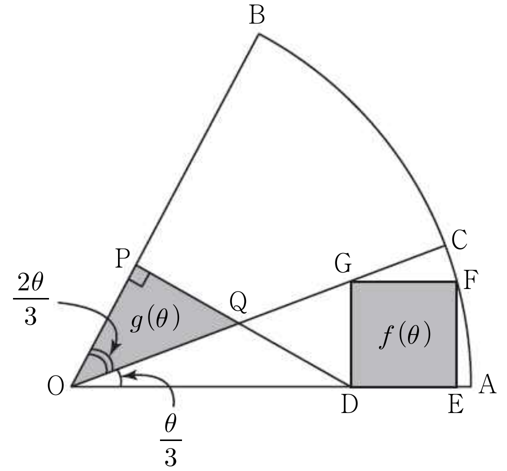
① -2 ② -1 ③ 0
④ 1 ⑤ 2

11. $f(x) = 2^x\cos x$일 때, $f'(0)$의 값은?

① $\ln\dfrac{1}{4}$ ② $\ln\dfrac{1}{2}$ ③ 0
④ 1 ⑤ $\ln 2$

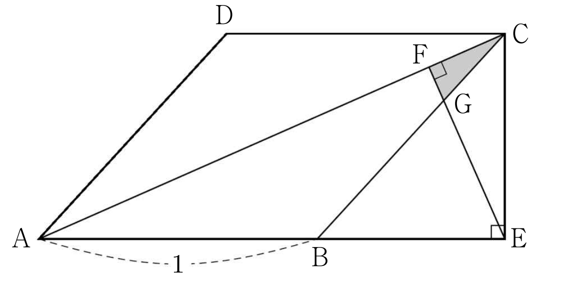
12. 그림과 같이 반지름의 길이가 1이고 중심각의 크기가 θ인 부채꼴 OAB에서 호 AB의 삼등분점 중 점 A에 가까운 점을 C라 하자. 변 DE가 선분 OA 위에 있고, 꼭짓점 G, F가 각각 선분 OC, 호 AC 위에 있는 정사각형 DEFG의 넓이를 $f(\theta)$라 하자. 점 D에서 선분 OB에 내린 수선의 발을 P, 선분 DP와 선분 OC가 만나는 점을 Q라 할 때, 삼각형 OQP의 넓이를 $g(\theta)$라 하자.

$\lim_{\theta \to 0+} \frac{f(\theta)}{\theta \times g(\theta)} = k$일 때, $60k$의 값을 구하시오. $\left(단, 0 < \theta < \frac{\pi}{2}\right.$이고, $\left.\overline{OD} < \overline{OE}\text{이다.}\right)$



13. 그림과 같이 한 변의 길이가 1인 마름모 ABCD가 있다. 점 C에서 선분 AB의 연장선에 내린 수선의 발을 E, 점 E에서 선분 AC에 내린 수선의 발을 F, 선분 EF와 선분 BC의 교점을 G라 하자. $\angle DAB = \theta$일 때, 삼각형 CFG의 넓이를 $S(\theta)$라 하자. $\lim_{\theta \to 0+} \frac{S(\theta)}{\theta^5}$의 값은?

$\left(단, 0 < \theta < \frac{\pi}{2}\right)$



① $\frac{1}{24}$ ② $\frac{1}{20}$ ③ $\frac{1}{16}$
④ $\frac{1}{12}$ ⑤ $\frac{1}{8}$

정답 및 해설

<1. 수열의 극한>

1. ②

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a}{\sqrt{n^2+n}-bn}=\lim_{n\to\infty}\frac{a\left(\sqrt{n^2+n}+bn\right)}{(1-b^2)n^2+n}$$

$b^2=1,\ b=1\,(\because b>0)$이고, $2a=4,\ a=2$이다.

$\therefore a+b=3$

2. ②

$$2+6+10+\cdots+(4n-2)=\sum_{k=1}^{n}(4k-2)=\frac{4n(n+1)}{2}-2n=2n^2$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{2+6+10+\cdots+(4n-2)}{n^2+5}=2$$

3. ①

$\left(\sqrt{n^2+6n+3}\right)^2-\left(\sqrt{n^2+4n+4}\right)^2=2n-1>0$이고,

$\left(\sqrt{n^2+6n+3}\right)^2-\left(\sqrt{n^2+6n+9}\right)^2<0$이므로

$n+2<\sqrt{n^2+6n+3}<n+3$이고, 따라서

$a_n=\sqrt{n^2+6n+3}-(n+2)$이다.

$$\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+6n+3}-n-2\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{2n-1}{\sqrt{n^2+6n+3}+n+2}=1$$이다.

4. ⑤

$(2n+1)a_n=c_n,\ (4n^2+3)b_n=d_n$이라고 하면

$\lim_{n\to\infty}c_n=3,\ \lim_{n\to\infty}d_n=6$이다.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(3n-2)a_n}{(n^2+n)b_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\frac{3n-2}{2n+1}\right)c_n}{\left(\frac{n^2+n}{4n^2+3}\right)d_n}=\frac{\frac{3}{2}}{\frac{1}{4}}\times\frac{1}{2}=3$$

5. ①

$a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n=S_n$이라고 하자.

$n<a_n<n+1$이므로 $\sum_{k=1}^{n}k<S_n<\sum_{k=1}^{n}(k+1)$이다.

$$\therefore \frac{n(n+1)}{2}<S_n<\frac{n^2+3n}{2}$$

구하고자 하는 값

$$\lim_{n\to\infty}\frac{S_n}{n^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{n^2+n}{2}}{n^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{n^2+3n}{2}}{n^2}=\frac{1}{2}$$ 이다.

6. ①

ⅰ) $x^2-5x+6=0$

$x=2,\ x=3$일 때 주어진 수열의 모든 항이 0이므로 주어진 등비수열이 수렴한다.

ⅱ) $-1<2x^2-4x-5\le 1$

$-1\le x<1-\sqrt{3},\ 1+\sqrt{3}<x\le 3$일 때 주어진 등비수열의 공비가 -1보다 크고 1이하이므로 주어진 등비수열이 수렴한다.

따라서 모든 정수 x의 값의 합은 $(-1)+2+3=4$

7. ②

수열 $\{a_n\}$이 수렴하므로

$$\lim_{n\to\infty}\frac{4\cdot 4^n+3^na_n}{3^{n+1}-4^n\cdot a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{4+\left(\frac{3}{4}\right)^na_n}{3\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^n-a_n}=-\lim_{n\to\infty}\frac{4}{a_n}=2$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty}a_n=-2$$

8. ②

$42^n=2^n\times 3^n\times 7^n$

$f(n)$

$=\left(1+2+2^2+\cdots+2^n\right)\left(1+3+3^2+\cdots+3^n\right)\left(1+7+7^2+\cdots+7^n\right)$

$$=\frac{2^{n+1}-1}{2-1}\times\frac{3^{n+1}-1}{3-1}\times\frac{7^{n+1}-1}{7-1}$$

$$=\frac{(2^{n+1}-1)(3^{n+1}-1)(7^{n+1}-1)}{12}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{f(n)}{42^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{(2^{n+1}-1)(3^{n+1}-1)(7^{n+1}-1)}{12\cdot 2^n\cdot 3^n\cdot 7^n}$$

$$=\frac{2\times3\times7}{12}=\frac{7}{2}$$

9. 3

$-1<x<1,\ f(x)=ax+b$

$1<x,\ f(x)=x^2$

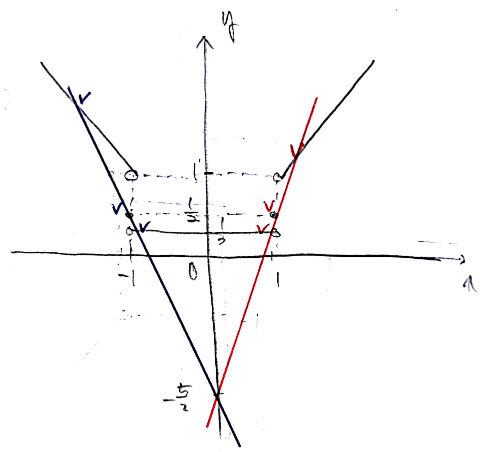
연속이어야 하므로 $a+b=1$

미분계수가 존재해야 하므로 $2=a$

$\therefore b=-1$

10. 6

$$f(x)=\begin{cases}|x| & (|x|>1)\\ \frac{1}{3} & (|x|<1)\\ \frac{1}{2} & (|x|=1)\end{cases}$$



$f(x)$와 $y=ax-\dfrac{5}{2}$와 서로 다른 세 점에서 만나기 위해서는

$y=ax-\dfrac{5}{2}$가 $\left(-1,\ \dfrac{1}{2}\right)$을 지나거나 $\left(1,\ \dfrac{1}{2}\right)$을 지나야 한다.

$\therefore\ a=-3$ or 3

11. ④

$$g(x)=\begin{cases}2 & \left(\left|x-\dfrac{b}{2}\right|>1\right)\\ 1 & \left(\left|x-\dfrac{b}{2}\right|<1\right)\\ \dfrac{3}{2} & \left(\left|x-\dfrac{b}{2}\right|=1\right)\end{cases}$$

이므로 $x=\dfrac{b}{2}\pm1$에서 불연속이다.

즉, 연속인 함수 $f(x)$와 곱해서 연속인 함수를 만들려면

$f\left(\dfrac{b}{2}\pm1\right)=0$이어야 한다.

$\therefore$ 두 근의 합 $b=4$, 곱 $3=-a$

$\therefore\ a+b=-3+4=1$

12. ①

13. ②

ㄱ. 반례) $a_n=\dfrac{1}{n},\ b_n=-\dfrac{1}{n}$

ㄴ. $\dfrac{a_n}{2^n}=b_n$이라고 두자.

$\lim\limits_{n\to\infty}b_n=\lim\limits_{n\to\infty}b_{n+1}=\alpha$이므로

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{2^{n+1}b_{n+1}}{2^n b_n}=2$$

ㄷ. 반례) $a_n=0,\ b_n=1,\ -1,\ 1,\ -1,\ \cdots$

ㄹ. $\lim\limits_{n\to\infty}\left\{a_n\left(1-\dfrac{b_n}{a_n}\right)\right\}=5$이고 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\infty$이므로

$\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\dfrac{b_n}{a_n}\right)=0,\ \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{b_n}{a_n}=1$

14. ③

A그릇에 들어 있는 물의 양을 a_n

B그릇에 들어 있는 물의 양을 b_n이라 하면

$$a_{n+1}=\frac{1}{2}a_n+\frac{1}{4}a_n+\frac{1}{2}b_n=\frac{3}{4}a_n+\frac{1}{2}b_n$$

$$b_{n+1}=\frac{1}{4}a_n+\frac{1}{2}b_n$$

$a_n+b_n=1,\ b_n=1-a_n$ 대입

$$\lim_{n\to\infty}a_n=\frac{2}{3}$$

15. ④

점 B는 직선 $y=-2^n(x-4^n)+2^n$의 x축과의 교점이므로

$B(4^n+1,\ 0)$이다.

점 C가 선분 OB의 중점이므로 $C\left(\dfrac{4^n+1}{2},\ 0\right)$이다.

점 M이 선분 AC의 2 : 1내분점이므로 $M\left(\dfrac{2\cdot4^n+1}{3},\ \dfrac{2^n}{3}\right)$이다.

따라서 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_n+{y_n}^2}{x_n-{y_n}^2}=\dfrac{\dfrac{2\cdot4^n+1}{3}+\dfrac{4^n}{9}}{\dfrac{2\cdot4^n+1}{3}-\dfrac{4^n}{9}}=\dfrac{7}{5}$

16. ③

$\angle B_nA_nD_n=\angle A_nC_nD_n$이므로

$\triangle A_nB_nD_n \backsim \triangle A_nC_nD_n$이다.

$\therefore\ \overline{B_nD_n}:\overline{A_nD_n}=\overline{A_nD_n}:\overline{C_nD_n}$에서

$\left(\overline{A_nD_n}\right)^2=\overline{B_nD_n}\times\overline{C_nD_n}=2n(2n+1)$

$\therefore\ \overline{A_nD_n}=\sqrt{2n(2n+1)}$ ($\because$ n은 자연수)

$\therefore\ \lim\limits_{n\to\infty}\left(\overline{A_nD_n}-(2n-1)\right)$

$=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{2n(2n+1)}-(2n-1)$

$=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{6n-1}{\sqrt{2n(2n+1)}+(2n-1)}$

$=\dfrac{6}{2+2}=\dfrac{6}{4}=\dfrac{3}{2}$

17. ③

i) $nf(a)\ge-1\ \rightarrow\ \dfrac{2f(a)}{2}=1\ \rightarrow$ 3개

ii) $nf(a)<-1\ \rightarrow\ \times$

18. 9

$\lim\limits_{n\to\infty}a_n\left(1-\dfrac{2b_n}{a_n}\right)=3$이고 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\infty$이므로

$\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\dfrac{2b_n}{a_n}\right)=0,\ \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{b_n}{a_n}=\dfrac{1}{2}$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{(a_n)^2}{2b_n}-\frac{(2b_n)^2}{a_n}\right)$$
$$=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{(a_n)^3-(2b_n)^3}{2a_nb_n}\right)$$
$$=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{(a_n-2b_n)(a_n{}^2+2a_nb_n+4b_n{}^2)}{2a_nb_n}\right)$$
$$=\lim_{n\to\infty}(a_n-2b_n)\times\lim_{n\to\infty}\left(\frac{a_n}{2b_n}+1+\frac{2b_n}{a_n}\right)$$
$$=9$$

19. ③

$a_{n+2}=a_n+a_{n+1}$의 양변을 a_{n+1}로 나누면

$$\frac{a_{n+2}}{a_{n+1}}=\frac{a_n}{a_{n+1}}+1$$

$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=\alpha$라 하면 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_{n+2}}{a_{n+1}}=\alpha$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+2}}{a_{n+1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{a_{n+1}}+1$$
$$\alpha=\frac{1}{\alpha}+1\ (\alpha>1)$$
$$\alpha^2-\alpha-1=0$$
$$\therefore\ \alpha=\frac{1+\sqrt{5}}{2}\ (\alpha>1)$$
$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+2}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+2}}{a_{n+1}}\times\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}$$
$$=\alpha^2$$
$$=\frac{6+2\sqrt{5}}{4}$$
$$=\frac{3+\sqrt{5}}{2}$$

20. ④

(i) $|f(x)|<1$일 때 $g(x)=1$

(ii) $|f(x)|=1$일 때 $g(x)=\dfrac{1}{2}$

(iii) $|f(x)|>1$일 때 $g(x)=0$

따라서 함수 $y=g(x)$는

$f(x)=1$ 또는 $f(x)=-1$일 때 불연속이다.

$f(x)=1$인 x는 1개, $f(x)=-1$인 x는 3개이므로

실수전체의 집합에서 불연속인 x는 4개다.

21. ③

$$\sum_{n=1}^{\infty}na_n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+2)}$$
$$=\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+2}\right)$$
$$=\frac{1}{2}\times\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{1}+\frac{1}{2}-\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right)=\frac{3}{4}$$

22. ①

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{2n}{(n+1)^2(n-1)^2}$$
$$=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{2n}{4n}\left\{\frac{1}{(n-1)^2}-\frac{1}{(n+1)^2}\right\}=\frac{1}{2}\times\left(\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}\right)=\frac{5}{8}$$

23. ①

$\square=a$라고 하자.

$$\log_a\left(1-\frac{1}{3^2}\right)+\log_a\left(1-\frac{1}{4^2}\right)+\log_a\left(1-\frac{1}{5^2}\right)+\cdots$$
$$=\lim_{n\to\infty}\log_a\left(\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{4}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{6}{5}\cdot\cdots\cdot\frac{n-1}{n}\cdot\frac{n+1}{n}\right)$$
$$=\lim_{n\to\infty}\left(\log_a\frac{2n+2}{3n}\right)=\log_a\frac{2}{3}=1$$

이므로 $a=\dfrac{2}{3}$이다.

24. ⑤

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{a_{n+1}}-\sqrt{a_n}}{\sqrt{a_na_{n+1}}}$$
$$=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{a_n}}-\frac{1}{\sqrt{a_{n+1}}}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{a_1}}-\frac{1}{\sqrt{a_n}}\right)$$

그런데 수열 $\{a_n\}$이 공비가 $\dfrac{3}{2}$인 등비수열이므로

$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{\sqrt{a_n}}=0$이다.

따라서 $\dfrac{1}{\sqrt{a_1}}=\dfrac{1}{4},\ a_1=16$

$$a_4=16\times\left(\frac{3}{2}\right)^3=54$$

25. ②

$\left(\dfrac{2a-3}{5}\right)^n$의 공비가 $\dfrac{2a-3}{5}$이므로 $-1<\dfrac{2a-3}{5}<1$이면

주어진 등비급수가 수렴한다.

$\therefore\ -1<a<4$이므로 모든 정수 a의 값의 합은 6이다.

26. ①

$$b_n=\frac{3\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}}{1-\frac{1}{2}}=6\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$
$$\sum_{n=1}^{\infty}b_n=\frac{6}{1-\frac{1}{2}}=12$$

27. ②

$$\alpha+\beta=-\frac{1}{2},\ \alpha\beta=-\frac{1}{6}$$

$$\frac{1}{\beta-\alpha}\sum_{n=1}^{\infty}(\beta^{n-1}-\alpha^{n-1})$$
$$=\frac{1}{\beta-\alpha}\sum_{n=1}^{\infty}\beta^{n-1}-\frac{1}{\beta-\alpha}\sum_{n=1}^{\infty}\alpha^{n-1}$$
$$=\frac{1}{\beta-\alpha}\left(\frac{1}{1-\beta}-\frac{1}{1-\alpha}\right)$$
$$=\frac{1}{\beta-\alpha}\cdot\left(\frac{\beta-\alpha}{(1-\beta)(1-\alpha)}\right)$$
$$=\frac{1}{\alpha\beta-(\alpha+\beta)+1}=\frac{3}{4}$$

28. ⑤

$a_n=\begin{cases}9\ (n=2k-1)\\1\ (n=2k)\end{cases}$ (단, k는 자연수)

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{10^n}=\frac{9}{10}+\frac{1}{10^2}+\frac{9}{10^3}+\frac{1}{10^4}+\cdots$$
$$=\frac{\frac{9}{10}}{1-\frac{1}{100}}+\frac{\frac{1}{100}}{1-\frac{1}{100}}=\frac{91}{99}$$

따라서 $q-p=8$

29. ④

$\lim_{n\to\infty}(na_n-3)=0$

$\lim_{n\to\infty}na_n=3$

(주어진 식)$=\lim_{n\to\infty}\dfrac{2-\frac{1}{n}+3na_n}{1+\frac{1}{n}}$

$$=\frac{2-0+3\times3}{1+0}=11$$

30. ②

ㄱ, ㄴ

31. 1

$$\sum_{n=1}^{\infty}n(a_n-a_{n+1})$$
$$=\lim_{n\to\infty}(a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n-na_{n+1})$$
$$=\sum_{n=1}^{\infty}a_n-\lim_{n\to\infty}na_n=1$$

32. ④

ㄱ. 반례) $a_n=\dfrac{1-(-1)^n}{2}$, $b_n=\dfrac{1-(-1)^{n+1}}{2}$ 이면

수열 $\{a_nb_n\}$은 0으로 수렴하지만 각각의 수열은 수렴하지 않는다.

ㄴ. $\dfrac{b_n}{a_n}=c_n$이라고 하자.

$\lim_{n\to\infty}c_n=2$이므로 $\lim_{n\to\infty}b_n=\alpha$라고 하면

$\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\dfrac{b_n}{c_n}=\dfrac{\alpha}{2}$이므로 수열 $\{a_n\}$이 수렴한다.

ㄷ. <참>

33. ③

$a_1=3,\ a_2=5,\ a_3=7,\ \cdots,\ a_n=2n+1$이므로

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a_na_{n+1}}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)(2n+3)}$$
$$=\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2n+1}-\frac{1}{2n+3}\right)=\frac{1}{6}$$

34. ①

$n\geq3$ 에서

$(-3)^{\frac{n-1}{n}}=(-3)\cdot\dfrac{1}{\sqrt[n]{-3}}$ 이 실수이므로

$n=2k+1$ 일 때, $a_n=1$

$n=2k+2$ 일 때, $a_n=0$ (단, k 는 자연수)

$$\therefore\ \sum_{n=3}^{\infty}\frac{a_n}{2^n}=\frac{\frac{1}{8}}{1-\frac{1}{4}}=\frac{1}{6}$$

35. ①

$3^n\cdot5^{n+1}$ 의 모든 양의 약수의 개수는 $a_n=(n+1)(n+2)$ 이다.

따라서

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a_n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)(n+2)}$$
$$=\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right\}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left\{\frac{1}{k+1}-\frac{1}{k+2}\right\}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\left\{\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right)\right\}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\left\{\frac{1}{2}-\frac{1}{n+2}\right\}$$
$$=\frac{1}{2}$$

36. 24

$S_1=9\pi-2\times\left(\dfrac{3}{\sqrt{2}}\right)^2=9\pi-9$

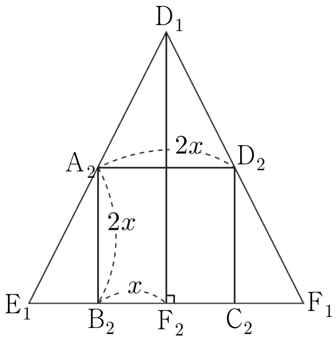
길이비$=3\sqrt{2}:\dfrac{3}{2}$

넓이비$=18:\dfrac{9}{4}=8:1$

공비$=\frac{1}{4}$

$\lim_{n\to\infty}S_n=\dfrac{9\pi-9}{1-\frac{1}{4}}=\frac{4}{3}(9\pi-9)=12\pi-12$

37. 541



공비 r에 대한 부연설명

$\overline{A_2D_2}=2x$ 라고 하면

$\overline{E_1F_2}=\sqrt{2}$, $\overline{D_1E_1}=2\sqrt{5}$ 이므로 $\triangle A_2E_1B_2$에서

$\overline{E_1B_2}:\overline{A_2B_2}=\sqrt{2}-x:2x=1:3$에서

$2x=3\sqrt{2}-3x$

$5x=3\sqrt{2}$

$x=\frac{3}{5}\sqrt{2}$

$2x=\frac{6}{5}\sqrt{2}$ 이다.

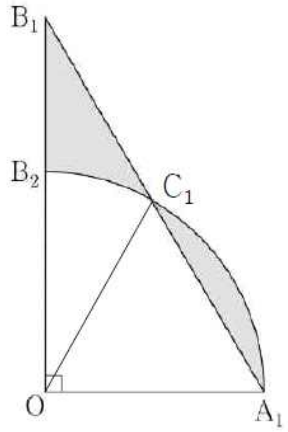
$(4)^2:\left(\frac{6}{5}\sqrt{2}\right)^2=16:\frac{72}{25}=2:\frac{9}{25}=50:9$에서

$r=\frac{9}{50}$ 이다.

$S=\frac{a}{1-r}$ 에서 $a=10,\ r=\frac{9}{50}$ 이므로 $S=\dfrac{10}{1-\frac{9}{50}}=\frac{500}{41}$

38. ④

그림 R_1에서 부채꼴 OA_1B_2의 호 A_1B_2와 선분 A_1B_1이 만나는 점을 C_1이라 하자.



$\angle C_1OA_1=60^\circ$ 이므로

부채꼴 C_1OA_1의 넓이와 삼각형 C_1OA_1의 넓이의 차는

$16\pi\times\frac{1}{6}-\frac{\sqrt{3}}{4}\times16=\frac{8}{3}\pi-4\sqrt{3}$ $\cdots$ ㉠

또, $\angle C_1OB_1=30^\circ$ 이므로

삼각형 C_1OB_1의 넓이와 부채꼴 C_1OB_1의 넓이의 차는

$\frac{1}{2}\times4\sqrt{3}\times2-16\pi\times\frac{1}{12}=4\sqrt{3}-\frac{4}{3}\pi$ $\cdots$ ㉡

㉠, ㉡에서

$S_1=\left(\frac{8}{3}\pi-4\sqrt{3}\right)+\left(4\sqrt{3}-\frac{4}{3}\pi\right)=\frac{4}{3}\pi$

한편, 삼각형 OA_1B_1과 삼각형 OA_2B_2의 닮은비는

$\overline{OB_1}:\overline{OB_2}=4\sqrt{3}:4=\sqrt{3}:1$

따라서 $\lim_{n\to\infty}S_n$은 첫째항이 $\frac{4}{3}\pi$이고 공비가 $\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2=\frac{1}{3}$ 인 등비급수이므로

$\lim_{n\to\infty}S_n=\dfrac{\frac{4}{3}\pi}{1-\frac{1}{3}}=2\pi$

39. ⑤

$\lim_{x\to0+}\dfrac{\log_2x+4^x}{\log_4x+2^x}=\dfrac{\frac{\log x+\log2\cdot4^x}{\log2}}{\frac{\log x+2\log2\cdot2^x}{2\log2}}=\dfrac{2(\log x+\log2\cdot4^x)}{\log x+2\log2\cdot2^x}$

$\lim_{x\to0+}2^x=1,\ \lim_{x\to0+}4^x=1$이고

$\lim_{x\to0+}\log x=-\infty$ 이므로

정답은 2

40. ②

ㄴ. $\lim_{x\to0+}\log_2 2x=-\infty$

ㄹ. $t=\frac{1}{x}$ 라고 하면

$x\to0-$일 때 $t\to-\infty$

$$\lim_{t\to-\infty}\frac{1-3^t}{1+3^t}$$

$a=-t$라고 하면 $a\to\infty$

$$\lim_{a\to\infty}\frac{1-3^{-a}}{1+3^{-a}}=\lim_{a\to\infty}\frac{\frac{3^a-1}{3^a}}{\frac{3^a+1}{3^a}}=1$$

41. ⑤

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{4^n}\left\{\left(\frac{n+1}{n}\right)\left(\frac{n+2}{n+1}\right)\cdots\left(\frac{2n+1}{2n}\right)\right\}^{2n}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{2n}\left(\frac{2n+1}{n}\right)^{2n}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+\frac{1}{2}}{n}\right)^{2n}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2n}\right)^{2n}=e$$

42. ④

$$(\text{준 식})=\lim_{n\to\infty}\left\{\left(1+\frac{2n+1}{n^2}\right)^{\frac{n^2}{2n+1}}\right\}^{\frac{(2n+1)2n}{n^2}}=e^4$$

43. ②

$$(\text{준식})=\lim_{x\to\infty}\left\{\left(1-\frac{2a}{x+a}\right)^{-\frac{x+a}{2a}}\right\}^{-\frac{2ax}{x+a}}$$

$$=e^{-2a}=e^2$$

$\therefore a=-1$

44. ④

$$P=\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^n=\lim_{n\to\infty}\left\{\left(1-\frac{1}{n}\right)^{-n}\right\}^{-1}=\frac{1}{e}$$

$$Q=\lim_{x\to1}\{1-f(x)\}^{\frac{1}{f(x)}}=\lim_{f(x)\to0}\{1-f(x)\}^{\frac{1}{f(x)}}=\frac{1}{e}$$

$$\therefore P+Q=\frac{2}{e}$$

45. ④

$$f(n)=\lim_{x\to0}\{1+n\cdot2^{n-1}\cdot x\}^{\frac{1}{n\cdot2^{n-1}x}\cdot n\cdot2^{n-1}}$$

$$=e^{n\cdot2^{n-1}}$$

$\sum_{n=1}^{20}\ln f(n)=\sum_{n=1}^{20}n\cdot2^{n-1}=S$라고 하자.

$$2S-S=20\cdot2^{20}-\left(1+2+2^2+\cdots+2^{19}\right)$$

$$=19\cdot2^{20}+1$$

$\therefore a=19$

46. ③

$\frac{1}{x}=t$라고 하면

$$\lim_{t\to0}\frac{1}{t^2}\ln(a+bt^c)=2$$

분모 $\to0$이므로 분자 $\to0$이어야한다.

$\therefore a=1$

극한 값이 존재하므로$c=2$

$$\lim_{t\to0}\frac{\ln(1+bt^2)}{t^2}=b=2$$

$\therefore a+b-c=1+2-2=0$

47. ②

분자가 0으로 가므로 분모도 0으로 가야 한다.

$\therefore b=1$

$$\lim_{x\to0}\frac{\ln(1+x)}{\sqrt{ax+1}-1}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{x\left(\sqrt{ax+1}+1\right)}{\left(\sqrt{ax+1}-1\right)\left(\sqrt{ax+1}+1\right)}\times\frac{\ln(1+x)}{x}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{ax+1}+1}{a}\times\frac{\ln(1+x)}{x}$$

$$=\frac{2}{a}=1$$

$\therefore a=2$

48. ③

$\lim_{x\to0}\frac{\ln(a+2x)}{x^2+x}$ 의 값이 존재하므로 $a=1$

$$\lim_{x\to0}\frac{\ln(1+2x)}{x(x+1)}=2$$

$\therefore a+b=3$

49. ②

$$f(n)=\sum_{k=0}^{n}\{\ln(n+k+1)-\ln(n+k)\}$$

$$=\{\ln(n+1)-\ln n+\ln(n+2)-\ln(n+1)+\cdots+\ln(2n+1)-\ln 2n\}$$

$$=\ln(2n+1)-\ln n=\ln\left(\frac{2n+1}{n}\right)$$

$$\lim_{n\to\infty}n\times\left\{\ln\left(\frac{2n+1}{n}\right)-\ln2\right\}=\frac{1}{2}$$

50. ①

구간 $(-1,\ \infty)$에서 $g(x)$는 $x=0$이 아닌 모든 곳에서 연속이고 $f(x)$는 실수 전체에서 연속이다.

따라서 $f(x)g(x)$가 구간 $(-1,\ \infty)$에서 연속이려면 $x=0$에서 연속이기만 하면 된다.

$f(x)=x^2+ax+b$라 하면 $f(0)g(0)=8b$이고

$\lim_{x\to 0} f(x)g(x) = \lim_{x\to 0}\frac{x^2+ax+b}{\ln(x+1)}$ 이므로

$\lim_{x\to 0}\frac{x^2+ax+b}{\ln(x+1)} = 8b$이어야 한다.

$\lim_{x\to 0}\ln(x+1) = 0$이므로 $\lim_{x\to 0}(x^2+ax+b) = 0$

$\therefore\ b=0$

$\lim_{x\to 0}\frac{x^2+ax}{\ln(x+1)} = 0$이므로 $\lim_{x\to 0}\left(\frac{x}{\ln(x+1)}\times(x+a)\right) = 0$

$\therefore\ a=0$

따라서 $f(x)=x^2$이고 $f(3)=9$

51. ①

$x>0$일 때 $\frac{\ln(1+4x)}{4x} < \frac{f(x)}{x} < \frac{e^x-1}{x}$

$\lim_{x\to 0+}\frac{\ln(1+4x)}{4x} = \lim_{x\to 0+}\frac{e^x-1}{x} = 1$이므로 $\lim_{x\to 0+}\frac{f(x)}{x} = 1$

$x<0$일 때 $\frac{e^x-1}{x} < \frac{f(x)}{x} < \frac{\ln(1+4x)}{4x}$

$\lim_{x\to 0-}\frac{e^x-1}{x} = \lim_{x\to 0-}\frac{\ln(1+4x)}{4x} = 1$이므로 $\lim_{x\to 0-}\frac{f(x)}{x} = 1$

$\therefore \lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x} = 1$

52. ③

함수 $f(x)$가 모든 실수에서 연속이므로 $x=0$에서도 연속이다.

$\lim_{x\to 0}\frac{e^{-2x}+1-ae^{-x}}{x^2}$ 의 값이 존재하므로 $a=2$

$b = \lim_{x\to 0}\frac{(e^{-x}-1)^2}{x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{(e^{-x}-1)^2}{(-x)(-x)} = 1$

$\therefore a+b=3$

53. ①

$\lim_{x\to 0}\ln(1+x) = 0$이고 $\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{1-e^{ax+b}}$ 의 값이 존재하므로

$\lim_{x\to 0}(1-e^{ax+b}) = 0$

$\therefore b=0$

$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{1-e^{ax+b}} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{\ln(1+x)}{x}}{\frac{1-e^{ax+b}}{x}} = -\frac{1}{a} = \frac{1}{5}$

$\therefore a=-5,\ a+b=-5$

54. ④

$\frac{\ln a}{\ln b} > 1$이고 $0<a<1,\ 0<b<1$이므로

$0<a<b<1$

ㄱ. $\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{a}{x}\right)^{bx} = \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{a}{x}\right)^{\frac{x}{a}\cdot ab} = e^{ab}$

$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{b}{x}\right)^{ax} = \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{b}{x}\right)^{\frac{x}{b}\cdot ab} = e^{ab}$

ㄴ. $\lim_{x\to 0}\frac{ax}{e^{bx}-1} = \frac{a}{b}$, $\lim_{x\to 0}\frac{bx}{e^{ax}-1} = \frac{b}{a}$

$0<\frac{a}{b}<1<\frac{b}{a}$ 이므로 참이다.

ㄷ. $\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+ax)}{bx} = \frac{a}{b}$, $\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+bx)}{ax} = \frac{b}{a}$

참이다.

55. $\frac{2}{e}$

$\lim_{x\to 2}\frac{e^x f(x)-4}{x-2}$ 의 값이 존재하므로 $f(2)\cdot e^2=4$

$\therefore f(2) = \frac{4}{e^2}$

$\lim_{x\to 2}\frac{e^x f(x)-4}{x-2} = e^2(f(2)+f'(2)) = 2e$

$\therefore f'(2) = \frac{2e-4}{e^2}$

$f(2)+f'(2) = \frac{2e}{e^2} = \frac{2}{e}$

56. ④

$f'(x) = 2e^{2x}+\frac{3}{x}$

$f'(3) = 2e^6+1$

57. ⑤

$4f'(1) = 8e$

58. 32

$\lim_{h\to 0}\frac{f(2+h)-f(2-3h)}{h} = 4f'(2)$

$f'(x) = \ln 2\times 2^{x+1}$

$\therefore\ 4f'(2) = 4\cdot\ln 2\cdot 2^3 = 32\cdot\ln 2$

$\frac{k}{\ln 2} = \frac{32\ln 2}{\ln 2} = 32$

59. ③

ㄱ. $1<a<b$이고 $x>1$이면 $1<a^x<b^x$이고

$0<\log_b x<\log_a x$이므로

$a^x+\log_b x < b^x+\log_a x$

$f(x) = \frac{b^x+\log_a x}{a^x+\log_b x} > 1$ <참>

ㄴ. $b<a<1$이면 $\lim_{x\to\infty}a^x=\lim_{x\to\infty}b^x=0$이고

$\lim_{x\to\infty}\log_a x=\lim_{x\to\infty}\log_b x=-\infty$이므로

$$\lim_{x\to\infty}f(x)=\lim_{x\to\infty}\frac{b^x+\log_a x}{a^x+\log_b x}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{b^x}{\log_b x}+\frac{\log_a x}{\log_b x}}{\frac{a^x}{\log_b x}+1}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{b^x}{\log_b x}+\frac{\frac{\log_b x}{\log_b a}}{\log_b x}}{\frac{a^x}{\log_b x}+1}=\frac{1}{\log_b a}=\log_a b$$

<거짓>

ㄷ. $\lim_{x\to0+}a^x=\lim_{x\to0+}b^x=1$ 이고 $x\to0+$일 때, $\log_a x$, $\log_b x$는 ∞ 또는 $-\infty$로 발산하므로 ㄴ과 같은 방법으로 계산하면

$$\lim_{x\to0+}f(x)=\lim_{x\to0+}\frac{b^x+\log_a x}{a^x+\log_b x}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{b^x}{\log_b x}+\frac{\frac{\log_b x}{\log_b a}}{\log_b x}}{\frac{a^x}{\log_b x}+1}=\log_a b$$ <참>

60. ⑤

$5\cos\theta=-4$, $\cos\theta=-\frac{4}{5}$

$5\sin\theta=3$, $\sin\theta=\frac{3}{5}$

$\csc\theta-\sec\theta=\frac{5}{2}+\frac{5}{4}=\frac{35}{12}$

61. ④

$$\frac{2}{\frac{1}{\sin\theta}-\frac{\cos\theta}{\sin\theta}}+\frac{2}{\frac{1}{\sin\theta}+\frac{\cos\theta}{\sin\theta}}-\frac{1}{\sin\theta}$$

$$=\frac{2\sin\theta}{1-\cos\theta}+\frac{2\sin\theta}{1+\cos\theta}-\frac{1}{\sin\theta}$$

$$=\frac{4\sin\theta}{\sin^2\theta}-\frac{1}{\sin\theta}=3\csc\theta$$

62. ①

(준 식)

$$=\frac{-2\cos\theta}{\cos^3\theta}+\frac{\sin\theta\cdot\tan^2\theta}{\sin\theta}+\left(\frac{-\sin\theta}{1-\sin\theta}\right)\times\left(\frac{-\sin\theta}{1-\sin\theta}\right)$$

$$=-\frac{2}{\cos^2\theta}+\tan^2\theta+\tan^2\theta=2\left(\tan^2\theta-\sec^2\theta\right)=-2$$

63. ③

$\sin\theta+\cos\theta=\sqrt{2}$의 양변을 제곱하면 $\sin\theta\cos\theta=\frac{1}{2}$

$\csc^2\theta+\sec^2\theta=\frac{1}{\sin^2\theta\cos^2\theta}=4$

64. ④

삼각형 ABC는 $\overline{AB}=\overline{AC}$인 이등변삼각형이므로

$\angle A=\alpha$, $\angle B=\beta$, $\angle C=\beta$이다.

따라서 $\alpha+2\beta=\pi$이고 $\beta=\frac{\pi}{2}-\frac{\alpha}{2}$이다.

$$\tan(\alpha+\beta)=\tan\left\{\alpha+\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\alpha}{2}\right)\right\}$$

$$=\tan\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\alpha}{2}\right)$$

$$=-\frac{1}{\tan\left(\frac{\alpha}{2}\right)}=-\frac{3}{2}$$

$\therefore\ \tan\left(\frac{\alpha}{2}\right)=\frac{2}{3}$

$$\tan\alpha=\tan\left(2\times\frac{\alpha}{2}\right)$$

$$=\frac{2\tan\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{1-\tan^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)}=\frac{2\cdot\frac{2}{3}}{1-\left(\frac{2}{3}\right)^2}=\frac{12}{5}$$

65. ②

$\cos\alpha=\frac{4}{5}$, $\sin\beta=\frac{2\sqrt{5}}{5}$ 이므로

$$\sin(\beta-\alpha)=\sin\beta\cos\alpha-\cos\beta\sin\alpha$$

$$=\left(\frac{2\sqrt{5}}{5}\times\frac{4}{5}\right)-\left(\frac{\sqrt{5}}{5}\times\frac{3}{5}\right)$$

$$=\frac{\sqrt{5}}{5}$$

66. ①

주어진 식을 덧셈 정리를 이용하여 정리하면

$$\frac{\tan\alpha+\tan\frac{\pi}{4}}{1-\tan\alpha\tan\frac{\pi}{4}}=\frac{\tan\alpha+1}{1-\tan\alpha}=2$$

$1+\tan\alpha=2(1-\tan\alpha)$

$1+\tan\alpha=2-2\tan\alpha$

$3\tan\alpha=1$

$\therefore\tan\alpha=\frac{1}{3}$

67. ②

$0<\alpha<\beta<\frac{\pi}{2}$이므로

$0<\alpha+\beta<\pi$, $0<\beta-\alpha<\dfrac{\pi}{2}$ 이다.

$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta=-\dfrac{1}{2}$ 이고

$\cos(\beta-\alpha)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ 이므로

$\alpha+\beta=\dfrac{2}{3}\pi,\ \beta-\alpha=\dfrac{\pi}{6}$

$\therefore\ \alpha=\dfrac{\pi}{4},\ \beta=\dfrac{5}{12}\pi$

$\therefore\ \cos(3\alpha+\beta)=\cos\dfrac{7}{6}\pi=-\cos\dfrac{\pi}{6}=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

68. **23**

$\sin\theta-\cos\theta=\dfrac{1}{2}$ 의 양변을 제곱하여 정리하면

$1-2\sin\theta\cos\theta=\dfrac{1}{4},\ 2\sin\theta\cos\theta=\dfrac{3}{4}$ 에서

$\sin 2\theta=\dfrac{3}{4}$ 이므로 $\cos^2 2\theta=1-\sin^2 2\theta=1-\dfrac{9}{16}=\dfrac{7}{16}$

$\therefore\ a+b=23$

69. ②

$\tan x\tan y+2(\tan x+\tan y)=1$

$\dfrac{\tan x+\tan y}{1-\tan x\tan y}=\dfrac{1}{2}$

$\tan(x+y)=\dfrac{1}{2}$

$0<x+y<\dfrac{\pi}{2}$ 이므로 $\cos(x+y)=\dfrac{2}{\sqrt{5}}=\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$

70. ②

$\tan\alpha+\tan\beta=3$

$\tan\alpha\cdot\tan\beta=-\dfrac{1}{2}$

$\tan(\alpha+\beta)=\dfrac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}=2$

71. ③

$2\sin\theta=\sin\left(\theta-\dfrac{\pi}{3}\right)+\sin\left(\theta+\dfrac{\pi}{6}\right)$

$=\dfrac{1}{2}\sin\theta-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\sin\theta+\dfrac{1}{2}\cos\theta$

$\Rightarrow\ (3-\sqrt{3})\sin\theta=(-\sqrt{3}+1)\cos\theta$

$\Rightarrow\ \tan\theta=-\dfrac{1}{\sqrt{3}}$

$\therefore\ \sin\theta=\dfrac{1}{2}\ \rightarrow\ \csc\theta=2$

72. ④

$f(x)=\left(\dfrac{1}{2}\sin x+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cos x\right)\left(\dfrac{1}{2}\cos x+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\sin x\right)$

$f(x)=\sin x\cos x+\dfrac{\sqrt{3}}{4}$

$=\dfrac{1}{2}\sin 2x+\dfrac{\sqrt{3}}{4}$

$\therefore p=\pi,\ f(\pi)=\dfrac{\sqrt{3}}{4}$

73. ①

직선 $x-3y+1=0$의 기울기는 $\dfrac{1}{3}$ 이다.

$\dfrac{\left|\dfrac{1}{3}-m\right|}{1+\dfrac{1}{3}m}=1$

$\dfrac{1}{3}-m=1+\dfrac{1}{3}m,\ \dfrac{4}{3}m=-\dfrac{2}{3},\ m=-\dfrac{1}{2}$

$m-\dfrac{1}{3}=1+\dfrac{1}{3}m,\ \dfrac{2}{3}m=\dfrac{4}{3},\ m=2$

$\therefore\ 2\times\left(-\dfrac{1}{2}\right)=-1$

74. ②

$\overline{\mathrm{BC}}=x,\ \tan\alpha=\dfrac{2}{x},\ \tan\beta=\dfrac{1}{x}$ 라 하면

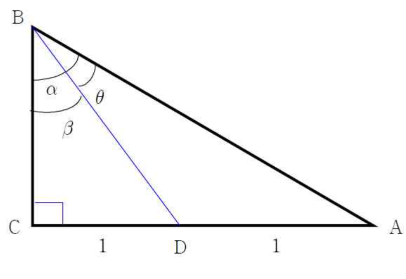
$y=\tan\theta=\tan(\alpha-\beta)=\dfrac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}=\dfrac{\dfrac{2}{x}-\dfrac{1}{x}}{1+\dfrac{2}{x}\cdot\dfrac{1}{x}}$

$=\dfrac{\dfrac{x}{x^2}}{\dfrac{x^2+2}{x^2}}=\dfrac{x}{x^2+2}$

$y'=\dfrac{1\cdot(x^2+2)-x(2x)}{x^2+2}=\dfrac{-(x^2-2)}{x^2+2}=0$

$\therefore\ x=\pm\sqrt{2}$

$x=\sqrt{2}$ 일 때, $y=\tan\theta$가 극대이며 최대



75. ⑤

기울기가 m인 원의 접선의 방정식은

$y=mx\pm\sqrt{m^2+1}$

이 직선이 점 $\mathrm{A}(2,\ 4)$를 지나므로

$2m \pm \sqrt{m^2+1}=4$

$(2m-4)^2=(m^2+1)$

$4m^2-16m+16=m^2+1$

$3m^2-16m+15=0$

이 방정식의 두 근을 $m_1,\ m_2$라 하면

$m_1+m_2=\tan\alpha+\tan\beta=\dfrac{16}{3}$

$m_1 m_2=\tan\alpha\tan\beta=5$

$\tan(\alpha+\beta)=\dfrac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}=\dfrac{\frac{16}{3}}{-4}=-\dfrac{4}{3}$

76. ⑤

$f(x)=3\sin x-2\cos\left(x+\dfrac{5}{6}\pi\right)$

$=3\sin x-2\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cos x-\dfrac{1}{2}\sin x\right)=4\sin x+\sqrt{3}\cos x$

따라서 함수 $f(x)$의 최댓값은 $\sqrt{19}$ 이다.

77. 4

$f(x)=\sqrt{2}\sin(x-\alpha)-1$

$\alpha=\dfrac{\pi}{4}$ 이므로

$f(x)=\sqrt{2}\sin\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)-1$

$x=\dfrac{3\pi}{4}$ 일 때, 최댓값은 $\sqrt{2}-1$이고

$x=0$일 때, 최솟값은 -2이다.

$-2(\sqrt{2}-1)=2-2\sqrt{2}$

$\therefore\ a+b=4$

78. ⑤

$\theta_1+\theta_2=\dfrac{\pi}{3}$ 이므로 $\theta_2=\dfrac{\pi}{3}-\theta_1$

$$\begin{aligned}3\sin\theta_1+2\sin\theta_2&=3\sin\theta_1+2\sin\left(\frac{\pi}{3}-\theta_1\right)\\&=3\sin\theta_1+2\sin\frac{\pi}{3}\cos\theta_1-2\cos\frac{\pi}{3}\sin\theta_1\\&=3\sin\theta_1+\sqrt{3}\cos\theta_1-\sin\theta_1\\&=2\sin\theta_1+\sqrt{3}\cos\theta_1\\&=\sqrt{7}\sin(\theta_1+\alpha)\end{aligned}$$

$\theta_1=\dfrac{\pi}{2}-\alpha$일 때 값이 최대가 된다.

$m=\tan\theta_1=\tan\left(\dfrac{\pi}{2}-\alpha\right)=\cot\alpha=\dfrac{2}{\sqrt{3}}$

79. ③

$\sin x+\cos x=t$라고 하면

$t=\sqrt{2}\sin\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)$이므로

$-\sqrt{2}\le t\le\sqrt{2}$

최댓값은 $t=-\sqrt{2}$ 일 때,

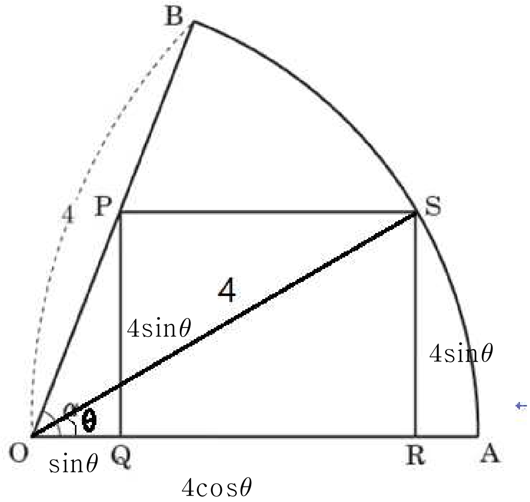
$\dfrac{-\sqrt{2}}{-\sqrt{2}-2}=\sqrt{2}-1$

최솟값은 $t=\sqrt{2}$ 일 때,

$\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}-2}=-\sqrt{2}-1$

$\therefore\ \sqrt{2}-1-\sqrt{2}-1=-2$

80. 10



둘레의 길이는

$8\cos\theta-2\sin\theta+8\sin\theta=8\cos\theta+6\sin\theta$

삼각함수 합성을 이용하면

$\sqrt{100}\sin(\theta+\beta)$

최댓값 10

[다른 풀이]

$\overline{\mathrm{OQ}}=a$라고 하면 $\overline{\mathrm{PQ}}=4a$

$\overline{\mathrm{QR}}=b$라고 하면

$(a+b)^2+(4a)^2=16$

$17a^2+2ab+b^2=16$

$b^2+2ab+17a^2-16=0$에서

$b=-a\pm\sqrt{16-16a^2}$

$b=-a+\sqrt{16-16a^2}\ (\because\ b>0)$

직사각형 PQRS의 둘레의 길이를 $l(a)$라고 하면

$l(a)=8a-2a+2\sqrt{16-16a^2}$

$l'(a)=6+2\times\dfrac{-32a}{2\sqrt{16-16a^2}}=0$

$a=\frac{3}{5}$ 에서 $l(a)$는 극댓값을 가지고 이때가 최대이다.

따라서 $l\left(\frac{3}{5}\right)=10$

81. ②

$x^{\circ}=\frac{x}{180}\pi$

$$\lim_{x\to0}\frac{\sin\frac{x}{180}\pi}{x}=\frac{\pi}{180}$$

82. ③

극한값이 존재하므로 $b=0$

$$\lim_{x\to0}\frac{\sin ax}{\tan x}=a=2 \therefore a+b=2$$

83. ②

$$\lim_{x\to0}\frac{x\ln(1+ax)}{1-\cos2x}=\lim_{x\to0}\frac{x\ln(1+ax)(1+\cos2x)}{\sin^2 2x}=\frac{a}{2}$$

$\therefore a=2$

84. ③

$$\lim_{x\to0}\frac{\sin^2 2x}{\tan mx\cdot\ln(x^n+1)}=2$$

$$\lim_{x\to0}\frac{\frac{\sin^2 2x}{x^2}}{\frac{\tan mx\cdot\ln(x^n+1)}{x^2}}=\frac{4}{m}\times\frac{x}{\ln(x^n+1)}$$

극한값이 존재하므로 $n=1$

$\frac{4}{m}=2$에서 $m=2$

$\therefore m+n=2+1=3$

85. ①

$$f'(0)=\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to0}\frac{2\sin x+x^2\cos\frac{1}{x}}{x}$$

$$=2+0=2$$

86. 4

$$\lim_{x\to0}\frac{(3\cos x+5)(1-\cos x)}{x^2}=\lim_{x\to0}\frac{(3\cos x+5)\sin^2 x}{x^2(1+\cos x)}=4$$

87. ①

$$\lim_{x\to0}\frac{\cos^3 x-1}{x\sin x}=\lim_{x\to0}\frac{(\cos x-1)(\cos^2 x+\cos x+1)}{x\sin x}$$

$$=-\lim_{x\to0}\frac{\sin^2 x(\cos^2 x+\cos x+1)}{x\sin x(1+\cos x)}$$

$$=-\frac{3}{2}$$

88. ④

$$\lim_{x\to0}\frac{\frac{1-\cos x}{\sin x}}{x}=\lim_{x\to0}\frac{1-\cos x}{x\sin x}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{(1-\cos x)(1+\cos x)}{x\sin x(1+\cos x)}=\frac{1}{2}$$

89. ③

$$\lim_{h\to0}\frac{f(\pi+3h)-f(\pi-2h)}{h}=5f'(\pi)$$

$f'(x)=2\cos x-2x\sin x$

$f'(\pi)=-2$

$\therefore 5f'(2)=-10$

90. ②

$$f(x)=x\lim_{h\to0}\left\{\frac{\cos(x+h)-\cos x}{h}\right\}$$

$=x(\cos x)'$

$=-x\sin x$

$f'(x)=-\sin x-x\cos x$

$\therefore f'\left(\frac{\pi}{2}\right)=-1$

91. ⑤

$f'(x)=2^x\ln2\cos x-2^x\sin x$

$f'(0)=\ln2$

92. 20

$\overline{\mathrm{OD}}=x$라 하면

$$f(\theta)=\left(x\tan\frac{\theta}{3}\right)^2$$

$$g(\theta)=\frac{1}{2}(x\cos\theta)^2\tan\frac{2\theta}{3}$$

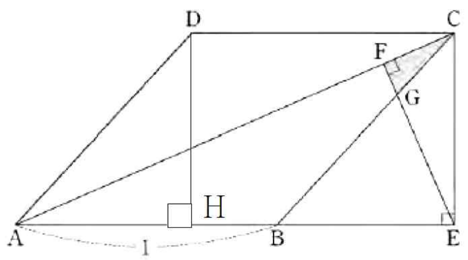
$$\lim_{\theta\to0+}\frac{f(\theta)}{\theta\times g(\theta)}=\lim_{\theta\to0+}\frac{\left(x\tan\frac{\theta}{3}\right)^2}{\frac{1}{2}x^2\cos^2\theta\tan\frac{2\theta}{3}}$$

$$=\frac{\left(\frac{1}{3}\right)^2}{\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}}=\frac{1}{3}=k$$

$\therefore 60k=20$

93. ③

점 D에서 선분 AB에 내린 수선의 발을 H라 하자.



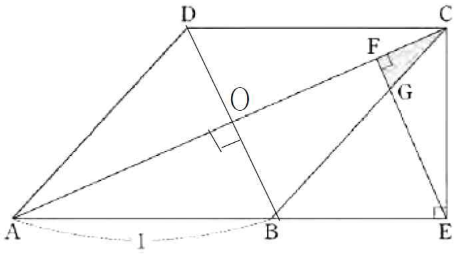
직각삼각형 AHD에서

$\overline{AD}=1$, $\angle DAH=\angle DAB=\theta$이므로

$\overline{DH}=\sin\theta$

이때, $\overline{CE}=\overline{DH}=\sin\theta$

한편, 마름모 ABCD에서 두 선분 AC와 BD의 교점을 O라 하자.



$\overline{AC}\perp\overline{BD}$이므로 $\overline{BO}/\!/\overline{EF}$이다.

이때, $\angle OBA=\angle FEA$이므로

$\angle CEF=\angle BAO=\dfrac{\theta}{2}$

직각삼각형 CEF에서

$\sin\dfrac{\theta}{2}=\dfrac{\overline{CF}}{\overline{CE}}$

$\sin\dfrac{\theta}{2}=\dfrac{\overline{CF}}{\sin\theta}$

$\overline{CF}=\sin\theta\sin\dfrac{\theta}{2}$

삼각형 ABC에서

$\overline{AB}=\overline{BC}$이므로

$\angle BCA=\angle BAC=\dfrac{\theta}{2}$

직각삼각형 CFG에서

$\tan\dfrac{\theta}{2}=\dfrac{\overline{FG}}{\overline{CF}}$이므로

$$\begin{aligned}\overline{FG}&=\overline{CF}\times\tan\frac{\theta}{2}\\&=\sin\theta\sin\frac{\theta}{2}\tan\frac{\theta}{2}\end{aligned}$$

직각삼각형 CFG의 넓이 $S(\theta)$는

$$\begin{aligned}S(\theta)&=\frac{1}{2}\times\overline{CF}\times\overline{FG}\\&=\frac{1}{2}\times\sin\theta\sin\frac{\theta}{2}\times\sin\theta\sin\frac{\theta}{2}\tan\frac{\theta}{2}\\&=\frac{1}{2}\times\sin^2\theta\sin^2\frac{\theta}{2}\tan\frac{\theta}{2}\end{aligned}$$

따라서

$$\begin{aligned}\lim_{\theta\to0+}\frac{S(\theta)}{\theta^5}&=\lim_{\theta\to0+}\frac{\sin^2\theta\sin^2\frac{\theta}{2}\tan\frac{\theta}{2}}{2\theta^5}\\&=\frac{1}{16}\lim_{\theta\to0+}\left\{\left(\frac{\sin\theta}{\theta}\right)^2\times\left(\frac{\sin\frac{\theta}{2}}{\frac{\theta}{2}}\right)^2\times\frac{\tan\frac{\theta}{2}}{\frac{\theta}{2}}\right\}\\&=\frac{1}{16}\times1^2\times1^2\times1\\&=\frac{1}{16}\end{aligned}$$