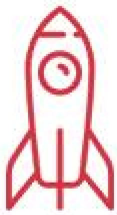
고3 수능대비
2020. 08. 29.

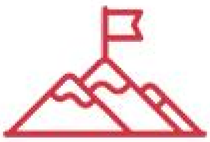
WORK BOOK #3

수Ⅰ – 전범위



Passion

Challenge



Professional

Action

100人대장
'Quality Education Creation'

[2019. 06. 부산교육청]

1. 자연수 n 에 대하여 $2^{\frac{1}{n}} = a$, $2^{\frac{1}{n+1}} = b$ 라 하자.
$\left\{ \dfrac{3^{\log_2 ab}}{3^{(\log_2 a)(\log_2 b)}} \right\}^5$ 이 자연수가 되도록 하는 모든 n 의 값의 합은?

① 14　② 15　③ 16
④ 17　⑤ 18

[2017. 03. 서울교육청]

2. 두 실수 a, b 에 대하여

$$5^{2a+b} = 32\,,\ 5^{a-b} = 2$$

일 때, $4^{\frac{a+b}{ab}}$ 의 값을 구하시오.

[2015. 03. 서울교육청]

3. $\log_2(-x^2+ax+4)$ 의 값이 자연수가 되도록 하는 실수 x 의 개수가 6 일 때, 모든 자연수 a 의 값의 곱을 구하시오.

4.

$64(\sqrt[3]{9}-\sqrt[3]{3}+1)^{-3}-8(\sqrt[3]{9}+\sqrt[3]{3}+1)^{-3}=6\sqrt[3]{a}+b$ 일 때, 두 자연수 $a,\ b$의 합 $a+b$의 값을 구하시오.

5. 수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여

$$\frac{(n+2)!}{\log_{a_n} 2}-(n+1)!\times(n+1)\log_2 a_n = n\left(1+\frac{\log_2 a_n}{\log_5 a_n}\right)$$

을 만족시킬 때, $\sum_{n=1}^{10}\log a_n = 1-\frac{1}{k!}$이다.

자연수 k의 값을 구하시오. (단, $n! = 1\times 2\times\cdots\times n$)

6. 자연수 n에 대하여

$$\log p = \frac{16}{2^n}-\log q$$

를 만족시키는 100이하의 두 자연수 $p,\ q$의 모든 순서쌍 $(p,\ q)$의 개수를 a_n이라 하자. $\sum_{k=1}^{5} a_k$의 값을 구하시오.

7. 두 실수 a, b가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $\left(2^{a}+2^{-a}\right)\left(2^{b}+2^{-b}\right)=80$
(나) $\left(2^{a}-2^{-a}\right)\left(2^{b}-2^{-b}\right)=40$

$2^{a-b}+\dfrac{1}{2^{a-b}}$ 의 값을 구하시오.

8. 1이 아닌 세 양수 x, y, z에 대하여

$\log_{x}y+\log_{y}z+\log_{z}x=\dfrac{1}{2}$

$\log_{y}x+\log_{z}y+\log_{x}z=-3$일 때,

$\left(\log_{x}y\right)^{2}+\left(\log_{y}z\right)^{2}+\left(\log_{z}x\right)^{2}$의 값은?

① $\dfrac{21}{4}$　② $\dfrac{11}{2}$　③ $\dfrac{23}{4}$

④ 6　⑤ $\dfrac{25}{4}$

9. 다음 조건을 만족시키는 두 양수 $x,\ y$에 대하여 xy의 최솟값은?

(가) $\log_2 x$와 $\log_2 y$는 모두 자연수이다. (나) $\log_2 (xy) = 2 + (\log_4 x)(\log_4 y)$

① 2^{10} ② 2^{12} ③ 2^{14}
④ 2^{16} ⑤ 2^{18}

10. x에 대한 방정식 $a^x - 100 = ax$가 서로 다른 두 실근을 가질 때, 부등식 $a^{a^2-2a-17} < a^{a+11}$을 만족시키는 정수 a의 값의 합을 구하시오. (단, $a > 0,\ a \neq 1$)

[2019. 10. 서울교육청]

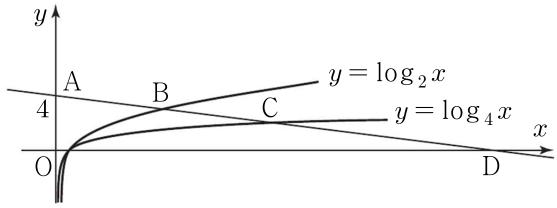
11. 곡선 $y=\log_{\sqrt{2}}(x-a)$ 와 직선 $y=\frac{1}{2}x$ 가 만나는 점 중 한 점을 A 라 하고, 점 A 를 지나고 기울기가 -1 인 직선이 곡선 $y=\left(\sqrt{2}\right)^{x}+a$ 와 만나는 점을 B 라 하자. 삼각형 OAB 의 넓이가 6 일 때, 상수 a 의 값은? (단, $0<a<4$ 이고, O 는 원점이다.)

① $\frac{1}{2}$ ② 1 ③ $\frac{3}{2}$

④ 2 ⑤ $\frac{5}{2}$

12. 100 이하의 자연수 n 에 대하여 직선 $y=-x+n$ 이 곡선 $y=\log_{2}x$ 와 만나는 점의 x 좌표가 정수가 되도록 하는 자연수 n 의 최댓값을 구하시오.

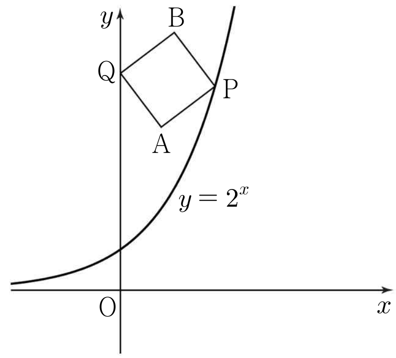
13. 그림과 같이 점 $\mathrm{A}(0,\ 4)$를 지나는 직선이 두 곡선 $y=\log_2 x$, $y=\log_4 x$와 만나는 점을 각각 B, C, x축과 만나는 점을 D라 하자. $\overline{\mathrm{AB}}=\overline{\mathrm{BC}}$일 때, $\dfrac{\overline{\mathrm{CD}}}{\overline{\mathrm{AB}}}$의 값은?



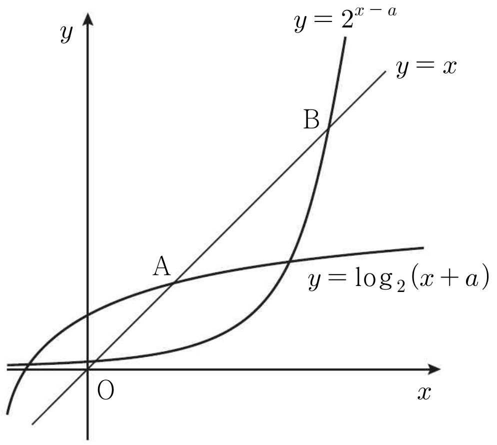
① $\dfrac{4}{3}$ ② $\dfrac{3}{2}$ ③ $\dfrac{5}{3}$

④ $\dfrac{11}{6}$ ⑤ 2

14. 그림과 같이 한 점 $\mathrm{A}(1,\ 4)$와 곡선 $y=2^x$ 위의 한 점 $\mathrm{P}(p,\ 2^p)$에 대하여 선분 AP를 한 변으로 하는 정사각형 APBQ가 있다. 점 Q의 좌표가 $(0,\ q)$일 때, 2^p+2^q의 값을 구하시오. (단, $p>1,\ q>4$)



15. 그림과 같이 양수 a에 대하여 두 곡선 $y=\log_2(x+a)$, $y=2^{x-a}$과 직선 $y=x$ 가 만나는 점을 각각 A, B라고 할 때, 선분 AB의 길이를 l이라 하자. $l^2=32$일 때, a의 값은?
(단, 점 A의 x 좌표는 양수이고, 점 B의 x 좌표보다 작다.)



① 2 ② 3 ③ 4 ④ 5 ⑤ 6

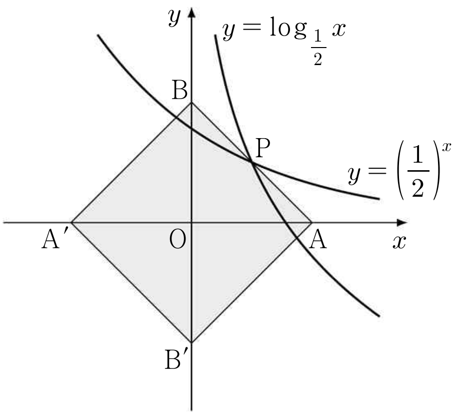
16. 원 $x^2+y^2=8$ 과 로그함수 $y=\log_a x\ (a>0, a\neq 1)$ 의 그래프가 제1 사분면에서 만나는 점의 좌표를 $(p,\ q)$라고 하자.
옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은?

〈 보 기 〉

ㄱ. $0<a<1$ 일 때, $p<q$ 이다.
ㄴ. $a>1$ 일 때, $p>q$ 이다.
ㄷ. pq 가 최댓값을 가질 때, $2a^2+\log_a 8=10$ 이다.

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ ④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

17. 그림과 같이 두 곡선 $y=\log_{\frac{1}{2}} x$와 $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$의 교점을 $\mathrm{P}(a,\ b)$라 하자. 점 P를 지나고 기울기가 -1인 직선이 x축, y축과 만나는 점을 각각 A, B라 하고, 이 두 점을 원점에 대하여 대칭이동시킨 점을 각각 A', B'이라 할 때, <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?



〈 보 기 〉

ㄱ. $a^{\frac{1}{a}}=\frac{1}{2}$

ㄴ. $\frac{1}{2}<a<1$

ㄷ. 사각형 $\mathrm{ABA'B'}$의 넓이는 4보다 작다.

① ㄱ　② ㄱ, ㄴ　③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ　⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

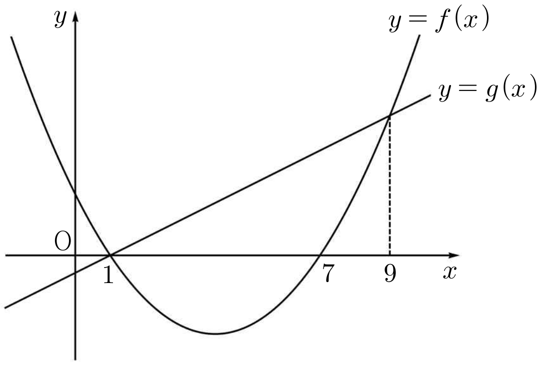
18. x에 대한 방정식 $\log_a(x-2)+100a=ax$가 오직 한 개의 실근을 갖는다. 임의의 실수 x에 대하여 지수부등식 $a^{x-3} \geq a^{kx^2-3x+k}$가 항상 성립하도록 하는 실수 k의 최솟값은?

① -2　② -1　③ 0
④ 1　⑤ 2

19. 최고차항의 계수가 양수인 이차함수 $y=f(x)$의 그래프와 일차함수 $y=g(x)$의 그래프가 그림과 같을 때, 부등식

$$2^{f(x)\{f(x)+g(x)\}} \le 4^{\{g(x)\}^2}$$

을 만족시키는 모든 자연수 x의 값의 합을 구하시오.



20. 자연수 n에 대하여 좌표평면에서 원 $x^2+y^2=4$위의 점 P_n이 점 $\mathrm{A}(2,\ 0)$을 출발하여 시곗바늘이 도는 방향의 반대로 움직이고 있다. $0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$이고 $\sin\theta=\dfrac{4}{5}$인 θ에 대하여 점 P_n이 움직인 거리가 $n\pi+2\times(-1)^n\theta$일 때, 점 P_n의 y좌표를 a_n이라 하자. $\displaystyle\sum_{n=1}^{30} a_n$의 값은?

① $-\dfrac{2}{5}$ ② $-\dfrac{1}{5}$ ③ 0
④ $\dfrac{1}{5}$ ⑤ $\dfrac{2}{5}$

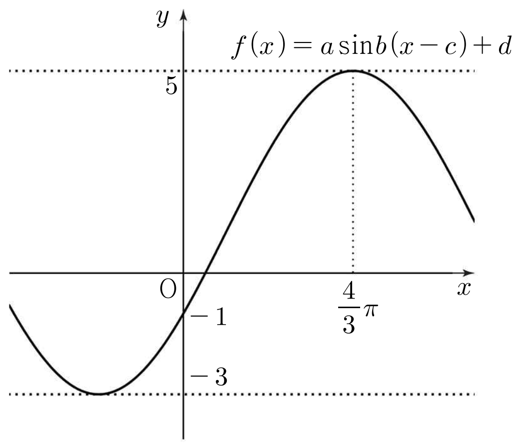
21. 좌표평면에서 중심이 O인 원 $x^2+y^2=16$ 위의 서로 다른 두 점 $\mathrm{A}(4,\ 0)$, P가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 두 선분 OA, OP에 의하여 나누어진 두 부채꼴의 넓이의 비는 5 : 7이다. (나) 동경 OP가 나타내는 각의 크기를 θ라 할 때, $\cot\theta < \sin\theta\cos\theta$이다.

점 P의 x좌표를 a, y좌표를 b라 할 때, $a+b$의 값은?

① $-2-2\sqrt{3}$ ② $-4\sqrt{2}$ ③ 0
④ $2-2\sqrt{3}$ ⑤ $-2+2\sqrt{3}$

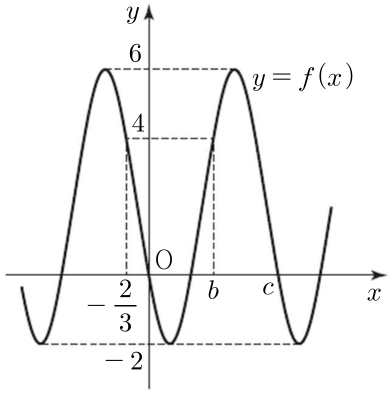
22. 모두 양수인 네 상수 $a,\ b,\ c,\ d(0<c<2\pi)$에 대하여 함수 $f(x)=a\sin b(x-c)+d$가 있다. 함수 $y=f(x)$의 그래프가 그림과 같을 때, $abcd$의 값은?
(단, $f(0)=-1$, $f\left(\frac{4}{3}\pi\right)=5$)



① $\frac{\pi}{3}$ ② $\frac{2}{3}\pi$ ③ π
④ $\frac{4}{3}\pi$ ⑤ $\frac{5}{3}\pi$

23. $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ 일 때, 좌표평면에서 각 θ를 나타내는 동경이 원 $x^2 + y^2 = 1$과 만나는 점을 P라 하자. 점 P에서 이 원에 접하는 접선과 x축이 만나는 점을 Q, 접선과 y축이 만나는 점을 R라 하자. 삼각형 OPQ의 넓이를 $f(\theta)$, 삼각형 OPR의 넓이를 $g(\theta)$라 할 때, $f(\theta) - g(\theta) < \frac{4}{3}$을 만족시키는 θ의 값의 범위는 $\alpha < \theta < \beta$이다. $60(\tan\alpha + \tan\beta)$의 값을 구하시오.

24. 함수 $f(x) = -4\cos\frac{\pi}{2}(x + a + 1) + d$의 그래프가 그림과 같고 $f\left(-\frac{2}{3}\right) = f(b) = 4$, $f(0) = f(c) = 0$이다. 세 상수 a, b, c에 대하여 $\frac{a \times (b+c)}{d}$의 값은? (단, $0 < a < 4$, $0 < b < 3 < c$, $d > 0$)



① 7 ② $\frac{15}{2}$ ③ 8 ④ $\frac{17}{2}$ ⑤ 9

25. $0 \le x \le 2\pi$인 실수 x와 실수 k에 대하여 x에 대한 방정식 $\left|\sin x - \frac{n}{6}\right| + \frac{n}{6} = k$의 실근의 개수를 $f(k)$라 할 때, 함수 $f(k)$의 치역이 $0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5$가 되도록 하는 모든 자연수 n의 값의 합은?

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

26. 구간 $[-\pi,\ \pi]$에서 정의된 함수 $f(x)$가

$$f(x) = \left|\left|\sin x - \frac{1}{2}\right| - \frac{1}{2}\right|$$

이다. 실수 k에 대하여 x에 대한 방정식 $f(x) = k$의 서로 다른 실근의 개수를 $g(k)$라고 하고, 자연수 n에 대하여 x에 대한 방정식 $f(x) = \frac{1}{n}$의 서로 다른 실근의 개수를 $h(n)$라 할 때, 함수 $g(k)$는 $k=0,\ k=\alpha,\ k=\beta$에서 불연속이다. $\sum_{n=1}^{g(\alpha)+g(\beta)} h(n)$의 값을 구하시오.

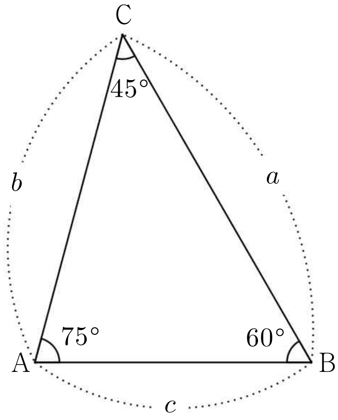
27. 삼각형 ABC에서 $\overline{\mathrm{AB}}=c$, $\overline{\mathrm{BC}}=a$, $\overline{\mathrm{CA}}=b$라 하자. 삼각형 ABC가 다음 조건을 만족시킬 때, $a+b+c$의 값을 구하시오.

(가) $\angle\mathrm{ACB}=\theta$라 할 때, $\cos\theta=\dfrac{1}{3}$이다.

(나) $a,\ b,\ c$는 이 순서대로 공차가 양수인 등차수열을 이룬다.

(다) 삼각형 ABC의 넓이는 $120\sqrt{2}$이다.

28. 그림과 같이 $\angle\mathrm{A}=75°$, $\angle\mathrm{B}=60°$, $\angle\mathrm{C}=45°$이고 $\overline{\mathrm{AB}}=c$, $\overline{\mathrm{BC}}=a$, $\overline{\mathrm{CA}}=b$인 삼각형 ABC가 있다. 다음은 삼각형 ABC를 이용하여 $\cos 75°$의 값을 구하는 과정이다.



$\cos 75°=t$라 하자.

$\cos 90° < \cos 75° < \cos 60°$

이므로 $0<t<\dfrac{1}{2}$이다. 삼각형 ABC에 외접하는 원의 반지름의 길이를 R라 할 때, 사인법칙에 의하여

$b=R\times\boxed{(가)}$, $c=R\times\boxed{(나)}$,

이고 $\sin 75°>0$이므로

$a=2R\sqrt{1-t^2}$

이다. 한편 코사인법칙에 의하여

$t=\cos 75°=\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$

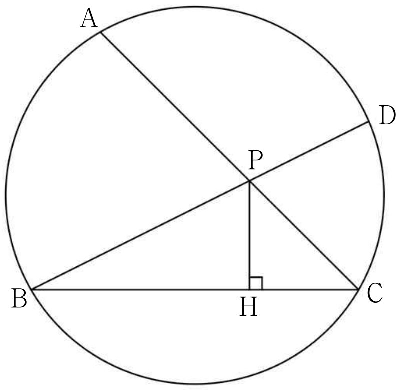
이고 이 식에 $a,\ b,\ c$를 각각 대입했을 때,
$\sqrt{6}+\sqrt{2}>2$, $\sqrt{6}-\sqrt{2}<2$이므로
t에 대한 이차방정식을 풀면

$t=\cos 75°=\boxed{(다)}$이다.

위의 (가), (나), (다)에 알맞은 수를 각각 $p,\ q,\ r$라 할 때, $pq+4r$의 값은?

① $\sqrt{6}-\sqrt{2}$ ② $2\sqrt{6}-\sqrt{2}$ ③ $\sqrt{6}+\sqrt{2}$
④ $2\sqrt{6}+\sqrt{2}$ ⑤ $2\sqrt{6}+2\sqrt{2}$

29. 그림과 같이 반지름의 길이가 $2\sqrt{3}$ 인 원 위의 네 점 A, B, C, D에 대하여 두 선분 AC와 BD가 원 내부의 점 P에서 만나고, 점 P에서 선분 BC에 내린 수선의 발을 H라 하자. $\overline{BH}=4$, $\overline{PH}=\overline{HC}=2$일 때, <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?



〈 보 기 〉

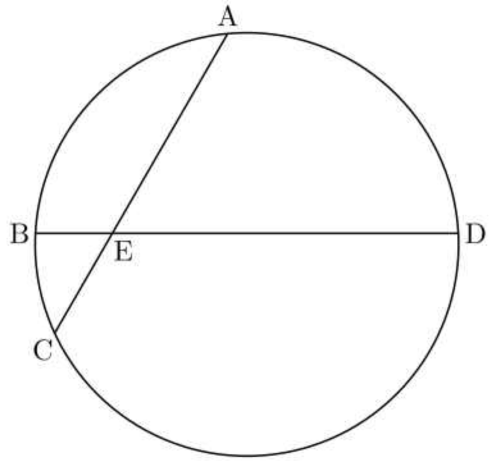
ㄱ. $\angle BAC=60°$

ㄴ. $\overline{AB}=2\sqrt{6}$

ㄷ. $\overline{AP}=\sqrt{2}+\sqrt{6}$

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

30. 그림과 같이 반지름의 길이가 r인 원 위의 네 점 A, B, C, D에 대하여 두 선분 AC와 BD가 원 내부의 점 E에서 만난다. $\overline{EA}=6$, $\overline{EB}=2$, $\overline{EC}=3$일 때, $3r^2$의 값을 구하시오.



[2019. 09. 인천교육청]

31. 두 수 2 와 4 사이에 n 개의 수 a_1, a_2, a_3, $\cdots$, a_n 을 넣어 만든 $(n+2)$ 개의 수 2, a_1, a_2, a_3, $\cdots$, a_n, 4 가 이 순서대로 등차수열을 이룬다.
집합 $A_n = \{2,\ a_1,\ a_2,\ a_3,\ \cdots,\ a_n,\ 4\}$ 에 대하여 <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?
(단, n 은 자연수이다.)

〈 보 기 〉

ㄱ. n 이 홀수이면 $3 \in A_n$

ㄴ. 모든 자연수 n 에 대하여 $A_n \subset A_{2n+1}$

ㄷ. 집합 $A_{2n+1} - A_n$ 의 모든 원소의 합을 S_n 이라 할 때, $S_6 + S_{13} = 63$ 이다.

① ㄱ　② ㄷ　③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ　⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

[2019. 04. 경기교육청]

32. 공차가 양수인 등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라 하자. $S_9 = |S_3| = 27$일 때, a_{10}의 값은?

① 23　② 24　③ 25
④ 26　⑤ 27

33. 첫째항이 90인 등차수열 $\{a_n\}$에 대하여 수열 $\{T_n\}$을 $T_n = |a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n|$이라 하자. 수열 $\{T_n\}$이 다음 조건을 만족시킨다.

〈 조 건 〉

(가) $T_{29} < T_{30}$ (나) $T_{30} = T_{31}$

$T_n > T_{n+1}$을 만족시키는 자연수 n의 최솟값과 최댓값의 합은?

① 63 ② 65 ③ 90
④ 91 ⑤ 92

34. $-1 < a < 0 < b$인 두 실수 a, b가 다음 조건을 모두 만족시킨다.

(가) -1, a, b를 적당히 나열하면 순서대로 등차수열을 이룬다.
(나) -1, a, b를 적당히 나열하면 순서대로 등비수열을 이룬다.

$100(a+b)$의 값을 구하시오.

35. 모든 항이 양수인 등비수열 $\{a_n\}$에 대하여

$$a_1 \times a_2 \times a_3 \times a_4 = \frac{1}{8}$$

이 성립한다. 두 등식

$$a_{k-3} \times a_{k-2} \times a_{k-1} \times a_k = 2^{11}$$
$$a_1 \times a_2 \times a_3 \times \cdots \times a_k = 2^{30}$$

을 만족시키는 자연수 k의 값은?

① 29 ② 30 ③ 31
④ 32 ⑤ 33

[2019. 09. 인천교육청]

36. 공차가 0 이 아닌 등차수열 $\{a_n\}$이 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $\sum_{n=1}^{5} a_n = 2\left|\sum_{n=1}^{10} a_n\right|$
(나) $a_3\, a_6 > 0$

$\dfrac{a_{21}}{a_1}$ 의 값은?

① -5 ② $-\dfrac{17}{4}$ ③ $-\dfrac{7}{2}$
④ $-\dfrac{11}{4}$ ⑤ -2

[2019. 09. 인천교육청]

37. 공차가 양수인 등차수열 $\{a_n\}$ 이 다음 조건을 만족시킬 때, a_{14} 의 값은?

(가) $\sum_{n=1}^{2m-1} a_n = 0$ 을 만족시키는 자연수 m 이 존재한다.

(나) $2\sum_{n=1}^{15} a_n = \sum_{n=1}^{15} |a_n| = 90$

① 6　② 8　③ 10　④ 12　⑤ 14

[2019. 10. 서울교육청]

38. 수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n 항까지의 합 S_n 이 다음 조건을 만족시킨다.

(가) S_n 은 n 에 대한 이차식이다.

(나) $S_{10} = S_{50} = 10$

(다) S_n 은 $n = 30$ 에서 최댓값 410 을 갖는다.

50 보다 작은 자연수 m 에 대하여 $S_m > S_{50}$ 을 만족시키는 m 의 최솟값을 p, 최댓값을 q 라 할 때, $\sum_{k=p}^{q} a_k$ 의 값은?

① 39　② 40　③ 41　④ 42　⑤ 43

[2018. 04. 경기교육청]

39. 등차수열 $\{a_n\}$ 이 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $a_1 + a_2 + a_3 = 159$
(나) $a_{m-2} + a_{m-1} + a_m = 96$ 인 자연수 m에 대하여 $\sum_{k=1}^{m} a_k = 425$ (단, $m > 3$)

a_{11}의 값을 구하시오.

40. 자연수 n에 대하여 x에 대한 이차방정식

$$x^2 - (n^2 + 8n - 12)x + 8n^3 - 12n^2 = 0$$

의 두 실근 중에서 작지 않은 것을 a_n이라 하자.

$\sum_{n=1}^{7} a_n$의 값을 구하시오.

41. 이차함수 $f(x)=x^2-6x+10$과 자연수 n에 대하여 닫힌 구간 $[n,\ n+4]$에서 함수 $f(x)$의 최솟값을 a_n, 최댓값을 b_n이라 하자. $\sum_{n=1}^{10}(b_n-a_n)$의 값을 구하시오.

42. 좌표평면 위의 10개의 점 $\mathrm{A}_k(x_k,\ y_k)$ $(k=1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ 10)$이 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $\sum_{k=1}^{10}x_k=6$, $\sum_{k=1}^{10}(x_k)^2=68$
(나) $\sum_{k=1}^{10}y_k=5$, $\sum_{k=1}^{10}(y_k)^2=137$

원 $x^2+y^2=1$ 위의 점 P에 대하여 $\sum_{k=1}^{10}\overline{\mathrm{PA}_k}^2$의 최댓값과 최솟값을 각각 M, m이라 할 때, $(M-m)^2-(M+m)$의 값을 구하시오.

43. 수열 $\{a_n\}$은 $a_1 = 2$이고 모든 자연수 n에 대하여

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = a_{n+1} + 1$$

을 만족시킨다. a_5의 값은?

① 2 ② 4 ③ 6
④ 8 ⑤ 10

44. 수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $a_1 = 0,\ a_2 = 12$

(나) $a_{2n+1} - a_{2n} = -\frac{1}{2}(a_{2n} - a_{2n-1})$

(다) $a_{2n+2} - a_{2n+1} = \frac{3}{2}(a_{2n} - a_{2n-1})$

a_6의 값은?

① 36 ② 38 ③ 40
④ 42 ⑤ 44

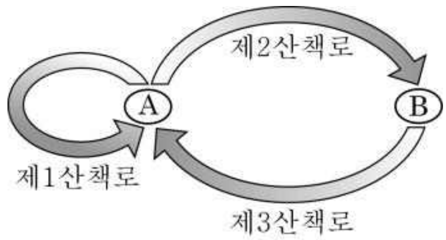
45. 첫째항이 3 인 수열 $\{a_n\}$ 이 모든 자연수 n 에 대하여

$$a_{n+1}=\begin{cases} a_n-4 & (a_n \geq 0) \\ (a_n-p)^2 & (a_n<0) \end{cases}$$

을 만족시킨다. $a_5=1$이 되도록 하는 모든 실수 p 의 값의 합을 $a+b\sqrt{17}$ 이라 할 때, $(a+b)^2$의 값을 구하시오.
(단, a와 b는 유리수이다.)

[2011. 03. 서울교육청]

46. 어느 공원에는 아래 그림과 같이 A 지점에서 출발하여 A 지점으로 돌아오는 제1산책로, A 지점에서 출발하여 B지점으로 이어지는 제2산책로, B지점에서 출발하여 A 지점으로 이어지는 제3산책로가 있고, 각 산책로의 거리는 1 km 이다.



이 산책로들을 따라 다음과 같은 규칙으로 산책한 거리가 n km 일 때, A 지점에서 출발하여 A 지점에 도착하는 방법의 수를 a_n, A 지점에서 출발하여 B지점에 도착하는 방법의 수를 b_n이라 하자.

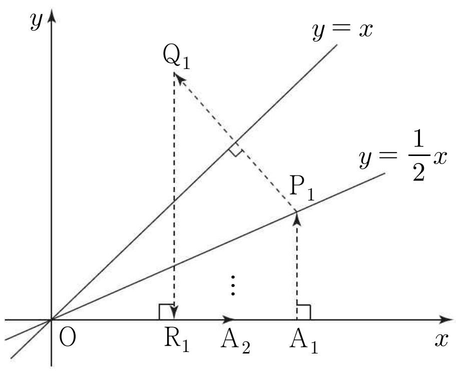
(가) 각 산책로에서는 화살표 방향으로만 진행해야 한다.
(나) 같은 산책로를 반복할 수 있다.
(다) 지나지 않는 산책로가 있을 수 있다.

a_7+b_7 의 값은? (단, n 은 자연수이다.)

① 21 ② 29 ③ 34
④ 42 ⑤ 55

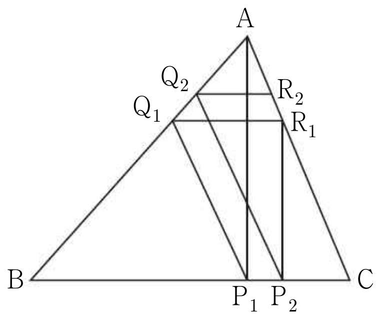
47. 자연수 n에 대하여 점 A_n이 x축 위의 점일 때, 점 A_{n+1}을 다음 규칙에 따라 정한다. 점 A_n의 x좌표를 x_n이라 할 때, $x_6 = \dfrac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오.
(단, p, q는 서로소인 자연수이다.)

> 규칙1. 점 A_1의 좌표는 $(8,\ 0)$이다.
> 규칙2.
> (1) 점 A_n을 지나고 y축과 평행한 직선이 직선 $y=\dfrac{1}{2}x$와 만나는 점을 P_n이라 한다.
> (2) 점 P_n을 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 점을 Q_n이라 한다.
> (3) 점 Q_n을 지나고 y축에 평행한 직선이 x축과 만나는 점을 R_n이라 한다.
> (4) 점 R_n을 x축 방향으로 2만큼 평행이동한 점을 A_{n+1}이라 한다.



48. 그림과 같이 $\overline{\mathrm{AB}}=\overline{\mathrm{BC}}=3k$인 이등변삼각형 ABC의 꼭짓점 A에서 선분 BC에 내린 수선의 발을 P_1이라 할 때, 점 P_1은 선분 BC를 $2:1$로 내분하는 점이다.
자연수 n에 대하여 세 점 $\mathrm{Q}_n, \mathrm{R}_n, \mathrm{P}_{n+1}$을 다음 규칙에 따라 정한다.

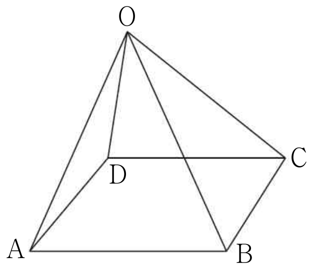
> (가) 선분 BC위의 점 P_n을 지나고 직선 AC에 평행한 직선이 선분 AB와 만나는 점을 Q_n이라 한다.
> (나) 선분 AB위의 점 Q_n을 지나고 직선 BC에 평행한 직선이 선분 AC와 만나는 점을 R_n이라 한다.
> (다) 점 R_n에서 선분 BC에 내린 수선의 발을 P_{n+1}이라 한다.



선분 $\mathrm{Q_nR_n}$의 길이를 a_n이라 할 때, $a_4=\dfrac{2}{3}$이다.
모든 자연수 n에 대하여 $a_{n+1}=p\times a_n+q$가 만족할 때, 두 상수 p, q의 합 $p+q$의 값은?

① $\dfrac{17}{30}$ ② $\dfrac{3}{5}$ ③ $\dfrac{19}{30}$
④ $\dfrac{2}{3}$ ⑤ $\dfrac{7}{10}$

49. 사각형 ABCD를 밑면으로 하는 사각뿔 OABCD가 있다. 처음 점 P는 점 O에 있으며, 1초마다 사각뿔의 5개의 점 위에서 움직인다고 한다. 자연수 n에 대하여 n초 뒤에 점 P가 점 O에 있을 확률을 P_n이라 할 때, $\mathrm{P}_{n+1}=a\mathrm{P}_n+b$이 만족한다. $a\times b$의 값은?(단, 점 P는 선분을 따라 이동하며, 선분을 따라 이동할 확률은 모두 같다.)

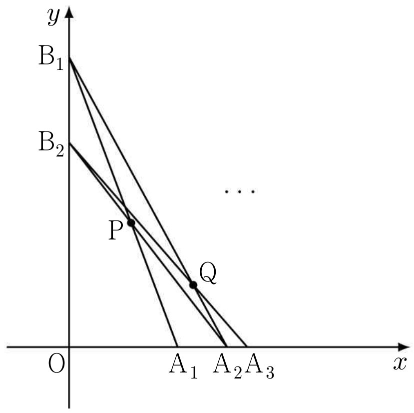


① $-\dfrac{1}{9}$ ② $-\dfrac{1}{8}$ ③ $-\dfrac{1}{6}$

④ $-\dfrac{1}{4}$ ⑤ $-\dfrac{1}{3}$

50. 다음 그림과 같이 두 점 $\mathrm{P}(2,\ 4)$, $\mathrm{Q}(4,\ 2)$에 대하여 x축 위의 점 $\mathrm{A}_1(x_1,\ 0)$ (단, $x_1>2$)과 점 P를 지나는 직선이 y축과 만나는 점을 B_1, 점 B_1과 점 Q를 지나는 직선이 x축과 만나는 점을 $\mathrm{A}_2(x_2,\ 0)$이라 하자. 또한, 점 $\mathrm{A}_2(x_2,\ 0)$과 점 P를 지나는 직선이 y축과 만나는 점을 B_2, 점 B_2와 점 Q를 지나는 직선이 x축과 만나는 점을 $\mathrm{A}_3(x_3,\ 0)$이라 하자. 이와 같은 과정을 계속하여 $\mathrm{A}_{n-1}(x_{n-1},\ 0)$과 점 P를 지나는 직선이 y축과 만나는 점을 B_{n-1}, 점 B_{n-1}과 점 Q를 지나는 직선이 x축과 만나는 점을 $\mathrm{A}_n(x_n,\ 0)$이라 할 때,

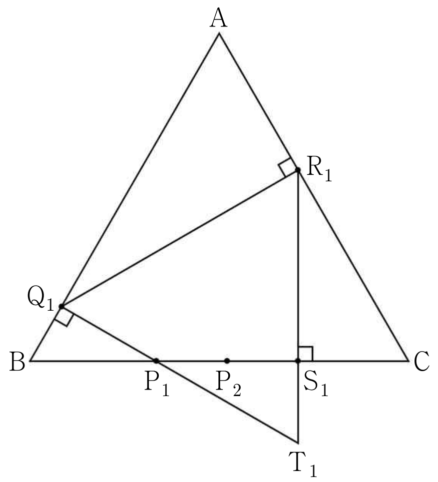
$x_nx_{n+1}+p\times x_{n+1}+q\times x_n=0$이 만족한다. 상수 $p,\ q$에 대하여 $p-q$의 값을 구하시오.



51. 그림과 같이 한 변의 길이가 1인 정삼각형 ABC가 있다. 선분 BC를 $1:2$로 내분하는 점을 P_1이라 하고, 자연수 n에 대하여 점 Q_n, R_n, S_n, T_n, P_{n+1}을 다음 규칙에 따라 정한다.

(가) 점 P_n에서 선분 AB에 내린 수선의 발이 Q_n이다.
(나) 점 Q_n에서 선분 AC에 내린 수선의 발이 R_n이다.
(다) 점 R_n에서 선분 BC에 내린 수선의 발이 S_n이다.
(라) 두 직선 $\mathrm{P}_n\mathrm{Q}_n$, $\mathrm{R}_n\mathrm{S}_n$의 교점이 T_n이다.
(마) 선분 $\mathrm{P}_n\mathrm{S}_n$의 중점이 P_{n+1}이다.

삼각형 $\mathrm{P}_n\mathrm{S}_n\mathrm{T}_n$의 넓이를 s_n이라 할 때, 모든 자연수 n에 대하여 $s_{n+1}=ps_n$이 성립한다. $256(\sqrt{3}s_1+p)$의 값을 구하시오.



수1

1. ①
2. 125
3. 30
4. 11
5. 11
6. 14
7. 20
8. ⑤
9. ③
10. 20
11. ④
12. 70
13. ⑤
14. 45
15. ③
16. ③
17. ⑤
18. ④
19. 43
20. ①
21. ④
22. ②
23. 180
24. ①
25. ③
26. 23
27. 60
28. ②
29. ⑤
30. 91
31. ⑤
32. ①
33. ④
34. 25
35. ②
36. ④
37. ④
38. ①
39. 26
40. 150
41. 365
42. 546
43. ④
44. ④
45. 25
46. ③
47. 41
48. ①
49. ①
50. 10
51. 67

정답 및 해설(수1-워크북 #3)

1. ①

$$\log_2 ab = \log_2\left(2^{\frac{1}{n}} \times 2^{\frac{1}{n+1}}\right)$$

$$= \log_2 2^{\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}} = \frac{1}{n}+\frac{1}{n+1},$$

$$(\log_2 a)(\log_2 b) = \left(\log_2 2^{\frac{1}{n}}\right)\left(\log_2 2^{\frac{1}{n+1}}\right)$$

$$= \frac{1}{n}\times\frac{1}{n+1}$$

이다. 지수법칙에 의하여

$$\left\{\frac{3^{\log_2 ab}}{3^{(\log_2 a)(\log_2 b)}}\right\}^5 = \left\{\frac{3^{\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}\right)}}{3^{\left(\frac{1}{n}\times\frac{1}{n+1}\right)}}\right\}^5$$

$$= \left\{3^{\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n(n+1)}}\right\}^5$$

$$= 3^{\frac{10}{n+1}}$$

이다. $3^{\frac{10}{n+1}}$ 이 자연수가 되도록 하려면 $n+1$ 은 10 의 약수가 되어야 한다. 그러므로 자연수 n 의 값은 1 , 4 , 9 이고 모든 자연수 n의 값의 합은 14 이다.

2. 125

$5^{2a+b}\times 5^{a-b} = 32\times 2$

$5^{(2a+b)+(a-b)} = 64$

$5^{3a} = 4^3$

$5^a = 4$

$5^{a-b} = 2$ 에서

$5^b = 2$

이므로

$4^{\frac{1}{a}} = 5,\ 2^{\frac{1}{b}} = 5$

따라서

$$4^{\frac{a+b}{ab}} = 4^{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}} = 4^{\frac{1}{a}}\times 4^{\frac{1}{b}} = 5\times\left(2^{\frac{1}{b}}\right)^2 = 5\times 5^2 = 125$$

[다른 풀이]

$2a+b = \log_5 32$ …… ㉠

$a-b = \log_5 2$ …… ㉡

㉠, ㉡에서

$a = \log_5 4,\ b = \log_5 2$

$$\frac{a+b}{ab} = \frac{1}{a}+\frac{1}{b}$$

$$= \frac{1}{\log_5 4}+\frac{1}{\log_5 2}$$

$$= \log_4 5+\log_2 5$$

$$= \log_4 5+\log_4 25$$

$$= \log_4 125$$

따라서

$$4^{\frac{a+b}{ab}} = 4^{\log_4 125} = 125$$

3. 30

$f(x) = -x^2+ax+4$ 라 하면

로그의 진수 조건에 의해 $f(x) > 0$

$$f(x) = -x^2+ax+4$$

$$= -\left(x^2-ax+\frac{a^2}{4}-\frac{a^2}{4}\right)+4$$

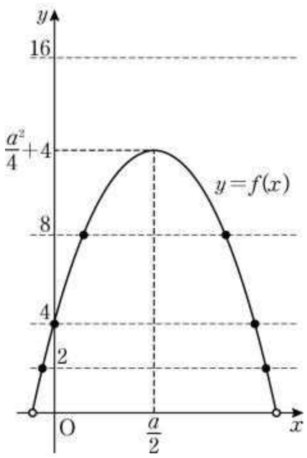
$$= -\left(x-\frac{a}{2}\right)^2+\frac{a^2}{4}+4$$

$\log_2(-x^2+ax+4)$ 의 값이 자연수가 되는 실수 x의 개수가 6 이므로 $y=f(x)$ 의 그래프는 아래 그림과 같이 $y=2^1$, $y=2^2$, $y=2^3$ 과 각각 2개의 점에서 만나고 $y=2^n$ $(n\geq 4)$와는 만나지 않는다.

즉, $2^3 < \frac{a^2}{4}+4 < 2^4$

$16 < a^2 < 48$ 이고, a가 자연수이므로 $a=5$, 6

따라서 $5\times 6 = 30$



4. 11

5. 11

6. 14

$n=1$ => 0개

$n=2$ => 1개

$n=3$ => 9개

$n=4$ => 4개

7. 20

조건 (가)에서

$2^{a+b}+2^{-a-b}+2^{-a+b}+2^{a-b} = 80$ …… ㉠

조건 (나)에서

$2^{a+b}+2^{-a-b}-2^{-a+b}-2^{a-b} = 40$

㉠ − ㉡을 하면 $2\left(2^{-a+b}+2^{a-b}\right) = 40$

따라서 $2^{a-b}+2^{-a+b}=2^{a-b}+\dfrac{1}{2^{a-b}}=20$

8. ⑤

$\log_x y=a, \log_y z=b, \log_z x=c$라 하면

$\log_x y+\log_y z+\log_z x=a+b+c=\dfrac{1}{2}$

$$\begin{aligned}\log_y x+\log_z y+\log_x z&=\frac{1}{\log_x y}+\frac{1}{\log_y z}+\frac{1}{\log_z x}\\&=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\\&=\frac{ab+bc+ca}{abc}=-3 \cdots\cdots\cdots ㉠\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\therefore (\log_x y)^2+(\log_y z)^2+(\log_z x)^2\\&=a^2+b^2+c^2\\&=(a+b+c)^2-2(ab+bc+ca)\\&=\left(\frac{1}{2}\right)^2-2(ab+bc+ca)\\&=\frac{1}{4}-2\times(-3abc) \cdots\cdots ㉡\end{aligned}$$

($\therefore$ ㉠에서 $ab+bc+ca=-3abc$)

이때 $abc=\log_x y+\log_y z+\log_z x=\dfrac{\log y}{\log x}\times\dfrac{\log z}{\log y}\times\dfrac{\log x}{\log z}=1$

이므로 ㉡에서

$$(\log_x y)^2+(\log_y z)^2+(\log_z x)^2=\frac{1}{4}-2\times(-3)=\frac{25}{4}$$

9. ③

자연수 m, n에 대하여 $\log_2 x=m$, $\log_2 y=n$이라 하면

$\log_2(xy)=2+(\log_4 x)(\log_4 y)$에서

$\log_2 x+\log_2 y=2+\left(\dfrac{1}{2}\log_2 x\right)\left(\dfrac{1}{2}\log_2 y\right)$

$m+n=2+\dfrac{1}{4}mn$

$mn-4m-4n+8=0$

$(m-4)(n-4)=8$

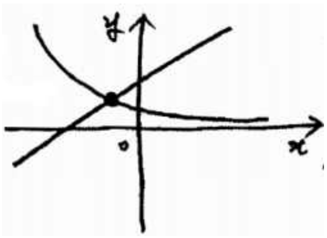
$(m, n)=(5, 12), (6, 8), (8, 6), (12, 5)$

따라서 $m+n=14$일 때 $xy=2^m\times 2^n=2^{m+n}$은 최솟값 2^{14}을 갖는다.

10. 20

방정식 $a^x-100=ax$의 실근의 개수는 $\begin{cases}y=a^x-100\\y=ax\end{cases}$ 의 교점의 개수와 같다. 교점이 두 개이기 위해서는 $a>1$이어야 한다.

만약, $0<a<1$이면 다음 그림과 같이 교점이 한 개 뿐이다.



$a>1$이므로 $a^{a^2-2a-17}<a^{a+11}$에서

$a^2-2a-17<a+11$이고, $a^2-3a-28<0$, $(a-7)(a+4)<0$

$\therefore -4<a<7$ 그런데, $a>1$이므로 $1<a<7$

가능한 a는 $2, 3, 4, 5, 6$이다.

따라서 a의 값의 합은 20이다.

11. ④

두 곡선 $y=\log_{\sqrt{2}}(x-a)$ 와 $y=(\sqrt{2})^x+a$ 는

직선 $y=x$ 에 대하여 대칭이고,

직선 AB 는 직선 $y=x$ 에 수직이므로

두 점 A, B 는 직선 $y=x$ 에 대하여 대칭이다.

점 A 의 좌표를 $A(2t, t)$ $(t>0)$이라 하면

점 B 의 좌표는 $B(t, 2t)$ 이므로

$\overline{AB}=\sqrt{2}t$ 이다.

선분 AB 의 중점을 M 이라 하면

$M\left(\dfrac{3}{2}t, \dfrac{3}{2}t\right)$

삼각형 OAB 는 $\overline{OA}=\overline{OB}$ 인 이등변삼각형이므로

삼각형 OAB 의 넓이는

$6=\dfrac{1}{2}\times\overline{AB}\times\overline{OM}=\dfrac{1}{2}\times\sqrt{2}t\times\dfrac{3\sqrt{2}}{2}t=\dfrac{3}{2}t^2$

이므로 $t=2$

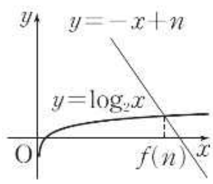
즉 $A(4, 2)$ 가 곡선 $y=\log_{\sqrt{2}}(x-a)$ 위의 점이므로

$2=\log_{\sqrt{2}}(4-a)$, $(\sqrt{2})^2=4-a$

따라서 구하는 상수 a 의 값은 2 이다.

12. 70

직선 $y=-x+n$이 곡선 $y=\log_2 x$ 와 만나는 점의 x좌표를 $f(n)$ 이라 하면



$\log_2 f(n)=-f(n)+n$

$\log_2 f(n)+f(n)=n \cdots ㉠$

주어진 조건에서 $f(n)$ 이 정수이므로 $\log_2 f(n)$ 은 정수이다.

따라서 $f(n)=2^k$ (단, k는 음이 아닌 정수) 꼴이어야 한다. 이때 $\log_2 f(n)=k$ 이므로 ㉠에서

$n=k+2^k$ (k는 음이 아닌 정수)

이다.

$1 \le n \le 100$에서 $1 \le k+2^k \le 100$ 이고

$2^6=64$, $2^7=128$이므로 위 부등식을 만족시키는 k의 최댓값은 6 이다.

따라서 구하는 n의 최댓값은 $6+64=70$

13. ⑤

점 A$(0,\ 4)$를 지나는 직선의 방정식을 $y=mx+4$라 하자.

$\overline{\mathrm{AB}}=\overline{\mathrm{BC}}$에서 점 B의 x좌표를 α라 하면 점 C의 x좌표는 2α이다.

α는 방정식 $\log_2 x=mx+4$의 해이고, 2α는 방정식 $\log_2 x=mx+4$의 해이므로

$\log_2\alpha=m\alpha+4 \ \cdots$ ㉠, $\log_4 2\alpha=2m\alpha+4 \ \cdots$ ㉡

㉡에서

$\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\log_2\alpha=2m\alpha+4$, $\log_2\alpha=4m\alpha+7 \ \cdots$ ㉢

㉠$\times 4-$㉢을 하면

$3\log_2\alpha=9$, $\log_2\alpha=3$, $\alpha=2^3=8$

㉠에서 $3=8m+4$, $m=-\frac{1}{8}$

즉, 구하는 직선의 방정식은 $y=-\frac{1}{8}x+4$

점 D의 x좌표는 $-\frac{1}{8}x+4=0$에서 $x=32$

점 C의 x좌표는 2α이므로

$$\frac{\overline{\mathrm{CD}}}{\overline{\mathrm{AB}}}=\frac{32-2\alpha}{\alpha}=\frac{16}{8}=2$$

14. 45

두 점 A$(1,\ 4)$, B에서 y축에 내린 수선의 발을 각각 A$'$, B$'$이라 하면 A$'(0,\ 4)$이므로

$\overline{\mathrm{QA'}}=q-4$, $\overline{\mathrm{AA'}}=1$

정사각형 APBQ에서 $\overline{\mathrm{AQ}}=\overline{\mathrm{QB}}$이고 $\angle\mathrm{AQB}=90^\circ$ 임을 이용하면 두 직각삼각형 AA$'$Q와 QBB$'$가 합동임을 알 수 있으므로

$\overline{\mathrm{BB'}}=\overline{\mathrm{QA'}}=q-4$, $\overline{\mathrm{QB'}}=\overline{\mathrm{AA'}}=1$

$\therefore \mathrm{B}=(q-4,\ q+1)$

정사각형 APBQ에서 두 대각선 AB, PQ의 중점이 일치하므로

$1+(q-4)=p$이고 $4+(q+1)=2^p+q$

$2^p=5$에서 $p=\log_2 5$

$q=p+3=\log_2 5+3=\log_2 40$

이므로

$2^q=40$

$\therefore 2^p+2^q=40+5=45$

15. ③

$\overline{\mathrm{AB}}=4\sqrt{2}$

점 A는 $y=2^x-a$와 $y=x$의 교점이라 생각할 수 있다.

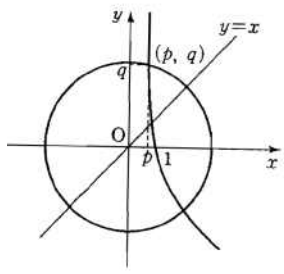
$y=2^{x-a}$의 그래프는 는 $y=2^x-a$의 그래프를 $(a,\ a)$만큼 평행이동 한 그래프이므로

A$(t,\ t)$라 두면 B$(t+a,\ t+a)$로 둘 수 있고,

$a=4$이다.

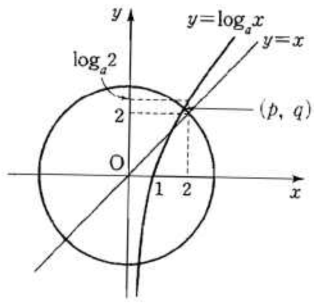
16. ③

ㄱ.



그래프에서 보듯이 $0<a<1$ 이면 $p<q$이다. <참>

ㄴ.



$\log_a 2>2$, $\log_a 2>\log_a a^2$

$2>a^2$, $1<a<\sqrt{2}$ $(\because a>1)$

$1<a<\sqrt{2}$ 의 범위에서는 $p<q$이다. <거짓>

ㄷ. $p^2+q^2=8$에서 $p^2+q^2 \ge 2\sqrt{p^2q^2}=2pq$이므로

pq가 최댓값을 가지기 위한 조건은

p^2+q^2에서 $p=q$이고 $p^2=4$, $p=q=2$이다.

점 (p, q)는 $y=\log_a 2$를 지나므로

$2=\log_a 2$, $a^2=2$, $a=\sqrt{2}$ 이다.

$2a^2+\log_a 8=2(2)+\log_{\sqrt{2}}8=4+6=10$ <참>

17. ⑤

ㄱ. 증가함수의 역함수와의 교점은 항상 $y=x$위에 있으므로

$\left(\frac{1}{2}\right)^a=a$에서 $a^{\frac{1}{a}}=\frac{1}{2}$ <참>

ㄴ. $f(x)=\log_{\frac{1}{2}}x$, $g(x)=\left(\frac{1}{2}\right)^x$라 하면

$f\left(\frac{1}{2}\right)>g\left(\frac{1}{2}\right)$, $f(1)<g(1)$이므로 $\frac{1}{2}<a<1$이다.

<참>

ㄷ. 점 P$(a,\ a)$는 곡선 $y=\log_{\frac{1}{2}}x$ 위의 점이므로

$a=\log_{\frac{1}{2}}a$이고, $\frac{1}{2}<\log_{\frac{1}{2}}a<1$이다.

$\log_{\frac{1}{2}}\frac{1}{\sqrt{2}}<\log_{\frac{1}{2}}a<\log_{\frac{1}{2}}\frac{1}{2}$

$\frac{1}{2} < a < \frac{1}{\sqrt{2}}$

사각형 ABA'B'의 넓이는 $\overline{AB}^2 = 8a^2$이고

위 식으로부터 $2 < 8a^2 < 4$이므로

사각형 ABA'B'의 넓이는 4보다 작다. 〈참〉

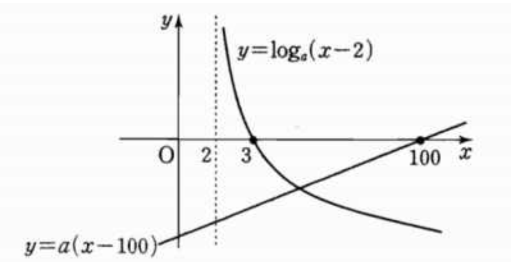
18. ④

방정식 $\log_a(x-2)+100a=ax$가 오직 한 개의 실근 α를 가진다는 것은 $y=\log_a(x-2)$와 $y=a(x-100)$가 오직 하나의 교점을 가진다는 것이다.

(i) $a>1$일 때, 두 개의 교점을 갖게 된다.

(ii) $0<a<1$일 때,

다음 그림에서 알 수 있듯이 오직 한 개의 근을 갖는다.



$0<a<1$이므로 $a^{x-3} \ge a^{kx^2-3x+k}$, $x-3 \le kx^2-3x+k$이다.

임의의 실수 x에 대하여 $kx^2-4x+k+3 \ge 0$이 성립하기 위해서는 $k>0$이고,

판별식 $D=4-k(k+3) \le 0$

$k \le -4$, $k \ge 1$이어야 한다.

따라서 $k \ge 1$

19. 43

$f(x)=a(x-1)(x-7)$이라 하자.

$y=g(x)$의 그래프는 두 점 $(1,\ 0)$과 $(9,\ f(9))=(9,\ 16a)$를 지나므로

$g(x)=2a(x-1)$이다.

$2^{f(x)\{f(x)+g(x)\}} \le 2^{2\{g(x)\}^2}$

$f(x)\{f(x)+g(x)\} \le 2\{g(x)\}^2$

$\{f(x)-g(x)\}\{f(x)+2g(x)\} \le 0$

$y=f(x)$와 $y=-2g(x)$의 그래프는 $x=1$, $x=3$일 때 만난다.

주어진 부등식을 만족하기 위해서는 $f(x)$의 값이 $g(x)$와 $-2g(x)$의 값 사이에 있어야 하므로

$x=1$ 또는 $3 \le x \le 9$

20. ①

21. ④

조건 (가)에서 $\angle AOP=150^\circ$

점 P는 제2사분면 또는 제3사분면 위에 있다.

조건 (나)에서 $\cot\theta < \sin\theta\cos\theta$

$\frac{\cos\theta}{\sin\theta} - \frac{\sin^2\theta\cos\theta}{\sin\theta} < 0$

$\cot\theta(1-\sin^2\theta)<0$, $\cot\theta<0$ $(\because 1-\sin^2\theta>0)$

따라서 점 P의 좌표는 $(-2\sqrt{3},\ 2)$이다.

$\therefore a+b=2-2\sqrt{3}$

22. ②

$a=4,\ b=\frac{1}{2},\ c=\frac{\pi}{3},\ d=1,\ abcd=\frac{2}{3}\pi$

23. 180

$P(\cos\theta, \sin\theta)$, $Q(\sec\theta,\ 0)$, $R(0, \csc\theta)$

$f(\theta)=\frac{1}{2}\tan\theta$

$g(\theta)=\frac{1}{2}\cot\theta$

$f(\theta)-g(\theta)=\frac{1}{2}(\tan\theta-\cot\theta)$

$\tan\theta=t$라 하면 $t>0$이고 $\cot\theta=\frac{1}{t}$이므로

$\frac{1}{2}\left(t-\frac{1}{t}\right)<\frac{4}{3}$

$\frac{t}{2}-\frac{1}{2t}<\frac{4}{3}$, $3t^2-8t-3<0$, $0<t<3$

$60(\tan\alpha+\tan\beta)=180$

24. ①

함수 $f(x)=4\sin\left(\frac{x+a}{2}\pi\right)+2$의 주기는

$\frac{2\pi}{\frac{\pi}{2}}=4$이므로 $c=4$

$f(0)=0$이므로

$f(0)=4\sin\frac{a}{2}\pi+2=0$에서

$\sin\frac{a}{2}\pi=-\frac{1}{2}$

$0<a<4$이므로

$a=\frac{7}{3}$ 또는 $a=\frac{11}{3}$

$f\left(-\frac{2}{3}\right)=4$이므로

(i) $a=\frac{7}{3}$인 경우

$f\left(-\frac{2}{3}\right)=4\sin\frac{\pi}{2}\left(-\frac{2}{3}+\frac{7}{3}\right)+2=4\sin\frac{5}{6}\pi+2=4$

이므로 조건을 만족시킨다.

(ii) $a=\frac{11}{3}$인 경우

$f\left(-\frac{2}{3}\right)=4\sin\frac{\pi}{2}\left(-\frac{2}{3}+\frac{11}{3}\right)+2=4\sin\frac{3}{2}\pi+2=-2$

이므로 조건을 만족시키지 않는다.

(ⅰ), (ⅱ)에서 $a=\frac{7}{3}$

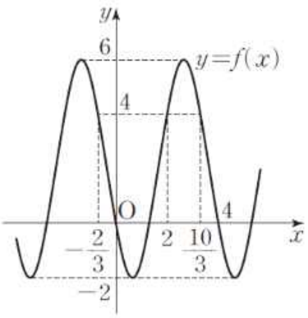
$f(b)=4\sin\frac{\pi}{2}\left(b+\frac{7}{3}\right)+2=4$

$\alpha=\frac{\pi}{2}\left(b+\frac{7}{3}\right)$이라 하면

$0<b<3$이므로 $\frac{7}{6}\pi<\alpha<\frac{8}{3}\pi$이다.

방정식 $\sin\alpha=\frac{1}{2}$에서 $\alpha=\frac{13}{6}\pi$이므로 $b=2,\ d=2$

따라서 $\frac{a(b+c)}{d}=\frac{\frac{7}{3}(2+4)}{2}=7$



25. ③

x에 대한 방정식 $\left|\sin x-\frac{n}{6}\right|+\frac{n}{6}=k$의 실근의 개수는 곡선

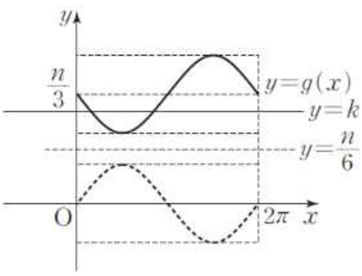
$y=\left|\sin x-\frac{n}{6}\right|+\frac{n}{6}\ (0\le x\le 2\pi)$와 직선 $y=k$가 만나는 점의

개수와 같다.

$g(x)=\left|\sin x-\frac{n}{6}\right|+\frac{n}{6}$이라 하면 n의 범위를 나누어

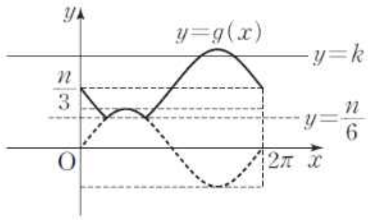
$y=g(x)\ (0\le x\le 2\pi)$의 그래프의 개형을 그려 보자.

(ⅰ) $\frac{n}{6}\ge 1$인 경우 함수 $g(x)$의 그래프의 개형은 다음과 같다.



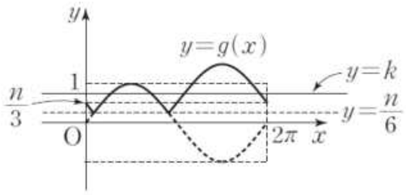
이 경우 함수 $f(k)$의 치역은 $\{0, 1, 2, 3\}$이다.

(ⅱ) $\frac{1}{2}\le\frac{n}{6}<1$인 경우 함수 $g(x)$의 그래프의 개형은 다음과 같다.



이 경우 함수 $f(k)$의 치역은 $\{0, 1, 2, 3, 4\}$이다.

(ⅲ) $0<\frac{n}{6}<\frac{1}{2}$인 경우 함수 $g(x)$의 그래프의 개형은 다음과 같다.



이 경우 함수 $f(k)$의 치역은 $\{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$이다.

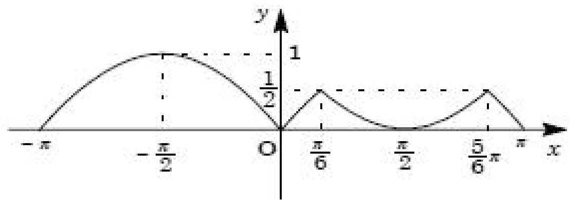
(ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)에서 함수 $f(k)$의 치역이 $\{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$인 경우는

$0<\frac{n}{6}<\frac{1}{2}$인 경우이므로 $0<n<3$

따라서 조건을 만족시키는 자연수 n은 1, 2

26. 23

함수 $f(x)$의 그래프는 다음과 같다.



따라서 $\alpha=\frac{1}{2}$, $\beta=1$로 놓을 수 있고 $g(\alpha)=4,\ g(\beta)=1$

$$\sum_{n=1}^{g(\alpha)+g(\beta)}h(n)=\sum_{n=1}^{5}h(n)=h(1)+h(2)+h(3)+h(4)+h(5)$$
$$=1+4+6+6+6=23$$

27. 60

등차수열의 공차를 d라 하면

$a=a,\ b=a+d,\ c=a+2d$로 놓을 수 있다.

$\cos\theta=\frac{a^2+(a+d)^2-(a+2d)^2}{2a(a+d)}=\frac{(a-3d)}{2a}=\frac{1}{3}$

$\therefore a=9d$

한편, 삼각형의 넓이는

$\frac{1}{2}\cdot\sin\theta\cdot 9d\cdot 10d=30\sqrt{2}d^2=120\sqrt{2}$

$\therefore d=2$

$a+b+c=3a+3d=30d=60$

28. ②

$b=2R\sin 60°=\boxed{\sqrt{3}}R$

$c=2R\sin45°=\boxed{\sqrt{2}}R$

$t=\cos75°=\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$

$=\dfrac{3R^2+2R^2-4R^2(1-t^2)}{2\sqrt{6}R^2}$

이를 정리하면

$4t^2-2\sqrt{6}t+1=0$

이고 t에 대한 이차방정식을 풀면

$t=\dfrac{\sqrt{6}\pm\sqrt{2}}{4}$

그런데 $0<t<\dfrac{1}{2}$이므로

$t=\boxed{\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}}R$

따라서 $p=\sqrt{3}$, $q=\sqrt{2}$, $r=\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$ 이므로

구하는 값은 $pq+4r=2\sqrt{6}-\sqrt{2}$

29. ⑤

ㄱ. <참>

$\overline{\mathrm{BC}}=6$이고 삼각형 ABC에서 사인법칙을 이용하면

$\sin\angle\mathrm{BAC}=\dfrac{6}{4\sqrt{3}}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$, $\angle\mathrm{BAC}=60°$

ㄴ. <참>

삼각형 ABC에서 사인법칙을 이용하면 $\sin\angle\mathrm{ACB}=\dfrac{\overline{\mathrm{AB}}}{4\sqrt{3}}$,

$\overline{\mathrm{AB}}=4\sqrt{3}\times\dfrac{1}{\sqrt{2}}=2\sqrt{6}$

ㄷ. <참>

$\overline{\mathrm{AC}}=x$라 하고 삼각형 ABC에 코사인법칙을 이용하면

$6^2=(2\sqrt{6})^2+x^2-2\times2\sqrt{6}\times x\times\cos60°$, $(x-\sqrt{6})^2=18$,

$x=\sqrt{6}+3\sqrt{2}$

$\overline{\mathrm{AP}}=x-2\sqrt{2}=\sqrt{2}+\sqrt{6}$

30. 91

31. ⑤

ㄱ. n 이 홀수이면 항의 개수가 홀수이고

3 이 2 와 4 의 등차중항이므로 $3\in A_n$ (참)

ㄴ. $4=2+(n+1)d_1$ 이라 하면, 집합 A_n 의

모든 원소 2 , $2+\dfrac{2}{n+1}$, $\cdots$, $2+\dfrac{2n}{n+1}$, 4

는 공차가 $d_1=\dfrac{2}{n+1}$ 인 등차수열이다.

$4=2+(2n+2)d_2$ 라 하면, 집합 A_{2n+1} 의

모든 원소 2 , $2+\dfrac{1}{n+1}$, $\cdots$, $2+\dfrac{2n+1}{n+1}$, 4

는 공차가 $d_2=\dfrac{1}{n+1}$ 인 등차수열이다.

즉, $A_n\subset A_{2n+1}$ (참)

ㄷ. ㄴ에 의하여

$A_{2n+1}-A_n$

$=\left\{2+\dfrac{1}{n+1},\ 2+\dfrac{3}{n+1},\ \cdots,\ 2+\dfrac{2n+1}{n+1}\right\}$

$S_n=\dfrac{n+1}{2}\left(2+\dfrac{1}{n+1}+2+\dfrac{2n+1}{n+1}\right)$

$=3(n+1)$

$S_6+S_{13}=21+42=63$ (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ

32. ①

등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공차를 d라 하면

$S_9=27$이므로

$\dfrac{9(2a+8d)}{2}=27$ $\therefore$ $a+4d=3$

$|S_3|=27$이므로

$\left|\dfrac{3(2a+2d)}{2}\right|=27$, $|a+d|=9$

$\therefore$ $a+d=9$ 또는 $a+d=-9$

(i) $a+d=9$인 경우

$a+4d=3$과 $a+d=9$를 연립하여 풀면

$a=11$, $d=-2$가 되어 공차가 양수라는 조건에

맞지 않는다.

(ii) $a+d=-9$인 경우

$a+4d=3$과 $a+d=-9$를 연립하여 풀면

$a=-13$, $d=4$

따라서 $a_{10}=-13+9\times4=23$

33. ④

만약 등차수열 a_n의 공차 d가 0 이상이라면 (가)와 (나)의 조건을 절대 동시에 만족할 수 없다. 따라서 공차는 음수이다.

그렇다면 S_n은 위로 볼록한 이차함수 그래프 모양인데 이 때 (가)와 (나)의 조건을 동시에 만족하려면 그 대칭축이 반드시 $n=30$과 $n=31$의 중간 위치에 존재해야 한다. 즉 $a_{30}>0$, $a_{31}=0$이다.

$a_1=90$이므로 $a_{31}=90+30d=0$에서 $d=-3$

$S_n=\dfrac{n(180-3(n-1))}{2}=\dfrac{n(183-n)}{2}$

$T_n=|S_n|=\left|\dfrac{n(183-3n)}{2}\right|$

그런데 $T_n>T_{n+1}$을 만족하려면 그래프에서 n이 커질 때 T_n은 작아지는 영역이어야 하므로 $31\le n\le60$이어야 한다.

따라서 최솟값 = 31, 최댓값 = 60

34. 25

(i) -1, a, b를 적당히 나열하면 순서대로 등차수열을 이루므로

$-2=a+b$ 또는 $2a=b-1$ 또는 $2b=a-1$

그런데 $-1<a<0$, $b>0$이므로

$a+b>-1$ $\therefore$ $a+b\neq-2$

$-2<a-1<-1,\ 2b>0\ \ \therefore 2b\neq a-1$

따라서 주어진 조건을 만족시키는 것은

$2a=b-1$ …… ㉠

(ii) $-1,\ a,\ b$를 적당히 나열하면 순서대로 등비수열을 이루므로

$1=ab$ 또는 $a^2=-b$ 또는 $b^2=-a$

그런데 $-1<a<0,\ b>0$이므로

$ab<0\ \ \therefore ab\neq 1$

$a^2>0,\ -b<0\ \ \therefore a^2\neq -b$

따라서 주어진 조건을 만족시키는 것은

$b^2=-a$

즉, $a=-b^2$ …… ㉡

㉡을 ㉠에 대입하면

$-2b^2=b-1$

$2b^2+b-1=0,\ (2b-1)(b+1)=0$

이때, $b>0$이므로

$b=\frac{1}{2},\ a=-b^2=-\frac{1}{4}$

$\therefore 100(a+b)=100\times\frac{1}{4}=25$

35. ②

$(a_1\times a_k)\times(a_2\times a_{k-1})\times(a_3\times a_{k-2})\times(a_4\times a_{k-3})$

$=\frac{1}{8}\times 2^{11}=2^8$

등비수열 $\{a_n\}$에 대하여

$a_1\times a_k=a_2\times a_{k-1}=a_3\times a_{k-2}=a_4\times a_{k-3}$

이므로

$(a_1\times a_k)^4=2^8$

모든 항이 양수이므로

$a_1\times a_k=2^2$

이때 등비수열 $\{a_n\}$의 공비를 r라 하면

$a_1\times a_1 r^{k-1}=2^2$

$\therefore r^{k-1}=\frac{2^2}{(a_1)^2}$ … ㉠

$a_1\times a_2\times a_3\times\ \cdots\ \times a_k=2^{30}$에서

$a_1\times a_1 r\times a_1 r^2\times\ \cdots\ \times a_1 r^{k-1}=2^{30}$

$(a_1)^k\times r^{\frac{k(k-1)}{2}}=2^{30}$

$\therefore (a_1)^k\times(r^{k-1})^{\frac{k}{2}}=2^{30}$

이 식에 ㉠을 대입하면

$(a_1)^k\times\left\{\frac{2^2}{(a_1)^2}\right\}^{\frac{k}{2}}=2^{30}$

$2^k=2^{30}$

$\therefore k=30$

36. ④

등차수열 $\{a_n\}$의 공차를 $d(d\neq 0)$라 하면

(가)에 의하여

$\frac{5(2a_1+4d)}{2}=2\left|\frac{10(2a_1+9d)}{2}\right|$

$a_1+2d=2\left|2a_1+9d\right|$

(i) $a_1+2d=4a_1+18d$일 때, $a_1=-\frac{16}{3}d$

$a_3 a_6=\left(-\frac{10}{3}d\right)\times\left(-\frac{d}{3}\right)=\frac{10}{9}d^2>0$ 이므로

(나)의 조건을 만족시킨다.

(ii) $a_1+2d=-4a_1-18d$일 때, $a_1=-4d$

$a_3 a_6=(-2d)\times d=-2d^2<0$ 이므로

(나)의 조건에 모순이다.

따라서 $\frac{a_{21}}{a_1}=\frac{-\frac{16}{3}d+20d}{-\frac{16}{3}d}=-\frac{11}{4}$

37. ④

등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공차를 d라 하자.

조건 (가)에 의하여

$\sum_{n=1}^{2m-1}a_n=\frac{(2m-1)\{2a+(2m-2)d\}}{2}$

$=(2m-1)\{a+(m-1)d\}=0$

$2m-1>0$ 이므로 $a+(m-1)d=0$

즉, $a_m=0$

조건 (나)에 의하여

$\sum_{n=1}^{15}a_n\neq\sum_{n=1}^{15}|a_n|$ 이고 $\sum_{n=1}^{15}a_n>0$ 이므로

$a_m=0$을 만족시키는 m의 범위는 $m\leq 7$

수열의 항	항의 개수
$-(m-1)d,\ \cdots,\ -2d,\ -d$	$(m-1)$개
$0(=a_m)$	1개
$d,\ 2d,\ \cdots,\ (m-1)d$	$(m-1)$개
$md,\ (m+1)d,\ \cdots,\ a_{15}$	$(16-2m)$개

$\sum_{n=1}^{2m-1}a_n=0$ 이므로

$\sum_{n=1}^{15}a_n=\frac{(16-2m)\{2md+(15-2m)d\}}{2}$

$=15(8-m)d=45$

즉, $(8-m)d=3$

$\sum_{n=1}^{15}|a_n|$

$=2\times\frac{(m-1)\{d+(m-1)d\}}{2}+15(8-m)d$

$=(m-1)md+45=90$

$2\sum_{n=1}^{15}a_n=\sum_{n=1}^{15}|a_n|$ 이므로

$15(8-m)d=(m-1)md$

$m^2+14m-120=0$
$(m-6)(m+20)=0$
m 은 자연수이므로 $m=6$
$\sum_{n=1}^{15} a_n=30d=45$ 즉, $d=\frac{3}{2}$
따라서 $a_{14}=a_6+8d=0+12=12$

38. ①

S_n 의 이차항의 계수를 a 라 하자. 조건에서 $S_{10}=S_{50}$ 이고 S_n 은 $n=30$ 일 때 최댓값 410 을 가지므로
$S_n=a(n-30)^2+410$
$S_{10}=10$ 이므로 $10=a(10-30)^2+410$ 에서 $a=-1$
그러므로 $S_n=-(n-30)^2+410$
$S_m>S_{50}=S_{10}$을 만족시키는 자연수 m 의 범위는
$10<m<50$ 이므로 $p=11,\ q=49$
따라서 $\sum_{k=p}^{q} a_k=\sum_{k=11}^{49} a_k=S_{49}-S_{10}$
$=\{-(49-30)^2+410\}-10=39$

39. 26

등차수열 $\{a_n\}$의 공차를 d라 하면
(가)에서
$a_1+(a_1+d)+(a_1+2d)=159$이므로
$a_1+d=53$ ⋯⋯ ㉠
(나)에서
$(a_m-2d)+(a_m-d)+a_m=96$이므로
$a_m-d=32$ ⋯⋯ ㉡
㉠, ㉡에서 $a_1+a_m=85$이므로
$\sum_{k=1}^{m} a_k=\frac{m}{2}(a_1+a_m)=\frac{m}{2}\times 85=425$이고
$m=10$이다.
또한 ㉠, ㉡에서 $a_1=56,\ d=-3$이므로
$a_n=-3n+59$
따라서 $a_{11}=-33+59=26$

40. 150

주어진 x에 대한 이차방정식에서
$x^2-(n^2+8n-12)x+8n^3-12n^2=0$
$(x-n^2)(x-8n+12)=0$이므로 이차방정식의 해는
$x=n^2$ 또는 $x=8n-12$이다. 부등식
$n^2\ge 8n-12,\ n^2-8n+12\ge 0$에서
$(n-2)(n-6)\ge 0$이므로
$a_n=\begin{cases} n^2 & (n\le 2 \text{ 또는 } n\ge 6) \\ 8n-12 & (3\le n\le 5)\end{cases}$
로 놓을 수 있다. 따라서 구하는 값은
$\sum_{n=1}^{7} a_n=1+4+12+20+28+36+49=150$

41. 365

$f(n)=(n-3)^2+1$
$n=1$일 때, $a_n-b_n=f(5)-1=4$
$n=2$일 때, $a_n-b_n=f(6)-1=9$
$n\ge 3$일 때, $a_n-b_n=f(n+4)-f(n)=8n-8$
$\therefore \sum_{n=1}^{10} a_n=4+9+\sum_{n=3}^{10}(8n-8)=365$

42. 546

$(M=215+2\sqrt{61},\ m=215-2\sqrt{61})$

43. ④

$\sum_{k=1}^{n} a_n=a_{n+1}+1$에서
$a_1=a_2+1\ \ a_2=1$
$a_1+a_2=a_3+1,\ a_3=2$
$a_1+a_2+a_3=a_4+1,\ a_4=4$
$a_1+a_2+a_3+a_4=a_5+1\ \ a_5=8$

44. ④

$a_3-a_2=-\frac{1}{2}(a_2-a_1)=-6 \quad \therefore a_3=6$
$a_4-a_3=\frac{3}{2}(a_2-a_1)=18 \quad \therefore a_4=24$
$a_5-a_4=-\frac{1}{2}(a_4-a_3)=-9 \quad \therefore a_5=15$
$a_6-a_5=\frac{3}{2}(a_4-a_3)=27 \quad \therefore a_6=42$

45. 25

수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항이 3 이므로 $a_1>0$
이때 $a_2=3-4=-1$
$a_2<0$ 이므로
$a_3=(a_2-p)^2=(-1-p)^2=p^2+2p+1$
$a_3\ge 0$이므로
$a_4=p^2+2p-3$
(i) $p^2+2p-3\ge 0$, 즉 $p\le -3$ 또는 $p\ge 1$일 때,
$a_5=p^2+2p-7=1$에서
$p^2+2p-8=(p+4)(p-2)=0$
$\therefore p=-4$ 또는 $p=2$
(ii) $p^2+2p-3<0$, 즉 $-3<p<1$일 때,
$a_5=(p^2+2p-3-p)^2=(p^2+p-3)^2=1$에서
$p^2+p-3=1$ 또는 $p^2+p-3=-1$

$p^2+p-4=0$의 해는 $p=\dfrac{-1\pm\sqrt{17}}{2}$

$p^2+p-2=0$의 해는 $p=1$ 또는 $p=-2$

$-3<p<1$이므로

$p=\dfrac{-1-\sqrt{17}}{2}$ 또는 $p=-2$

(ⅰ), (ⅱ)에 의하여 모든 p의 값의 합은

$-4+2+\dfrac{-1-\sqrt{17}}{2}-2=-\dfrac{9}{2}-\dfrac{1}{2}\sqrt{17}$

이므로 $a=-\dfrac{9}{2}$, $b=-\dfrac{1}{2}$이고

$(a+b)^2=25$

46. ③

$a_1=1,\ \ b_1=1$ 이고,

$a_{n+1}=a_n+b_n,\ \ b_{n+1}=a_n$ 이므로

$a_2=2,\ b_2=1$

$a_3=3,\ b_3=2$

$a_4=5,\ b_4=3$

$a_5=8,\ b_5=5$

$a_6=13,\ b_6=8$

$a_7=21,\ b_7=13$

$\therefore\ a_7+b_7=34$

47. 41

점 $A_n(x_n,\ 0)$ ⇨ 점 $P_n\left(x_n,\ \dfrac{1}{2}x_n\right)$ ⇨ 점 $Q_n\left(\dfrac{1}{2}x_n,\ x_n\right)$ ⇨ 점 $R_n\left(\dfrac{1}{2}x_n,\ 0\right)$ ⇨ 점 $A_{n+1}\left(\dfrac{1}{2}x_n+2,\ 0\right)$

따라서 $x_{n+1}=\dfrac{1}{2}x_n+2$ (단, $x_1=8$)

48. ①

$a_1=k$이고, $a_{n+1}=-\dfrac{1}{3}a_n+\dfrac{9}{10}$

$p+q=\dfrac{17}{30}$

49. ①

확률에 대한 이해를 통해 점화식을 푸는 능력을 살펴보는 문제다. n초 후 점 P가 원점 O에 있을 확률을 P_n이라고 한다. 이 때 n초 후에 점 P가 원점 O에 위치할 확률은 $n-1$초에 점 P가 O 이외의 점에 위치하고, 1초 후에 점 O고 이동할 확률이다. $n-1$초에 점 P가 O에 있을 확률이 P_{n-1}이므로, $n-1$초에 점 P가 O이외의 점에 있을 확률은 $(1-P_{n-1})$이고 n초에 그 점 O이외의 한 점에서 점 O로 갈 확률은 $\dfrac{1}{3}$이다.

$\therefore\ P_n=\dfrac{1}{3}(1-P_{n-1})$

50. 10

직선 $\mathrm{A}_n\mathrm{B}_n$의 방정식은

$y-4=\dfrac{4}{2-x_n}(x-2)$ …… ①

직선 $\mathrm{A}_{n+1}\mathrm{Q}$의 방정식은

$y-4=\dfrac{2}{4-x_{n+1}}(x-4)$ …… ②

직선 $\mathrm{A}_n\mathrm{B}_n$과 직선 $\mathrm{A}_{n+1}\mathrm{Q}$의 y절편이 같으므로

$-\dfrac{8}{2-x_n}+4=-\dfrac{8}{4-x_{n+1}}+2$이고,

양변에 $(2-x_n)(4-x_{n+1})$을

곱해주면(그래프를 통하여 n이 자연수일 때,

$x_n\neq 2,\ x_{n+1}\neq 4$임을

확인할 수 있다.)

$-8(4-x_{n+1})+4(2-x_n)(4-x_{n+1})$

$=-8(2-x_n)+2(4-x_{n+1})(2-x_n)$

$-32+8x_{n+1}+4x_nx_{n+1}-16x_n-8x_{n+1}+32$

$=-16+8x_n+2x_nx_{n+1}-8x_n-4x_{n+1}+16$

$x_nx_{n+1}+2x_{n+1}-8x_n=0$

51. 67

$\left(s_1=\dfrac{3\sqrt{3}}{128},\ p=\dfrac{49}{256}\right)$