2021학년도 대학수학능력시험대비

백인대장 모의고사

수능대비

4 회

가형

정답 및 해설

100人대장
'Quality Education Creation'

2021학년도 수능대비 백인대장 모의고사

4회 정답

1. ④	11. ③	21. ②
2. ②	12. ④	22. 81
3. ⑤	13. ①	23. 4
4. ④	14. ④	24. 40
5. ②	15. ③	25. 13
6. ①	16. ②	26. 5
7. ⑤	17. ③	27. 45
8. ⑤	18. ②	28. 11
9. ②	19. ④	29. 527
10. ②	20. ③	30. 4

1) ④

2) ②

3) ⑤

4) ④

곡선 $y=\log_2(x-2)+3$의 점근선은 직선 $x=2$이고

곡선 $y=2^x+3$의 점근선은 직선 $y=3$이다.

따라서 두 곡선의 교점은 점 $(2,\ 3)$이고 $a+b=2+3=5$

5) ②

6) ①

7) ⑤

$(ax+b)^{10}$의 전개식에서

x^3항은 ${}_{10}\mathrm{C}_3(ax)^3b^7={}_{10}\mathrm{C}_3a^3b^7x^3$

x^4항은 ${}_{10}\mathrm{C}_4(ax)^4b^6={}_{10}\mathrm{C}_4a^4b^6x^4$

x^3의 계수와 x^4의 계수가 같으므로

${}_{10}\mathrm{C}_3a^3b^7={}_{10}\mathrm{C}_4a^4b^6,\ 120b=210a$

이므로 $\dfrac{b}{a}=\dfrac{7}{4}$

8) ⑤

9) ②

부분적분법 $\displaystyle\int_a^b uv'\,dx=[uv]_a^b-\int_a^b u'v\,dx$ 를 이용하자.

$u=2x+1$, $v'=\cos 2x$ 라고 놓으면

$u'=2$, $v=\dfrac{1}{2}\sin 2x$

$$\int_0^\pi (2x+1)\cos 2x\,dx$$

$$=\left[(2x+1)\cdot\frac{1}{2}\sin 2x\right]_0^\pi-\int_0^\pi \sin 2x\,dx$$

$$=0-\int_0^\pi \sin 2x\,dx$$

$$=-\left[-\frac{1}{2}\cos 2x\right]_0^\pi=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}=0$$

10) ②

11) ③

12) ④

13) ①

14) ④

$a+b=20$에서 $\dfrac{a+b}{2}=10$이므로 $a,\ b$의 평균이 10일 경우

$f(a)=f(b)$이다.

$x=10$에 대칭인 함수를 의미하므로 문제에 주어진 정규분포는

평균을 10으로 가지게 된다.

따라서 모집단의 분포는 $\mathrm{N}(10,\ 3^2)$을 따른다.

크기가 n인 표본을 임의로 추출하면 표본평균 $\overline{X}$는 $\mathrm{N}\left(10,\ \dfrac{3^2}{\mathrm{n}}\right)$인

정규분포를 따르게 된다. 따라서 이를 표준화 하면,

$$Z=\frac{\overline{X}-m}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}=\frac{\overline{X}-10}{\frac{3}{\sqrt{n}}}$$

따라서

$$\mathrm{P}(9.5\le\overline{X}\le 10.5)=\mathrm{P}\left(\frac{9.5-10}{\frac{3}{\sqrt{n}}}\le Z\le\frac{10.5-10}{\frac{3}{\sqrt{n}}}\right)$$

$$=\mathrm{P}\left(\frac{-0.5\sqrt{n}}{3}\le Z\le\frac{0.5\sqrt{n}}{3}\right)=0.8664$$

표준정규분포표에서

$\mathrm{P}(-1.5\le Z\le 1.5)=2\mathrm{P}(0\le Z\le 1.5)=0.8664$가 되므로,

$\dfrac{0.5\sqrt{n}}{3}=1.5,\quad \sqrt{n}=9$

$\therefore\ n=81$

15) ③

16) ②

17) ③

방정식 $e^{2x}-e^y+x^2-x=0$

에서 양변을 x에 대하여 미분하면

$2e^{2x}-\dfrac{dy}{dx}e^y+2x-1=0$

$x=0,\ y=0$일 때 $\dfrac{dy}{dx}=1$

$x=1,\ y=2$일 때, $\dfrac{dy}{dx}=2+\dfrac{1}{e^2}$

직선 l_1과 x축의 양의 방향이 이루는 각을 θ_1이라 하면

$\tan\theta_1=1$

직선 l_2와 x축의 양의 방향이 이루는 각을 θ_2라 하면

$\tan\theta_2=2+\dfrac{1}{e^2}$

$$\tan\theta=|\tan(\theta_2-\tan\theta_1)|=\frac{2+\frac{1}{e^2}-1}{1+\left(2+\frac{1}{e^2}\right)\cdot 1}=\frac{e^2+1}{3e^2+1}$$

18) ②

삼각형 POQ에서 사인법칙을 이용하면

$\overline{\mathrm{OQ}}=\dfrac{\cos 2\theta}{\cos\theta}$,

$S(\theta)=\dfrac{(1-\overline{\mathrm{OQ}})^2}{4}\cot\theta=\dfrac{(1-\cos\theta)^2(1+2\cos\theta)^2}{4\sin\theta\cos\theta}$

$\lim\limits_{\theta\to 0+}\dfrac{S(\theta)}{\theta^3}=\dfrac{9}{16}$

따라서 $80a=45$이다.

[다른 풀이]

사인법칙을 이용하지 않을 수도 있음

19) ④

$a=\dfrac{5}{12}, b=\dfrac{1}{3}, c=\dfrac{2}{9}, d=\dfrac{11}{4}$

(나) 정육각형의 대각선 하나와 나머지 4개의 점들 중 하나를 고르면 된다.

20) ③

그림에서 $\overline{\mathrm{MN}}=t$, $\overline{\mathrm{NK}}=2t$라 하면

$\overline{\mathrm{BN}}=\overline{\mathrm{MN}}=t$

따라서 $\overline{\mathrm{CK}}=4-3t$이고

$\dfrac{\overline{\mathrm{KL}}}{\overline{\mathrm{CK}}}=\dfrac{t}{4-3t}=\dfrac{1}{2}$

$2t=4-3t$에서 $t=\dfrac{4}{5}$

삼각형 ELM의 넓이는

$\dfrac{1}{2}\times 2t\times\left(\dfrac{4}{3}-t\right)=\dfrac{32}{75}$

$S_1=\dfrac{64}{75}$

E_2에서 새로 그린 네 개의 삼각형의 넓이는

$\dfrac{64}{75}\times\dfrac{4}{25}\times 2$

따라서

$S_n=\dfrac{64}{75}+\left(\dfrac{8}{25}\right)\dfrac{64}{75}+\left(\dfrac{8}{25}\right)^2\dfrac{64}{75}+\cdots+\left(\dfrac{8}{25}\right)^{n-1}\dfrac{64}{75}$

$\lim\limits_{n\to\infty}S_n=\dfrac{\frac{64}{75}}{1-\frac{8}{25}}=\dfrac{\frac{64}{75}}{\frac{17}{25}}=\dfrac{64}{51}$

21) ②

$f(0)=1$, $(xf(x))'=e^{-x^2}$, $xf(x)=\displaystyle\int_0^x e^{-t^2}dt$, $f(x)=f(-x)$

ㄱ. <참>

조건 (가)에서 $x=1$을 대입하면 $f(1)=e^{-1}-f'(1)\ \cdots\ (\alpha)$

조건 (가)의 양변을 x로 미분하면

$f'(x)=-2xe^{-x^2}-f'(x)-xf''(x)$

위 식에 $x=1$을 대입하면 $f'(1)=-2e^{-1}-f'(1)-f''(1)\ \cdots$ (β)

$(\alpha)-(\beta)$: $f(1)-f'(1)=3e^{-1}+f''(1)$

ㄴ. <참>

$g(-x)=\displaystyle\int_0^{-x}(-x)(-x-2t)f'(t)\,dt$

$t=-k$로 치환하면 위 식은

$\displaystyle\int_0^x(-x)(-x+2k)f'(-k)\,(-dk)=$

$\displaystyle\int_0^x x(x-2k)\{-f'(-k)\}\,dk$

$=\displaystyle\int_0^x x(x-2k)f'(k)\,dk$ ($\because$ $f(x)=f(-x)$이므로 $f'(x)=-f'(-x)$)

ㄷ. <거짓>

$g''(x)=2\{f(x)-f(0)\}-2xf'(x)-x^2f''(x)$

$g''(1)=2\{f(1)-1\}-2f'(1)-f''(1)=2\{f(1)-1+e^{-1}\}$

($\because$ (β) 이용)

$=2\displaystyle\int_0^1\left(e^{-x^2}-e^{-x}\right)dx>0$ ($\because$ $0\le x\le 1$일 때, $-x^2\ge -x$, $e^{-x^2}\ge e^{-x}$)

22) 81

23) 4

24) 40

$x^2-7x+\log_2 2a=0$의 두 근이 $\log_2 a$, $\log_2 2b$이므로

이차방정식의 근과 계수의 관계에 대하여

$\log_2 a+\log_2 2b=7$, $\log_2 a\times\log_2 2b=\log_2 2a$

$\log_2 a+\log_2 2b=7$에서

$\log_{@}a+(1+\log_2 b)=7$

$\log_2 a+\log_2 b=6$

$\log_2 a\times\log_2 2b=\log_2 2a$에서

$\log_2 a\times(1+\log_2 b)=1+\log_2 a$

$\log_2 a\times\log_2 b=1$

따라서

$\log_a 2b+\dfrac{1}{\log_{2a}b}$

$=\log_a 2b+\log_b 2a$

$=\dfrac{\log_2 2b}{\log_2 a}+\dfrac{\log_2 2a}{\log_2 b}$

$=\dfrac{(1+\log_2 b)\log_2 b+(1+\log_2 a)\log_2 a}{\log_2 a\times\log_2 b}$

$$=\frac{(\log_2 a+\log_2 b)+(\log_2 a)^2+(\log_2 b)^2}{\log_2 a\times\log_2 b}$$

$$=\frac{(\log_2 a+\log_2 b)+(\log_2 a+\log_2 b)^2-2\log_2 a\times\log_2 b}{\log_2 a\times\log_2 b}$$

$$=\frac{6+6^2-2\times 1}{1}=40$$

25) 13

$\mathrm{P}(B|A)=\frac{\mathrm{P}(B\cap A)}{\mathrm{P}(A)}=\frac{\frac{1}{9}}{\frac{1}{4}}=\frac{4}{9}$ 이므로

$p+q=9+4=13$

26) 5

27) 45

$a=3,\ b=6$

28) 11

$\overline{\mathrm{AB}}=2$라 하자.

삼각형 ABM에서 코사인법칙을 이용하면 $\overline{\mathrm{BM}}=\sqrt{7}$

$\overline{\mathrm{DM}}=\overline{\mathrm{AM}}\times\frac{1}{\sqrt{7}},\ \overline{\mathrm{BD}}=\frac{8}{\sqrt{7}}\ \cdots\ (1)$

$\overline{\mathrm{AD}}=\overline{\mathrm{BC}}\times\frac{1}{\sqrt{7}}=\frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{7}}$

삼각형 ABD에서 코사인법칙을 이용하면

$\cos\angle\mathrm{BAD}=-\sqrt{\frac{3}{7}}$ 이므로

$\sin^2\angle\mathrm{BAD}=1-\frac{3}{7}=\frac{4}{7}=\frac{q}{p}$

$p+q=11$

[다른 풀이]

$\overline{\mathrm{AB}}=2$라 할 때, 사각형 ABCD의 외접원의 반지름의 길이는 2이다.

(1)에서 $\overline{\mathrm{BD}}=\frac{8}{\sqrt{7}}=4\sin\angle\mathrm{BAD},\ \sin\angle\mathrm{BAD}=\frac{2}{\sqrt{7}}$

29) 527

30) 4

일반성을 잃지 않고 $s\geq t$라 하자. 문제의 조건에서 $1\leq x\leq e$일 때, $t\leq kx-\ln x\leq s$를 만족해야한다. 따라서 $h(x)=kx-\ln x$라 하면 $1\leq x\leq e$에서 $h(x)$의 최솟값보다 t는 작거나 같고 최댓값보다 s는 크거나 같아야 한다. 따라서 $f(k)$는 $1\leq x\leq e$에서에서 $h(x)$의 최댓값과 최솟값의 차로 주어진다.

$h'(x)=k-\frac{1}{x}$에서 $x=\frac{1}{k}$에서 $h(x)$는 극솟값을 갖는다.

따라서 $\frac{1}{e}\leq k\leq 1$일 때, $h(x)$의 최솟값은 $h\left(\frac{1}{k}\right)=1+\ln k$이고 최댓값은 $h(1)=k,\ h(e)=ke-1$ 중 더 큰 값으로 결정된다.
따라서 다음의 두 가지 경우로 나눠서 생각할 수 있다.

(1) $k<\frac{1}{e-1}$ 일 때, $f(k)=k-1-\ln k$

(2) $k\geq\frac{1}{e-1}$ 일 때, $f(k)=ke-1-\ln k-1$

문제의 $\frac{2}{e}$와 $\frac{1}{2e-3}$는 $\frac{1}{e-1}<\frac{2}{e}<1,\ \frac{1}{e}<\frac{1}{2e-3}<\frac{1}{e-1}$를 만족하므로 $f'\left(\frac{2}{e}\right)=\frac{e}{2},\ f'\left(\frac{1}{2e-3}\right)=4-2e$를 얻는다. 따라서 구하려는 답은 4가 된다.