

논술의 핵심은 답이 아니라, 답을 찾는 과정

백인대장에서 엄선한 최신 기출과
교과 과정에 맞춘 자체 제작 예상 문제로
2021학년도 논술에 정면승부!

이 기 는 수 리 논 술

Day. 4

수열의 극한과 급수

기본

수리논술

실력늘리기

- **출발은 모방!** 필기를 열심히 하자. 모범답안, 해설 등을 이해하고 비슷하게 써보려 노력하자.
- **완성은 실전 연습!** 완벽하지 않더라도 일단 써보자.

교과과거경

이
개념정리

개념 1 수열의 극한의 기본 성질

두 수열 $\{a_n\}, \{b_n\}$ 이 각각 수렴하고 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \alpha, \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \beta$ (단, α, β 는 유한확정값)일 때

$$\textcircled{1} \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \pm b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \pm \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \alpha \pm \beta$$

(복부호동순)

$$\textcircled{2} \lim_{n \rightarrow \infty} (c \cdot a_n) = c \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = c\alpha \text{ (단, } c \text{는 상수)}$$

$$\textcircled{3} \lim_{n \rightarrow \infty} a_n b_n = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \alpha\beta$$

$$\textcircled{4} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} a_n}{\lim_{n \rightarrow \infty} b_n} = \frac{\alpha}{\beta} \text{ (단, } b_n \neq 0, \beta \neq 0)$$

개념 2 수열의 극한과 대소 관계

(1) 수열 $\{a_n\}, \{b_n\}$ 이 각각 α, β 에 수렴할 때 $a_n \leq b_n (n = 1, 2, 3, \dots)$ 이면 $\alpha \leq \beta$

(2) 수열 $\{a_n\}, \{b_n\}, \{c_n\}$ 에 대하여 $a_n \leq b_n \leq c_n (n = 1, 2, 3, \dots)$ 이고

$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} c_n = \alpha$ (일정)이면 수열 $\{b_n\}$ 도 수렴하고 $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \alpha$ (샌드위치 정리)

개념 3 급수의 수렴, 발산과 일반항의 극한

- ① 급수 $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ 이 수렴하면 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ 이다. ② $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \neq 0$ 이면 급수 $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ 는 발산한다.

예제 1

$1 \leq k \leq n$ 인 두 자연수 k, n 과 양수 a 에 대하여 $a_k = \sum_{l=1}^{2n} |k-l|^a$, $S_n = \sum_{k=1}^n a_k$ 라 할 때,

$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S_n}{n^{a+2}}$ 의 값을 구하여라.

예제 2

첫째항이 1인 수열 $\{a_n\}$ 이 있다. 모든 자연수 n 에 대하여

$$a_{n+1} = \left(\cos \frac{\pi}{2^{n+1}}\right) a_n$$

일 때, 다음 물음에 답하시오.

(1) $a_4 = \frac{1}{2^3 \sin \frac{\pi}{2^4}}$ 임을 보이시오.

(2) 모든 자연수 n 에 대하여 $a_n = \frac{1}{2^{n-1} \sin \frac{\pi}{2^n}}$ 이 성립함을 수학적 귀납법을 이용하여 보이시오.

(3) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ 의 값을 구하시오.

예제 3

다음 제시문을 읽고 질문에 답하시오.

자연수 n 에 대하여 곡선 $y = \sqrt{2x}$ 위의 점 A_n 과 x 축 위의 점 B_n 은 다음과 같이 정의한다.
 (가) 점 B_1 은 원점이고 $\overline{B_1B_n} = \frac{1}{2}n(n-1)$ 이다. (단, $n \geq 2$ 이다.)
 (나) 점 B_n 을 지나면서 y 축에 평행한 직선이 곡선 $y = \sqrt{2x}$ 와 만나는 점이 A_n 이다.

삼각형 $A_nB_nB_{n+1}$ 의 넓이를 S_n , 선분 B_nB_{n+1} 의 길이를 l_n 이라 할 때, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{l_n^2}{S_n}$ 의 값을 구하시오. (단, $n \geq 2$ 이다.)

예제 4

3개의 주머니 A, B, C 안에 각각 1에서부터 n 까지의 번호가 쓰여진 카드가 들어있다. 각 주머니에서 임의로 한 개의 카드를 꺼낼 때, A 주머니에서 꺼낸 카드의 번호가 다른 주머니 B와 C에서 꺼낸 카드의 번호보다 작을 확률을 P_n 이라 하자.

(1) 자연수 n 에 대하여 확률 P_n 을 수식으로 나타내어라.

(2) 정적분과 급수와의 관계를 이용하여 극한값 $\lim_{n \rightarrow \infty} P_n$ 을 구하여라.

기출문제 02
풀어보기

1. 2018년 서강대학교

1) (1) $a_n = \sqrt[n]{\frac{(3n)!}{(2n)!n^n}}$ 일 때, $\lim_{n \rightarrow \infty} \ln a_n$ 의 값을 구하시오.

(2) $x > 4$ 일 때 $\sqrt{x} > \ln x$ 가 성립함을 보이고, 이를 이용하여 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln n}{n} = 0$ 임을 보이시오.

(3) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \left\{ \frac{n+1-k}{n} \ln \left(\frac{n+k}{n} \right) \right\} = \int_0^1 (1-x) \ln(1+x) dx$ 임을 보이시오.

(4) $a_n = (n+1)^n (n+2)^{n-1} (n+3)^{n-2} \dots (2n-1)^2 (2n)$ 일 때, $\lim_{n \rightarrow \infty} \ln \left(\frac{\sqrt[n^2]{a_n}}{\sqrt{n}} \right)$ 의 값을 구하시오.

2. 2020년 연세대학교 모의

자연수 1부터 n 까지의 합은 $\sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$ 이다.

(1) $\sum_{k=1}^n k(k+1)$ 을 위와 같이 가장 간단한 모양으로 나타내시오.

(2) $\sum_{k=1}^n k(k+1)(k+2)\cdots(k+m)$ 의 가장 간단한 모양을 추론하고 이를 증명하시오. (단, m 은 자연수이다.)

※ 참고 : 수학적 귀납법

자연수 n 에 대한 명제 $P(n)$ 이 모든 자연수 n 에 대하여 성립함을 증명하려면 다음 두 가지를 증명하면 된다.

[1] $n = 1$ 일 때, 명제 $P(n)$ 이 성립한다.

[2] $n = k$ 일 때, 명제 $P(n)$ 이 성립한다고 가정하면

$n = k + 1$ 일 때에도 명제 $P(n)$ 이 성립한다.

이와 같은 방법으로 어떤 명제가 참임을 증명하는 방법을 수학적 귀납법이라고 한다.

3. 2018학년도 인하대학교

다음 제시문을 읽고 질문에 답하시오.

양의 실수 a, b 에 대하여 산술평균 $\frac{a+b}{2}$ 와 기하평균 \sqrt{ab} 는

$$\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2} \quad (\text{단, 등호는 } a=b \text{ 일 때 성립한다.})$$

을 만족한다. 마찬가지로 n 개의 양의 실수 x_1, x_2, \dots, x_n 에 대하여

$$\sqrt[n]{x_1 x_2 \cdots x_n} \leq \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} \quad \text{또는} \quad x_1 x_2 \cdots x_n \leq \left(\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} \right)^n$$

(단, 등호는 $x_1 = x_2 = \cdots = x_n$ 일 때 성립한다.)
이 성립한다. 이 부등식을 산술·기하평균 부등식이라 한다.

수열 $\{a_n\}$, $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ 에 대하여,

(1) 함수 $y = \ln(1+x)$ ($x \geq 0$)의 그래프를 이용하여 $a_n < a_{n+1}$ 임을 보이시오.

(2) 제시문과 $x_1 = x_2 = \cdots = x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)$ 그리고 $x_{n+1} = 1$ 을 이용하여 $a_n < a_{n+1}$ 임을 보이시오.

실전! 03
연습문제

2019년 숙명여자대학교 모의

아래와 같이 귀납적으로 정의된 수열 $\{b_n\}$ 에 대하여 다음 문제에 답하시오.

$$b_1 = 2, b_{n+1} = b_n^2 - 3b_n + 3 \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

- (1) 임의의 자연수 n 에 대하여 b_n 이 3의 배수가 아님을 수학적 귀납법을 이용하여 증명하시오.

- (2) 수열 $\{b_n\}$ 은 서로소 수열임을 증명하시오.

실전! 03
연습문제

2019년 산업기술대학교 모의

다음 제시문을 읽고 질문에 답하시오.

- (가) 자연수 n 에 대하여 열린 구간 $(0, 1)$ 에서 함수 $g(x)$ 를 $g(x) = [n\sqrt{x}]$ 라 하자.
 (단, 실수 x 에 대하여 $[x]$ 는 x 보다 크지 않은 최대의 정수이다.)
- (나) 함수 $f(x)$ 는 다음 두 조건을 만족시키는 가장 낮은 차수의 다항함수이다.
- (1) $f(x)$ 의 최고차항의 계수는 1이다.
 - (2) $f(x)g(x)$ 는 열린 구간 $(0, 1)$ 에서 연속이다.

제시문 (나)의 다항함수 $f(x)$ 을 구하고 방정식 $f(x) = 0$ 의 모든 해의 합을 S_n 라 할 때, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S_n}{n}$ 의 값을 구하시오.



'Quality Education Creation'

논술의 핵심은 답이 아니라, 답을 찾는 과정

백인대장에서 엄선한 최신 기출과
교과 과정에 맞춘 자체 제작 예상 문제로
2021학년도 논술에 정면승부!

이 기 논 수 리 논 술

Day. 4

수열의 극한과 급수

기본

해
설
편

1) 예제 1 시립대 20 모의

$$a_1 = 0 + 1^a + 2^a + 3^a + \dots + (2n-1)^a$$

$$a_2 = 1^a + 0 + 1^a + 2^a + \dots + (2n-2)^a$$

$$a_3 = 2^a + 1^a + 0 + 1^a + 2^a + \dots + (2n-3)^a$$

.....

$$a_n = (n-1)^a + (n-2)^a + \dots + 2^a + 1^a + 0 + 1^a + 2^a + \dots + n^a$$

$$S_n = (2n-1) \times 1^a + (2n-2) \times 2^a + \dots + 2 \times (2n-2)^a + 1 \times (2n-1)^a = \sum_{k=1}^{2n-1} (2n-k)k^a$$

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S_n}{n^{a+2}} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{2n-1} \left(2 - \frac{k}{n}\right) \left(\frac{k}{n}\right)^a = \int_0^2 (2-x)x^a dx \\ &= \left[\frac{2}{a+1} x^a - \frac{1}{a+2} x^{a+2} \right]_0^2 = \frac{2^{a+2}}{(a+1)(a+2)} \end{aligned}$$

2) 예제 2 이화여대 18

(1) $a_1 = 1, a_2 = \cos \frac{\pi}{4}, a_3 = \cos \frac{\pi}{8} \times a_2 = \cos \frac{\pi}{8} \cos \frac{\pi}{4}, a_4 = \cos \frac{\pi}{16} \cos \frac{\pi}{8} \cos \frac{\pi}{4}$

그런데 $\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta$ 이므로 $\cos\theta = \frac{\sin 2\theta}{2\sin\theta}$ 이다. 그러므로

$$a_4 = \cos \frac{\pi}{16} \cos \frac{\pi}{8} \cos \frac{\pi}{4} = \frac{\sin \frac{\pi}{8}}{2\sin \frac{\pi}{16}} \times \frac{\sin \frac{\pi}{4}}{2\sin \frac{\pi}{8}} \times \frac{\sin \frac{\pi}{2}}{2\sin \frac{\pi}{4}} = \frac{1}{2^3 \sin \frac{\pi}{2^4}}$$

(2) $n = 1$ 일 때 : $a_1 = 1 = \frac{1}{\sin \frac{\pi}{2}}$ 이므로 성립한다.

$n = k$ 일 때 : $a_k = \frac{1}{2^{k-1} \sin \frac{\pi}{2^k}}$ 가 성립한다고 가정 하면

$$\begin{aligned} a_{k+1} &= \cos \frac{\pi}{2^{k+1}} \times a_k = \cos \frac{\pi}{2^{k+1}} \times \frac{1}{2^{k-1} \sin \frac{\pi}{2^k}} \\ &= \frac{\cos \frac{\pi}{2^{k+1}}}{2^k \sin \frac{\pi}{2^{k+1}} \cos \frac{\pi}{2^{k+1}}} = \frac{1}{2^k \sin \frac{\pi}{2^{k+1}}} \end{aligned}$$

따라서 $n = k+1$ 일 때도 성립한다.

그러므로 모든 자연수 n 에 대하여 $a_n = \frac{1}{2^{n-1} \sin \frac{\pi}{2^n}}$ 이 성립한다.

$$(3) a_n = \frac{1}{2^{n-1} \sin \frac{\pi}{2^n}} = \frac{2}{\pi} \times \frac{\frac{\pi}{2^n}}{\sin \frac{\pi}{2^n}}, \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \text{ 이므로 } \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \frac{2}{\pi}$$

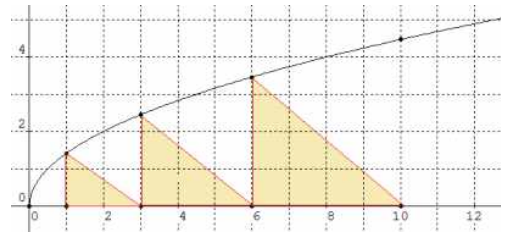
3) 예제 3 산업기술대19 모의

[2-1] $B_1(0, 0)$, $\overline{B_1 B_n} = \frac{1}{2}n(n-1)$ 이므로

$$B_n\left(\frac{1}{2}n(n-1), 0\right), B_{n+1} = \frac{1}{2}n(n+1), A_n = \sqrt{n(n-1)}$$

따라서 $l_n = n$, $S_n = \frac{1}{2}\sqrt{n^3(n-1)}$ 이고

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{l_n^2}{S_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^2}{\sqrt{n^3(n-1)}} = 2$$



4) 예제 4 한기교 20 모의

(1) A에서 꺼낸 카드의 번호가 k 이면 B와 C에서는 k 보다 큰 숫자의 카드이므로

구하는 확률은 $P_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{n} \left(1 - \frac{k}{n}\right)^2$ 이다.

$$(2) \lim_{n \rightarrow \infty} P_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{n} \left(1 - \frac{k}{n}\right)^2 = \int_0^1 (1-x)^2 dx = \left[-\frac{1}{3}(1-x)^3\right]_0^1 = \frac{1}{3}$$

1) 기출 1 서강대 18

$$(1) \ln a_n = \ln \sqrt[n]{\frac{(3n)!}{(2n)!n^n}} = \frac{1}{n} \ln \frac{(2n+1)(2n+2) \cdots (3n)}{n^n} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \ln \left(2 + \frac{k}{n}\right)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \ln a_n = \int_2^3 \ln x dx = [x \ln x - x]_2^3 = \ln \frac{27}{4e}$$

(2) $f(x) = \sqrt{x} - \ln x$ 라 하면

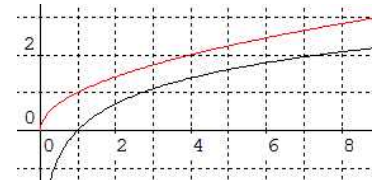
$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{x} = \frac{\sqrt{x}-2}{2x} > 0 \quad (x > 4)$$

이므로 $f(x)$ 는 증가함수이고, $f(4) = 2 - \ln 4 = 2(1 - \ln 2) > 0$

따라서 $f(x) > 0$, 즉 $\sqrt{x} > \ln x$ 가 성립한다.

이것으로부터 $0 < \frac{\ln x}{x} < \frac{1}{\sqrt{x}}$ 이고, $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{x}} = 0$ 이다.

함수와 극한의 대소관계에서 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{x} = 0$ 이다.



$$(3) \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \left\{ \frac{n+1-k}{n} \ln \left(\frac{n+k}{n} \right) \right\} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \left\{ \frac{n-k}{n} \ln \left(\frac{n+k}{n} \right) \right\} + \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \left\{ \frac{1}{n} \ln \left(\frac{n+k}{n} \right) \right\}$$

여기서 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \left\{ \frac{1}{n} \ln \left(\frac{n+k}{n} \right) \right\} = \int_1^2 \ln x dx = [x \ln x - x]_1^2 = \ln \frac{4}{e}$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$ 이므로

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \left\{ \frac{1}{n} \ln \left(\frac{n+k}{n} \right) \right\} = 0 \text{ 이고}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \left\{ \frac{n-k}{n} \ln \left(\frac{n+k}{n} \right) \right\} = \int_0^1 (1-x) \ln(1+x) dx \text{ 이다.}$$

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \left\{ \frac{n+1-k}{n} \ln \left(\frac{n+k}{n} \right) \right\} = \int_0^1 (1-x) \ln(1+x) dx$$

$$(4) \ln a_n = n \ln(n+1) + (n-1) \ln(n+2) + (n-2) \ln(n+3) + \dots + 2 \ln(2n-1) + \ln(2n)$$

$$= \sum_{k=1}^n (n+1-k) \ln(n+k) = \sum_{k=1}^n (n+1-k) \ln \frac{n+k}{n} + \frac{n(n+1)}{2} \ln n$$

따라서 $\ln \sqrt[n]{a_n} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{n-k+1}{n} \ln \frac{n+k}{n} + \frac{n(n+1)}{2n^2} \ln n$, $\ln \sqrt{n} = \frac{1}{2} \ln n$ 이므로

$$\ln \left(\frac{\sqrt[n]{a_n}}{\sqrt{n}} \right) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{n-k+1}{n} \ln \frac{n+k}{n} + \frac{1}{2n} \ln n$$

(2)와 (3) 에서 $\lim_{n \rightarrow \infty} \ln \left(\frac{\sqrt[n]{a_n}}{\sqrt{n}} \right) = \int_0^1 (1-x) \ln(1+x) dx$

$$\begin{aligned} \int_0^1 (1-x) \ln(1+x) dx &= \int_1^2 (2-t) \ln t dt \\ &= \left[\left(2t - \frac{1}{2}t^2\right) \ln t - \left(2t - \frac{1}{4}t^2\right) \right]_1^2 \\ &= \ln 4 - \frac{5}{4} \end{aligned}$$

2) 기출 2 연세대 20

$$\begin{aligned} (1) \sum_{k=1}^n k(k+1) &= \sum_{k=1}^n (k^2 + k) = \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1) + \frac{1}{2} n(n+1) \\ &= \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1+3) = \frac{1}{3} n(n+1)(n+2) \end{aligned}$$

$$(2) \text{ 추론 : } \sum_{k=1}^n k(k+1)(k+2) \dots (k+m) = \frac{1}{m+2} n(n+1) \dots (n+m+1)$$

증명 1 : $f(k) = k(k+1)(k+2) \dots (k+m)(k+m+1)$ 이라고 하면

$$\begin{aligned} k(k+1)(k+2) \dots (k+m) &= \frac{1}{m+2} k(k+1)(k+2) \dots (k+m) \{ (k+m+1) - (k-1) \} \\ &= \frac{1}{m+2} \{ f(k) - f(k-1) \} \end{aligned}$$

$$\sum_{k=1}^n k(k+1)(k+2) \dots (k+m) = \frac{1}{m+2} \sum_{k=1}^n \{ f(k) - f(k-1) \}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{m+2} \{ (f(1) - f(0)) + (f(2) - f(1)) + (f(3) - f(2)) + \dots + (f(n) - f(n-1)) \} \\
 &= \frac{1}{m+2} \{ f(n) - f(0) \} = \frac{1}{m+2} n(n+1)(n+2) \dots (n+m+1)
 \end{aligned}$$

증명 2 : 수학적 귀납법

(1) $n = 1$ 일 때, (좌) $= 1 \times 2 \times \dots \times (1+m)$, (우) $= \frac{1 \times 2 \times \dots \times (2+m)}{m+2} = 1 \times 2 \times \dots \times (1+m)$

이므로 성립한다.

(2) $n = l$ 일 때, $\sum_{k=1}^l k(k+1)(k+2) \dots (k+m) = \frac{1}{m+2} l(l+1) \dots (l+m+1)$ 이 성립한다고 하면

$$\begin{aligned}
 &\sum_{k=1}^{l+1} k(k+1)(k+2) \dots (k+m) \\
 &= \sum_{k=1}^l k(k+1)(k+2) \dots (k+m) + \{ (l+1)(l+2) \dots (l+1+m) \} \\
 &= \frac{1}{m+2} l(l+1) \dots (l+m+1) + \{ (l+1)(l+2) \dots (l+1+m) \} \\
 &= \frac{1}{m+2} (l+1)(l+2) \dots (l+m+1)(l+m+2)
 \end{aligned}$$

이므로 $n = l+1$ 일 때도 성립한다.

(1), (2)에 의하여 모든 자연수 n 에 대하여

$$\sum_{k=1}^n k(k+1)(k+2) \dots (k+m) = \frac{1}{m+2} n(n+1) \dots (n+m+1)$$

이 성립한다.

3) 기출 3 인하대 18

(1) $y = \ln(1+x)$ 의 그래프는 그림과 같이 원점을 지나고 증가하면서 위로 볼록이다.

따라서 $0 < \frac{1}{n+1} < \frac{1}{n}$ 이므로, 원점과 곡선 $y = \ln(1+x)$ 위의 x 좌표가

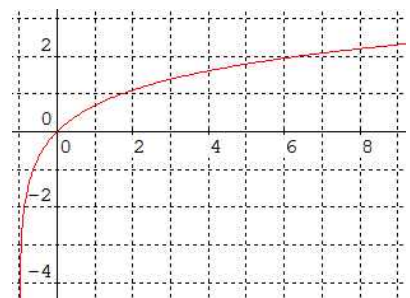
$\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}$ 인 점을 지나는 직선의 기울기에서

$$\frac{\ln\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)}{\frac{1}{n+1}} > \frac{\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n}}, \quad \ln\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1} > \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

$$\therefore a_{n+1} > a_n$$

(2) $x_1 x_2 \dots x_n x_{n+1} \leq \left(\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n + x_{n+1}}{n} \right)^n$ 으로부터

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \times 1 \leq \left(\frac{\left(1 + \frac{1}{n}\right) + \left(1 + \frac{1}{n}\right) + \dots + \left(1 + \frac{1}{n}\right) + 1}{n+1} \right)^{n+1} = \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1}$$



$\therefore a_n < a_{n+1}$

4) 실전 1 속대 19 모의

(1) $b_1 = 2$ 이므로 b_1 은 3의 배수가 아니다.

b_k 가 3의 배수가 아니라고 가정하면

$b_{k+1} = b_k^2 - 3b_k + 3$ 에서 $b_{k+1} - 3 = b_k(b_k - 3)$ 이다.

여기서 b_k 와 $b_k - 3$ 가 3의 배수가 아니므로 그 곱도 3의 배수가 아니다.

따라서 b_{k+1} 도 3의 배수가 아니다.

그러므로 수학적 귀납법에 의하여 임의의 자연수 n 에 대하여 b_n 은 3의 배수가 아니다.

(2) 임의의 두 자연수 n 과 m ($n > m$)에 대하여 b_n 과 b_m 이 서로소 인지를 확인해 보자.

$b_n - 3 = b_{n-1}(b_{n-1} - 3)$ 이므로 이 과정을 반복하면

$b_n - 3 = b_{n-1}b_{n-2} \cdots b_m(b_m - 3), b_n - b_{n-1}b_{n-2} \cdots b_m(b_m - 3) = 3$

여기서 b_n 과 b_m 의 공약수를 k 라고 하면, k 는 3의 약수이다.

그런데 b_n 은 3의 배수가 아니므로 $k = 1$ 이다. 즉 b_n 과 b_m 은 서로소이고 수열 $\{b_n\}$ 은 서로소 수열이다.

5) 실전 2 산업기술대 18 모의

$g(x)$ 는 $n\sqrt{x} = k$ (k 는 정수), $x = \left(\frac{k}{n}\right)^2$ 일 때 불연속이다.

그림은 $n = 4$ 일 때의 예를 보인 것이다.

따라서 조건 (나)를 만족하는 함수 $f(x)$ 는 $x = \left(\frac{k}{n}\right)^2$ 일 때

$f(x) = 0$ 이어야 한다. 가장 낮은 차수의 다항함수이므로

방정식 $f(x) = 0$ 의 해는 $x = \left(\frac{k}{n}\right)^2$ ($1 \leq k \leq n-1$)이다.

따라서 $S_n = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{k^2}{n^2} = \frac{(n-1)n(2n-1)}{6n^2}$ 이고

$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S_n}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n-1)n(2n-1)}{6n^3} = \frac{1}{3}$ 이다.

