논술의 핵심은 답이 아니라, 답을 찾는 **과정**

백인대장에서 엄선한 최신 기출과
교과 과정에 맞춘 자체 제작 예상 문제로
2021학년도 논술에 정면승부!

이기는 수리논술

Day. 4

관찰과 귀납

100人대장
'Quality Education Creation'

교과과정 01 개념정리

개념 1 [2018학년도 카이스트 심층구술면접]

대표문제 1. 다항식 $F_1(x)$, $F_2(x)$, $F_3(x)$, $\cdots$ 가 아래 성질들을 만족한다.

$F_1(x) = x - 1$

$F_2(x) = x^2 - 1$

$F_{n+2}(x) = F_n(x)F_{n+1}(x) \quad (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$

(1) $F_5{}'(x) = 0$이고 $-1 < x < 1$인 x를 구하시오.

(2) $F_{99}(x) > 0$을 만족하는 실수 x의 범위를 모두 구하시오.

Note

개념 ■ 2 [2017학년도 서울대학교 심층구술면접]

대표문제 2. 수열 $\{a_n\}$을 다음과 같이 정의하자.

$$a_n = (2+\sqrt{5})^n \ (n=1, \ 2, \ 3, \ \cdots)$$

(1) 다음 조건을 만족하는 실수 r이 단 하나 존재함을 보이시오.

조건 : 모든 자연수 n에 대하여 $a_n + r^n$은 짝수인 정수이다.

(2) 다음 수열의 수렴, 발산을 조사하고, 수렴하는 경우 그 극한값을 구하시오.

$$\left\{\cos\left(a_n\pi + \frac{\pi}{3}\right)\right\}$$

Note

개념 3 [2016학년도 고려대학교 수리논술]

대표문제 3. 송이와 민준이가 다음과 같은 규칙을 지켜가며 하나의 동전을 반복해서 던진다.

(ㄱ) 송이가 먼저 동전을 던진다.
(ㄴ) 앞면이 나오면 같은 사람이 계속 던지고 뒷면이 나오면 다른 사람이 이어 던진다.
(ㄷ) 앞면이 n번 나오면 동전을 더 이상 던지지 않는다. 단, n은 자연수이다.

마지막에 동전을 던진 사람이 송이일 확률을 n으로 나타내시오. (단, 동전을 던졌을 때 앞면이 나올 확률과 뒷면이 나올 확률은 각각 $\frac{1}{2}$ 이다.)

Note

예제 1 [2020학년도 연세대학교]

합성함수가 정의될 수 있는 범위에서 함수 $f(x)$에 대한 합성함수를 다음과 같이 나타내자.

$(f \circ f)(x) = f^{<2>}(x),\ (f \circ f \circ f)(x) = f^{<3>}(x),\ \cdots$

편의상 $f^{<i>}(x)$를 $f^{<i>}$라 하고, $f^{<0>} = x$라 하자.

함수 $f(x) = \ln(x)$라 할 때, 부정적분 $\displaystyle\int \frac{f^{<n>}}{f^{<0>}f^{<1>}f^{<2>}\cdots f^{<n-2>}}\,dx$를

$f^{<i>}\ \ (i=0,\ 1,\ \cdots n)$로 나타내고, 그 이유를 설명하시오. (단, $n \geq 2$인 자연수이다.)

Note

예제 2 2017년 인하대학교 오전

다음 제시문을 읽고 질문에 답하시오. (25점)

(가) 복소수 $w=\dfrac{-1+\sqrt{3}\,i}{2}$ 는 이차방정식 $x^2+x+1=0$의 하나의 해로서 $w^3=1$이 성립한다.

(나) 이항정리에 의해 모든 자연수 n과 복소수 α에 대하여 다음 식이 성립한다.

$$(1+\alpha)^n={}_n\mathrm{C}_0+{}_n\mathrm{C}_1\alpha+{}_n\mathrm{C}_2\alpha^2+\cdots+{}_n\mathrm{C}_n\alpha^n$$

※ 수열 $\{a_n\}$은 다음과 같이 이항계수의 합으로 정의된다. 이 때, m은 $\dfrac{n}{3}$을 넘지 않는 최대 정수이다.

$$a_n={}_n\mathrm{C}_0+{}_n\mathrm{C}_3+{}_n\mathrm{C}_6+\cdots+{}_n\mathrm{C}_{3m}$$

(1) $w=\dfrac{-1+\sqrt{3}\,i}{2}$ 일 때, 음이 아닌 정수 k에 대하여 다음 등식이 성립함을 보이시오. (5점)

$$\frac{1+w^k+w^{2k}}{3}=\begin{cases}1, & k\text{가 3의 배수일 때}\\ 0, & k\text{가 3의 배수가 아닐 때}\end{cases}$$

(2) 자연수 n에 대하여 다음 등식이 성립함을 보이시오. (10점)

$$a_n=\frac{2^n+(1+w)^n+(1+w^2)^n}{3}$$

(3) 자연수 n이 3의 배수일 때, $\left|a_n-\dfrac{2^n}{3}\right|$의 값을 구하시오. (5점)

(4) 자연수 n이 3의 배수가 아닐 때, $\left|a_n-\dfrac{2^n}{3}\right|$의 값을 구하시오. (5점)

Note

예제 3 [2016학년도 인하대학교 오전]

[문제 3] 다음 제시문을 읽고 질문에 답하시오.

(가) 양의 정수 n과 $1 \le k \le n-1$인 정수 k에 대하여, 조합의 수 ${}_nC_k$는 등식

${}_nC_k = {}_{n-1}C_k + {}_{n-1}C_{k-1}$

을 만족한다. 위 등식을 파스칼의 공식이라고 한다.

(나) 1×1크기의 정사각형 모양의 타일을 '정사각형 타일'이라 부르고, 1×2크기의 직사각형 모양의 타일을 '도미노 타일'이라 부르자. 도미노 타일 2개와 정사각형 타일 2개를 사용하여 서로 겹치지 않게 1×6크기의 직사각형을 전부 덮는 방법은 다음과 같이 6가지가 있다.

※ 양의 정수 n에 대하여, 도미노 타일과 정사각형 타일을 사용하여 서로 겹치지 않게 $1\times n$크기의 직사각형을 전부 덮을 때, 도미노 타일을 짝수개(0개 포함) 사용하는 방법의 수를 a_n이라 하고, 도미노 타일을 홀수개 사용하는 방법의 수를 b_n이라 하자. 예를 들어, $a_1 = 1$, $a_2 = 1$, $b_1 = 0$, $b_2 = 1$이다.

(3-1) 도미노 타일 k개와 정사각형 타일 $(n-2k)$개를 사용하여 서로 겹치지 않게 $1\times n$크기의 직사각형을 전부 덮는 방법의 수를 구하시오. (단, k는 $0 \le k \le \dfrac{n}{2}$인 정수이다.)

(3-2) a_{10}과 b_{10}의 값을 구하시오.

(3-3) 모든 $n \ge 3$에 대하여 다음 식이 성립함을 보이시오.

$$\begin{cases} a_n = a_{n-1} + b_{n-2} \\ b_n = b_{n-1} + a_{n-2} \end{cases}$$

(3-4) 모든 $n \ge 1$에 대하여 $|a_n - b_n| \le 1$이 성립함을 보이시오.

Note

기출문제 02 풀어보기

[2017학년도 세종대학교 수리논술][7)]

모든 실수 x에 대하여 연속인 함수 $f(x)$, $g(x)$, $h(x)$, $p(x)$, $q(x)$에 대하여 다음 물음에 각각 답하시오.

(1) 함수 $f(x)=ae^{bx}$ 은 다음 조건을 만족시킨다.
(가) $f(0)=2$
(나) $f'(x)=5f(x)$
상수 a와 b의 값을 각각 구하시오. (단, $a\neq 0$, $b\neq 0$이다.) (60점)

(2) 함수 $p(x)$와 $q(x)$는 다음 조건을 만족시킨다.
(가) $p(x)\geq 0$, $q(x)\geq 0$
(나) $\{p(x)\}^2+\{q(x)\}^2=4$
정적분 $\int_0^1 p(x)q(x)dx$의 최댓값을 구하시오. (60점)

(3) 함수 $g(x)$는 다음을 만족시킨다.
(가) $g(x)\geq 0$
(나) $\int_0^2 \{g(x)\}^2 dx=6$
정적분 $\int_0^2 g(x)\sqrt{x^3+1}\,dx$의 최댓값을 구하시오. (60점)

(4) 함수 $h(x)$의 도함수 $h'(x)$는 모든 실수 x에서 연속이다. 다음 조건을 만족시키는 함수 $h(x)$와 실수 k에 대하여 $h(k)$의 최댓값을 구하시오. (60점)
(가) $h(x)\geq 0$, $h'(x)\geq 0$
(나) $h(0)=2$
(다) $\int_0^k (9\{h(x)\}^2+4\{h'(x)\}^2)dx=6$

Note

기출문제 02 풀어보기

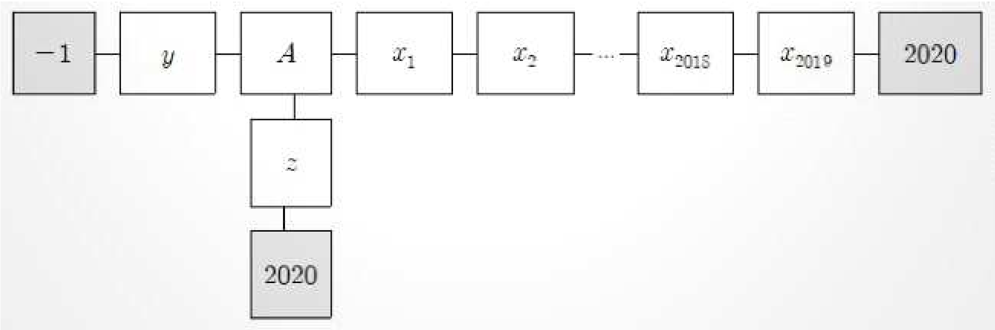
[2020학년도 아주대학교 논술우수자전형 자연계열 오전 중 일부]

[제시문]
일부가 서로 선으로 연결되어 있는 색칠된 칸과 색칠되지 않은 칸들이 있다. 아래의 조건을 만족하도록 각 칸마다 수를 하나씩 적으려고 한다.

<조건>

색칠되지 않은 칸에 적힌 수는 그 칸과 선으로 연결되어 이웃한 모든 칸에 적힌 수의 평균이다.

아래의 그림과 같이 3개의 색칠된 칸과 2022개의 색칠되지 않은 칸이 선으로 연결되어 있고, 제시문의 <조건>을 만족하도록 수가 적혀 있다. 이 때, A의 값을 구하시오.



Note

기출문제 02 풀어보기

[2018학년도 부산대학교 이과(수시)][9)]

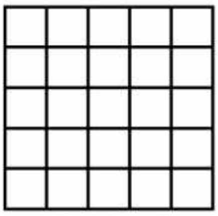
다음 제시문을 이용하여 아래 논제의 풀이 과정과 답을 논리적으로 서술하시오.

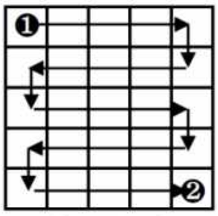
(가) 두 사건 A, B에 대하여 사건 A와 사건 B가 일어나는 경우의 수를 각각 m, n이라고 하면 두 사건 A, B가 잇달아 일어나는 경우의 수는 $m \times n$이다.

(나) n개 중에서 서로 같은 것이 각각 p, q, $\cdots$, r개씩 있을 때, n개를 일렬로 나열하는 순열의 수는

$$\frac{n!}{p! \times q! \times \cdots \times r!} \text{ (단, } p+q+\cdots+r=n)$$

[그림1]과 같이 한 변의 길이가 5인 정사각형을 가로, 세로로 각각 5등분하여 한 변의 길이가 1인 25개의 정사각형을 만든 뒤, [그림2]과 같이 ❶번에서 ❷번까지 화살표 방향으로 25개의 정사각형에 각각 한 변의 길이가 1인 정사각형 모양의 흰색 또는 검은색 타일을 붙이려고 한다. 흰색 타일은 연속해서 붙일 수 없고, 검은색 타일은 연속해서 2개까지는 붙일 수 있다.

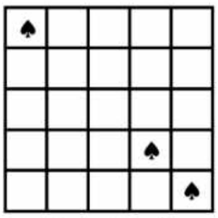

[그림 1]



[그림 2]

(1) 검은색 타일을 최대한 많이 붙이려고 한다. 이때 검은색 타일의 개수를 구하고, 타일을 붙일 수 있는 경우의 수를 구하시오. (10점)

(2) [그림3] 과 같이 ♠ 가 표시된 3개의 위치에는 반드시 검은색 타일을 붙이는 경우의 수를 구하시오. (25점)


[그림 3]

Note

실전!! 03 연습문제

2020년 연세대학교 모의논술[10)]

[문제 1]

자연수 1부터 n까지의 합은 $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$ 이다.

[문제 1-1]

$\sum_{k=1}^{n} k(k+1)$을 위와 같이 가장 간단한 모양으로 나타내시오. [5점]

[문제 1-2]

$\sum_{k=1}^{n} k(k+1)(k+2)\cdots(k+m)$의 가장 간단한 모양을 추론하고 이를 증명하시오. (단, m은 자연수이다.)
[10점]

Note

실전!! 03 연습문제

2017년 중앙대학교 자연2

눈으로는 무게를 구별할 수 없고, 무게가 서로 다른 구슬들이 있다. 양팔저울을 사용하여 이 구슬들을 가벼운 것부터 무서운 순서대로 정렬하려고 한다. 이를 위해서 다음과 같은 방식을 고려하고 있다고 하자.

- 구슬이 2개일 때 : 저울을 1회 사용하면 정렬할 수 있다.
- 구슬이 3개일 때 : 임의의 구슬을 1개 선택하고, 이 구슬과 나머지 2개 구슬의 무게를 각각 저울을 1회씩 사용하여 비교한다. 임의로 선택한 구슬보다 가볍고 무거운 것이 각각 1개씩 구별될 경우 정렬할 수 있다. 그러나, 나머지 2개 구슬이 모두 더 무겁거나, 모두 더 가벼운 경우 그 구슬들은 저울을 1회 더 사용하여 정렬할 수 있다.
- 구슬이 4개일 때 : 임의의 구슬을 1개 선택하고, 이 구슬과 나머지 3개 구슬의 무게를 각각 저울을 1회씩 사용하여 비교한다. 그 후, 구슬이 2개 또는 3개일 때, 정렬하는 방식으로 구슬을 정렬할 수 있다.

이와 같은 방식으로, n개의 구슬들을 가벼운 것부터 정렬하기 위해 양팔저울을 사용하는 횟수를 확률변수 X_n이라고 할 때, X_3와 X_4의 기댓값을 각각 구하시오. (20점)

Note

논술의 핵심은 답이 아니라, 답을 찾는 과정

백인대장에서 엄선한 최신 기출과
교과 과정에 맞춘 자체 제작 예상 문제로
2021학년도 논술에 정면승부!

이기는 수리논술

Day. 4

관찰과 귀납

해설편

100人대장
'Quality Education Creation'

정답 및 해설

1) (1) 답: $x=-\dfrac{1}{4}$

$F_1(x)=x-1$, $F_2(x)=(x-1)(x+1)$에서

$F_3(x)=(x-1)^2(x+1)$

$F_4(x)=(x-1)^3(x+1)^2$

$F_5(x)=(x-1)^5(x+1)^3$ 이다.

$$F_5{}'(x)=5(x-1)^4(x+1)^3+3(x-1)^5(x+1)^2$$
$$=(x-1)^4(x+1)^2(8x+2)$$

에서 $F_5{}'(x)=0$이고 $-1<x<1$인 x는 $-\dfrac{1}{4}$이다.

(2) (-1, 1) ∪ (1, ∞)

수열 $\{a_n\}$을 $a_1=1$, $a_2=1$, $a_{n+2}=a_{n+1}+a_n$이라 할 때, $F_n(x)=(x-1)^{a_n}(x+1)^{a_{n-1}}$임을 알 수 있다.

a_n의 홀짝성을 관찰하면 다음과 같다.

n	1	2	3	4	5	6
a_n의 홀짝성	홀수	홀수	짝수	홀수	홀수	짝수

따라서 $F_{99}(x)=(x-1)^{a}_{99}(x+1)^{a_{98}}$은 인수 $(x-1)$의 차수는 짝수이고 $(x+1)$의 차수는 홀수이다. 따라서 $F_{99}(x)>0$을 만족하는 실수 x의 범위는 $-1<x<1$ 또는 $1<x$이다.

2)

(1) $a_1+r=2+\sqrt{5}+r$ 이 짝수인 정수이므로 $r=2k-\sqrt{5}$ (k는 정수)의 꼴이다.

$a_2+r^2=9+4\sqrt{5}+4k^2+5-4k\sqrt{5}$ 가 짝수인 정수이므로 $k=2$이다. 따라서 $r=2-\sqrt{5}$이어야 한다. 한편, 이 경우 $b_n=a_n+r^n=(2+\sqrt{5})^n+(2-\sqrt{5})^n$이라 하면

$$b_{n+2}=(2+\sqrt{5})^{n+2}+(2-\sqrt{5})^{n+2}$$
$$=(9+4\sqrt{5})(2+\sqrt{5})^n+(9-4\sqrt{5})(2-\sqrt{5})^n$$

에서 $9\pm4\sqrt{5}=4\times(2\pm\sqrt{5})+1$이므로 $b_{n+2}=4b_{n+1}+b_n$을 만족한다.

b_1, b_2는 짝수인 정수이었으므로 위 식에 의해 모든 자연수 n에 대하여 b_n은 짝수가 된다.

(2) $\cos\left(a_n\pi+\dfrac{\pi}{3}\right)=\cos\left(b_n\pi+\dfrac{\pi}{3}-\pi r^n\right)=\cos\left(\dfrac{\pi}{3}-\pi r^n\right)$에서 $r=2-\sqrt{5}$는 $-1<r<0$이므로 n이 한없이 커질 때, r^n은 0으로 수렴한다.

따라서 $\lim\limits_{n\to\infty}\cos\left(a_n+\dfrac{\pi}{3}\right)=\cos\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{1}{2}$이다.

3)

주어진 자연수 n에 대하여 마지막에 동전을 던진 사람이 송이일 확률을 P_n이라 하자. 먼저 P_1을 구하면 첫 번째, 세 번째, 다섯 번째 순서에 송이가 앞면을 던지는게 가능하므로

$$P_1=\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}\right)^3+\left(\frac{1}{2}\right)^5+\ \cdots\ =\frac{2}{3}$$

이다.

$n=k+1$일 때를 생각하면 만약 k번째 앞면을 송이가 던진 경우 그 확률은 P_k이고 이 때 다시 송이의 순서로 시작하므로 위에서 구한 것처럼 $k+1$번째 앞면을 송이가 던지게 될 확률은 $\dfrac{2}{3}$이다. 만약 k번째 앞면을 민준이가 던진 경우 그 확률은 $1-P_k$이고 이 때 $k+1$번째 앞면을 송이가 던지게 될 확률은 $\dfrac{1}{3}$이다. 이를 종합하면

$$P_{k+1}=\frac{2}{3}P_k+\frac{1}{3}(1-P_k)$$

즉, $P_{n+1}=\dfrac{1}{3}P_n+\dfrac{1}{3}$ 이다.

$\left(P_{n+1}-\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{1}{3}\left(P_n-\dfrac{1}{2}\right)$에서

$P_n=\left(\dfrac{1}{3}\right)^{n-1}\left(P_1-\dfrac{1}{2}\right)+\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}\times\left(\dfrac{1}{3}\right)^n$이다.

4)

$\dfrac{d}{dx}f^{<n-1>}=\dfrac{d}{dx}\ln\left(f^{<n-2>}\right)=\dfrac{1}{f^{<n-2>}}\dfrac{d}{dx}f^{<n-2>}$이므로 귀납적으로

$$\frac{d}{dx}f^{<n-1>}=\frac{1}{f^{<n-2>}f^{<n-3>}\cdots f^{<1>}f^{<0>}}$$

임을 알 수 있다.

$\displaystyle\int\frac{f^{<n>}}{f^{<0>}f^{<1>}f^{<2>}\cdots f^{<n-2>}}dx$ 에서 $f^{<n-1>}=t$라고 치환하면

$$\int\frac{f^{<n>}}{f^{<0>}f^{<1>}f^{<2>}\cdots f^{<n-2>}}dx=\int\ln t\,dt=t\ln t-t+C$$
$$=f^{<n-1>}f^{<n>}-f^{<n-1>}+C$$

를 얻는다.

5)

[문제1] 대학발표 예시답안

(1-1) 제시문 (가)에 의해, $1+\omega+\omega^2=0$이고 $\omega^3=1$이다.

(i) $k=0$일 때 ; $\dfrac{1+\omega^k+\omega^{2k}}{3}=\dfrac{1+\omega^0+\omega^0}{3}=1$

(ii) $k=1$일 때 ; $\dfrac{1+\omega^k+\omega^{2k}}{3}=\dfrac{1+\omega^1+\omega^2}{3}=0$

(iii) $k=2$일 때 ; $\dfrac{1+\omega^k+\omega^{2k}}{3}=\dfrac{1+\omega^2+\omega^4}{3}=\dfrac{1+\omega^2+\omega}{3}=0$

$\omega^3=1$이므로 $\dfrac{1+\omega^k+\omega^{2k}}{3}$의 값은 k가 3의 배수일 때 1, k가 3의 배수가 아닐 때 0이 된다.

(1-2) 이항정리에 의해서 $2^n=(1+1)^n=\sum_{k=0}^{n} {}_nC_k$

$(1+\omega)^n=\sum_{k=0}^{n} {}_nC_k\,\omega^k$

$(1+\omega^2)^n=\sum_{k=0}^{n} {}_nC_k\,\omega^{2k}$ 이므로

$$\begin{aligned}\frac{2^n+(1+\omega)^n+(1+\omega^2)^n}{3} &= \frac{1}{3}\left(\sum_{k=0}^{n} {}_nC_k+\sum_{k=0}^{n} {}_nC_k\omega^k+\sum_{k=0}^{n} {}_nC_k\omega^{2k}\right)\\ &=\sum_{k=0}^{n} {}_nC_k\left(\frac{1+\omega^k+\omega^{2k}}{3}\right)\\ &={}_nC_0+{}_nC_3+{}_nC_6+\cdots+{}_nC_{3m}\\ &=a_n\end{aligned}$$

(1-3) $1+\omega+\omega^2=0$을 이용하면,

$$\begin{aligned}a_n-\frac{2^n}{3} &= \frac{(1+\omega)^n+(1+\omega^2)^n}{3}\\ &=\frac{(-\omega^2)^n+(-\omega)^n}{3}\\ &=(-1)^n\left(\frac{\omega^{2n}+\omega^n}{3}\right)\\ &=(-1)^n\left(\frac{\omega^{2n}+\omega^n+1-1}{3}\right)\end{aligned}$$

n이 3의 배수일 때 $1+\omega^n+\omega^{2n}=3$이므로 $\left|a_n-\dfrac{2^n}{3}\right|=\dfrac{2}{3}$이다.

(1-4) 위의 (1-3)을 이용하면,

n이 3의 배수가 아닐 때 $\left|a_n-\dfrac{2^n}{3}\right|=\dfrac{1}{3}$이다.

6)

(3-1) $n-k$개의 자리 중 k개의 도미노 타일이 들어갈 자리를 결정하는 경우의 수이므로 ${}_{n-k}C_k$가지다.

(3-2) 1×10크기의 직사각형을 덮는데 쓸수 있는 도미노 타일의 개수는 0, 1, 2, 3, 4, 5개다. 따라서 (3-1)에 의해

$a_{10}={}_{10}C_0+{}_8C_2+{}_6C_4=44$이고

$b_{10}={}_9C_1+{}_7C_3+{}_5C_5=45$이다.

(3-3) 먼저 $a_n=a_{n-1}+b_{n-2}$임을 보이자.

$1\times n$크기의 직사각형을 덮을 때, 마지막에 쓰인 타일이 정사각형 타일인 경우 짝수개의 도미노 파일을 이용하여 나머지를 덮는 방법의 수는 a_{n-1}개다. 마지막에 쓰인 타일이 도미노 타일인 경우 나머지를 덮는데 홀수개의 도미노 타일을 써야 전체 도미노 타일의 개수가 짝수개가 된다. 따라서 이 경우 나머지 타일을 덮는 경우의 수는 b_{n-2}가 된다.

마찬가지로 $b_n=b_{n-1}+a_{n-2}$임을 보이자.

$1\times n$크기의 직사각형을 덮을 때, 마지막에 쓰인 타일이 정사각형 타일인 경우 홀수개의 도미노 파일을 이용하여 나머지를 덮는 방법의 수는 b_{n-1}개다. 마지막에 쓰인 타일이 도미노 타일인 경우 나머지를 덮는데 짝수개의 도미노 타일을 써야 전체 도미노 타일의 개수가 홀수개가 된다. 따라서 이 경우 나머지 타일을 덮는 경우의 수는 a_{n-2}가 된다.

이를 종합하면

$$\begin{cases}a_n=a_{n-1}+b_{n-2}\\ b_n=b_{n-1}+a_{n-2}\end{cases}$$

이 성립함을 알 수 있다.

(3-4) (3-3)에서 얻은 두 식을 연립하면

$(a_n-b_n)=(a_{n-1}-b_{n-1})-(a_{n-2}-b_{n-2})$

를 얻는다. 한편 $c_n=a_n-b_n$이라 하면 위 식은 $c_n=c_{n-1}-c_{n-2}$가 된다. $c_1=1$, $c_2=0$에서 몇 개의 항을 구하면

n	1	2	3	4	5	6	7	8
c_n	1	0	-1	-1	0	1	1	0

에서 주기수열임을 알 수 있고 $c_n\in\{-1,\ 0,\ 1\}$이다. 따라서 $|a_n-b_n|\le 1$이 성립한다.

7)

(1) 답: $f(x)=2e^{5x}$

(2) 답: 2

산술-기하 평균 부등식에 의해 $p(x)q(x)\le\dfrac{1}{2}\left[\{p(x)\}^2+\{q(x)\}^2\right]=2$이다. 따라서 $\int_0^1 p(x)q(x)dx\le\int_0^1 2dx=2$이고 실제 등호는 두 함수 모두 상수함수 $p(x)=\sqrt{2}$, $q(x)=\sqrt{2}$일 때 성립한다.

(3) 답: 6

산술-기하 평균부등식에 의해 $g(x)\sqrt{x^3+1}\le\dfrac{1}{2}\left[\{g(x)\}^2+x^3+1\right]$이다. 따라서

$$\int_0^2 g(x)\sqrt{x^3+1}\,dx\le\frac{1}{2}\int_0^2\{g(x)\}^2+x^3+1dx=\frac{1}{2}(6+6)=6$$

이 성립한다. 또한 등호는 $g(x)=\sqrt{x^3+1}$일 때 성립하므로 6이 최댓값이 된다.

(4) 답: $\sqrt{5}$

산술-기하 평균부등식에 의해 $9\{h(x)\}^2+4\{h'(x)\}^2\ge 12h(x)h'(x)$이다. 따라서

$$\int_0^k 9\{h(x)\}^2+4\{h'(x)\}^2dx\ge\int_0^k 12h(x)h'(x)dx$$

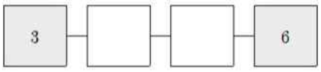
문제의 주어진 값과 위 부등식의 우변을 계산하면

$6\ge 6\{h(k)\}^2-6\{h(0)\}^2$

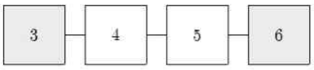
이고 $h(0)=2$이므로 $\{h(k)\}^2\le 5$를 얻는다.

이 때, 등호가 성립하기 위해서는 $3h(x)=2h'(x)$가 성립해야 하고 이러한 $h(x)$는 (3-1)에서 구한 것처럼 $h(x)=2e^{\frac{3}{2}x}$로 존재한다. 따라서 $h(k)$의 최댓값은 $\sqrt{5}$이다.

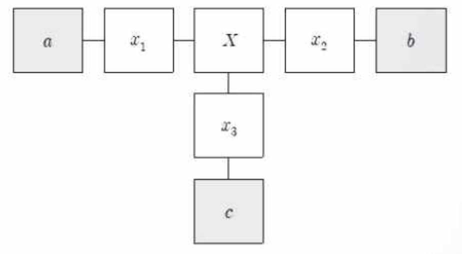
8) 답: 1010
(예시는 원래 제시문을 참고하였음)
예를 들어 아래 그림처럼



일렬로 나열되어 있는 경우 들어갈 수들은 등차수열을 이뤄야 함을 알 수 있고



와 같이 채워진다.
또한 아래 그림처럼



연결되어 있는 칸에 대하여 $X=\dfrac{x_1+x_2+x_3}{3}$이고

$x_1=\dfrac{a+X}{2}$ 즉, $a=2x_1-X$이다.

같은 방법으로 $b=2x_2-X$, $c=2x_3-X$임을 알 수 있다.
따라서

$a+b+c=2(x_1+x_2+x_3)-3X=3X$에서 $X=\dfrac{a+b+c}{3}$이다.

이제 문제의 상황에서 A, x_1, x_2, $\cdots x_{2019}$, 2020는 등차수열을 이룬다. 공차를 d라 하면 $2020=A+2020d$에서 $d=1-\dfrac{A}{2020}$이다. 따라서 $x_2=\dfrac{1009}{1010}A+2$이다.
한편 A는 -1, 2020, x_2의 평균이므로

$$3A=-1+2020+\frac{1009}{1010}A+2$$

가 성립하고 이를 풀면 $A=1010$을 얻는다.

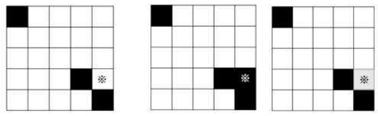
9)

[3-1]
검은색 타일을 연속해서 2개씩 붙이는 횟수를 A라 하면,

$$3A\le 25,\ A\le\frac{25}{3}$$

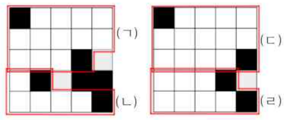
이므로 A의 최댓값은 8이고, $25=3\times8+1$이다.
따라서 검은색 타일의 최대 개수는 $2\times8+1=17$이다.
이 때, 타일을 붙일 수 있는 경우의 수는
'검은색 타일이 연속해서 붙는 경우' 8개, '검은색 타일을 연속하지 않고 1개만 붙이는 경우' 1개, 총 9개를 일렬로 나열하는 경우의 수와 같다.
그러므로 $\dfrac{(8+1)!}{8!}=9$이다.

[3-2]



[그림4]　[case1]　[case2]

[그림4]와 같이 ※자리에
검은색 타일을 붙이는 경우 [case1]과 흰색 타일을 붙이는 경우 [case2]로 구별하고 검은색 타일이 연속해서 2개가 붙는 개수를 x, 검은색 타일이 연속되지 않고 1개만 붙는 개수를 y라 하자.



[그림5]　[그림6]

[case 1]은 [그림5]와 같이 ❶과 ❷를 제외한 6개의 타일의 색이 정해진다.
(ㄱ)영역에서 붙일 수 있는 흰색 타일의 개수는 $(x+y-1)$이다.
즉, $2x+y+(x+y-1)=14$, $3x+2y=15$
이를 만족하는 순서쌍 (x, y)는 $(1, 6)$, $(3, 3)$, $(5, 0)$뿐이다.
즉, (ㄱ)영역이 만들어지는 경우의 수는 $\dfrac{7!}{6!}+\dfrac{6!}{3!3!}+\dfrac{5!}{5!}=7+20+1=28$이다.
(ㄴ)영역에서 붙일 수 있는 흰색 타일의 개수는 $(x+y-1)$이다.
즉, $2x+y+(x+y-1)=7$, $3x+2y=8$
이를 만족하는 순서쌍 (x, y)는 $(0, 4)$, $(2, 1)$뿐이다.
즉 (ㄴ)영역이 만들어지는 경우의 수는 $\dfrac{4!}{4!}+\dfrac{3!}{2!}=1+3=4$이다.
따라서 [case1]이 만들어지는 경우의 수는 $28\times4=112$이다.
[case 2]는 [그림6]과 같이 ❶과 ❷를 제외한 6개의 타일의 색이 정해진다.
위와 같은 방법으로 계산하면 (ㄷ), (ㄹ)영역이 만들어지는 경우의 수는 각각 37, 7이다.
따라서 [case2]가 만들어지는 경우의 수는 $37\times7=259$이다.
그러므로 구하는 경우의 수는 $112+259=371$이다.

(나침반 다른 풀이)
25개의 정사각형에 타일이 붙는 순서대로 번호를 붙이면 다음과 같다.

1	2	3	4	5
10	9	8	7	6
11	12	13	14	15
20	19	18	17	16
21	22	23	24	25

1번, 17번, 25번에는 검은색 타일이 붙어야 하므로 2번부터 16번의 15개의 정사각형에 붙을 타일을 표로 나타내어 계산해 보면 다음과 같다. 단, ①은 흰색 타일 1개, ❶는 검은색 타일 1개, ❷는 검은색 타일 2개를 의미한다.

2번~16번 정사각형의 타일색의 구성

❷ 없는 경우	❶	①	❶	①	❶	①	❶	①	❶	①	❶	①	❶	①	❶	1가지
			V		V		V		V		V		V			
❷ 1개		①	❶	①	❶	①	❶	①	❶	①	❶	①	❶	①	❶	$_6C_1$=6가지
					V		V		V		V		V			
❷ 2개			❶	①	❶	①	❶	①	❶	①	❶	①	❶	①	❶	$_5C_2$=10가지
					V		V		V		V		V			
❷ 3개				①	❶	①	❶	①	❶	①	❶	①	❶	①	❶	$_5C_3$=10가지
							V		V		V		V			
❷ 4개					❶	①	❶	①	❶	①	❶	①	❶	①	❶	$_4C_4$=1가지
16번 정사각형에 검은색 타일이 붙는 경우의 수																28
❷ 없는 경우	①	❶	①	❶	①	❶	①	❶	①	❶	①	❶	①	❶	①	1가지
				V		V		V		V		V		V		
❷ 1개		❶	①	❶	①	❶	①	❶	①	❶	①	❶	①	❶	①	$_6C_1$=6가지
				V		V		V		V		V		V		
❷ 2개			①	❶	①	❶	①	❶	①	❶	①	❶	①	❶	①	$_6C_2$=15가지
						V		V		V		V		V		
❷ 3개				❶	①	❶	①	❶	①	❶	①	❶	①	❶	①	$_5C_3$=10가지
						V		V		V		V		V		
❷ 4개					①	❶	①	❶	①	❶	①	❶	①	❶	①	$_5C_4$=5가지
16번 정사각형에 흰색 타일이 붙는 경우의 수																37

18번~24번 정사각형의 타일색의 구성

❷ 없는 경우	❶	①	❶	①	❶	①	❶	1가지
			V		V			
❷ 1개	❶	①	❶	①	❶	①		$_2C_1$=2가지
18번 정사각형에 검은색 타일이 붙는 경우의 수								3
❷ 없는 경우	①	❶	①	❶	①	❶	①	1가지
		V		V				
❷ 1개	①	❶	①	❶	①	❶		$_2C_1$=2가지
		V		V				
❷ 2개	①	❶	①	❶	①			1가지
18번 정사각형에 흰색 타일이 붙는 경우의 수								4

16번에 흰색 타일이 붙은 경우 18번에는 두 가지 색이 다 올 수 있으므로

$$37\times(3+4)=37\times7=259$$

의 경우가 있고 16번에 검은색 타일이 붙은 경우 18번에는 반드시 흰색 타일이 와야 하므로

$$28\times4=112$$

의 경우가 있다.

따라서 1번, 17번, 25번에는 검은색 타일이 붙는 경우의 수는

$$259+112=371$$

이다.

10)

(1)

$$\sum_{k=1}^{n}k(k+1)=\sum_{k=1}^{n}(k^2+k)=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)+\frac{1}{2}n(n+1)$$

$$=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1+3)$$

$$=\frac{1}{3}n(n+1)(n+2)$$

(2) 추론 : $\sum_{k=1}^{n}k(k+1)(k+2)\cdots(k+m)$

$$=\frac{1}{m+2}n(n+1)\cdots(n+m+1)$$

증명 1 : $f(k)=k(k+1)(k+2)\cdots(k+m)(k+m+1)$이라고 하면

$$k(k+1)(k+2)\cdots(k+m)$$

$$=\frac{1}{m+2}k(k+1)(k+2)\cdots(k+m)\{(k+m+1)-(k-1)\}$$

$$=\frac{1}{m+2}\{f(k)-f(k-1)\}$$

$$\sum_{k=1}^{n}k(k+1)(k+2)\cdots(k+m)$$

$$=\frac{1}{m+2}\sum_{k=1}^{n}\{f(k)-f(k-1)\}$$

$$=\frac{1}{m+2}\{(f(1)-f(0))+(f(2)-f(1))+(f(3)-f(2))+\cdots+(f(n)-f(n-1))\}$$

$$=\frac{1}{m+2}\{f(n)-f(0)\}$$

$$=\frac{1}{m+2}n(n+1)(n+2)\cdots(n+m+1)$$

증명 2 : 수학적 귀납법

(1) $n=1$일 때,

(좌)$=1\times2\times\cdots\times(1+m)$,

(우)$=\dfrac{1\times2\times\cdots\times(2+m)}{m+2}=1\times2\times\cdots\times(1+m)$

이므로 성립한다.

(2) $n=l$일 때,

$$\sum_{k=1}^{l}k(k+1)(k+2)\cdots(k+m)=\frac{1}{m+2}l(l+1)\cdots(l+m+1)$$

이 성립한다고 하면

$$\sum_{k=1}^{l+1}k(k+1)(k+2)\cdots(k+m)=\sum_{k=1}^{l}k(k+1)(k+2)\cdots(k+m)+\{(l+1)(l+2)\cdots(l+1+m)\}$$

$$=\frac{1}{m+2}l(l+1)\cdots(l+m+1)+\{(l+1)(l+2)\cdots(l+1+m)\}$$

$$=\frac{1}{m+2}(l+1)(l+2)\cdots(l+m+1)(l+m+2)$$

이므로 $n=l+1$일 때도 성립한다.

(1), (2)에 의하여 모든 자연수 n에 대하여

$$\sum_{k=1}^{n}k(k+1)(k+2)\cdots(k+m)$$

$$=\frac{1}{m+2}n(n+1)\cdots(n+m+1)$$

이 성립한다.

11)

[문제1] (대학발표 예시답안)

<방법1> 편의상, $E_2 = \mathrm{E}(X_2)$, $E_3 = \mathrm{E}(X_3)$, $E_4 = \mathrm{E}(X_4)$로 표시하자.

구슬이 2개일 때는 저울의 사용 횟수의 기댓값 $E_2 = 1$이다.

구슬이 3개일 때는 임의로 선택한 구슬이 제일 가볍거나 제일 무거운 경우 $2 + E_2 = 2 + 1 = 3$번 저울을 사용할 것이며, 임의로 선택한 구슬이 중간 무게의 구슬이면 저울을 2번 사용하면 된다. 따라서 저울을 사용하는 횟수의 기댓값은

$$E_3 = \frac{1}{3} \times (2 + E_2) \times 2 + \frac{1}{3} \times 2 = \frac{8}{3}$$

구슬이 4개일 때는 임의로 선택한 구슬이 제일 가볍거나 제일 무거운 경우 저울 사용 횟수의 기댓값은 $(3 + E_3)$이고, 나머지 경우는 $(3 + E_2)$이다. 따라서 저울을 사용하는 횟수의 기댓값은

$$E_4 = \frac{1}{4} \times \left(3 + \frac{8}{3}\right) \times 2 + \frac{1}{4} \times (3 + 1) \times 2 = \frac{29}{6}$$

<방법2>

구슬이 3개일 때 저울의 사용횟수를 나타내는 확률변수 X_3의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X_3	2	3	합계
$P(X_3 = x_3)$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3} \times 2 = \frac{2}{3}$	1

따라서 $\mathrm{E}(X_3) = 2 \times \frac{1}{3} + 3 \times \frac{2}{3} = \frac{8}{3}$ 이 된다.

구슬이 4개일 때 저울의 사용횟수를 나타내는 확률변수 X_4의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X_4	4	5	6	합계
$P(X_4 = x_4)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$	$\frac{1}{2} \times \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$	1

따라서 $\mathrm{E}(X_4) = 4 \times \frac{1}{2} + 5 \times \frac{1}{6} + 6 \times \frac{1}{3} = \frac{29}{6}$ 가 된다.