

제 2 교시

수학 영역(가형)

5지선다형

1. 두 실수 a, b 에 대하여 $a = \sqrt{2}, b^2 = 3$ 일 때, $(ab)^4$ 의 값은?
[2점]

- ① 24 ② 27 ③ 32
- ④ 36 ⑤ 40

2. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{4n^2 + 4n + 5}}{2n + 5}$ 의 값은? [2점]

- ① $\frac{1}{2}$ ② 1 ③ $\frac{3}{2}$
- ④ 2 ⑤ $\frac{5}{2}$

3. $\lim_{x \rightarrow 0} (1 + \sin 2x)^{\frac{1}{x}}$ 의 값은? [2점]

- ① e^{-2} ② e^{-1} ③ 1
- ④ e ⑤ e^2

4. 곡선 $y = \log_2(x-2) + 3$ 의 점근선과 곡선 $y = 2^x + 3$ 의 점근선의 교점이 (a, b) 이다. $a+b$ 의 값은? [3점]

- ① 2 ② 3 ③ 4
- ④ 5 ⑤ 6

5. 수열 $\{a_n\}$ 은 $a_1 = 1$ 이고, 모든 자연수 n 에 대하여

$$a_{n+1} = (-1)^{n+1} \times a_n + 3^n$$

을 만족시킨다. a_5 의 값은? [3점]

- ① 32 ② 49 ③ 113
 ④ 211 ⑤ 275

6. $\tan\left(\frac{\pi}{4} + \theta\right) = 2$ 이고, $\sin\theta < 0$ 일 때, $\sec\theta$ 의 값은? [3점]

- ① $-\frac{\sqrt{10}}{3}$ ② $-\frac{\sqrt{10}}{6}$ ③ $-\frac{\sqrt{10}}{9}$
 ④ $\frac{\sqrt{10}}{6}$ ⑤ $\frac{\sqrt{10}}{3}$

7. 다항식 $(ax+b)^{10}$ 의 전개식에서 x^3 의 계수와 x^4 의 계수가 같을 때, $\frac{b}{a}$ 의 값은? (단, $ab \neq 0$) [3점]

- ① $\frac{4}{7}$ ② $\frac{3}{5}$ ③ $\frac{5}{4}$
 ④ $\frac{5}{3}$ ⑤ $\frac{7}{4}$

8. 등비수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항부터 제 n 항까지의 합을 S_n 이라 하자.

$a_1 \times a_3 \times a_7 = 32$, $\frac{S_8}{S_4} = 2$ 일 때, a_{17} 의 값은? [3점]

- ① 12 ② 20 ③ 24
 ④ 28 ⑤ 32

9. $\int_0^\pi (2x+1)\cos 2x dx$ 의 값은? [3점]

- ① -1 ② 0 ③ 1
 ④ 2 ⑤ 3

10. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left(\frac{m}{3}\right)^{n+1} + 2}{\left(\frac{m}{3}\right)^n + 1} = 2$ 가 되도록 하는 정수 m 의 개수는?

[3점]

- ① 5 ② 6 ③ 7
 ④ 8 ⑤ 9

11. 한 개의 주사위를 세 번 던져서 나오는 눈의 수를 차례로 a, b, c 라 할 때, $a \times b \times c$ 가 짝수일 확률은? [3점]

- ① $\frac{13}{16}$ ② $\frac{27}{32}$ ③ $\frac{7}{8}$
 ④ $\frac{29}{32}$ ⑤ $\frac{15}{16}$

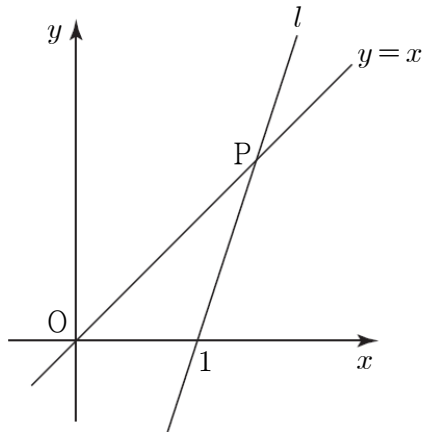
12. 확률변수 X 의 확률질량함수

$$P(X=x) = p_i \quad (i = 1, 2, 3, 4, 5)$$

에 대하여 수열 $\{p_i\}$ 가 등차수열을 이룰 때, p_3 의 값은? [3점]

- ① $\frac{1}{2}$ ② $\frac{1}{3}$ ③ $\frac{1}{4}$
 ④ $\frac{1}{5}$ ⑤ $\frac{1}{6}$

13. 직선 $y=x$ 와 기울기가 $\tan\frac{5}{12}\pi$ 이고 x 절편이 1인 직선 l 이 있다. 직선 $y=x$ 와 직선 l 이 만나는 점을 P라 할 때, 선분 OP의 길이는? (단, O는 원점이다.) [3점]



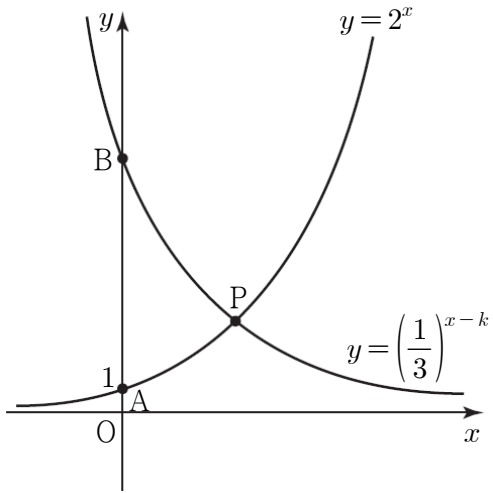
- ① $\frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{2}$ ② $\frac{\sqrt{6} + \sqrt{3}}{2}$ ③ $\frac{\sqrt{6} + 2}{2}$
 ④ $\sqrt{6} + \sqrt{2}$ ⑤ $\sqrt{6} + \sqrt{3}$

14. 어느 모집단의 확률변수 X 는 평균이 m 이고 분산이 9인 정규분포를 따른다. 확률변수 X 의 확률밀도함수 $f(x)$ 는 $a+b=20$ 을 만족하는 임의의 실수 a, b 에 대하여 $f(a)=f(b)$ 를 만족한다. 이 모집단에서 크기 n 인 표본을 임의추출하여 구한 표본평균을 \bar{X} 라고 하자. $P(9.5 \leq \bar{X} \leq 10.5) = 0.8664$ 를 만족시키는 표본의 크기 n 의 값을 아래의 표준정규분포표를 이용하여 구한 것은? [4점]

z	$P(0 \leq Z \leq z)$
0.5	0.1915
1.0	0.3413
1.5	0.4332
2.0	0.4772
2.5	0.4938

- ① 36 ② 49 ③ 64
 ④ 81 ⑤ 100

15. 그림과 같이 두 곡선 $y=2^x$, $y=\left(\frac{1}{3}\right)^{x-k}$ 의 그래프가 y 축과 만나는 점을 각각 A, B라 하고, 두 곡선 $y=2^x$, $y=\left(\frac{1}{3}\right)^{x-k}$ 의 교점을 P라 하자. $\overline{AB}=5$ 일 때, 삼각형 APB의 넓이는? [4점]



- ① $\frac{1}{2}$ ② 2 ③ $\frac{5}{2}$
- ④ 3 ⑤ $\frac{7}{2}$

16. 0이 적혀있는 카드가 2장, 1이 적혀있는 카드가 1장, 2, 3, 6이 적혀있는 카드가 각각 2장씩 총 9장의 카드가 있다. 이 카드 중에서 4장의 카드를 뽑아 일렬로 배열하여 네 자리의 자연수를 만든다고 할 때, 만든 네 자리 자연수 중 각 자리의 수의 합이 8인 경우의 수는? [4점]

0	0	1	2	2	3	3	6	6
---	---	---	---	---	---	---	---	---

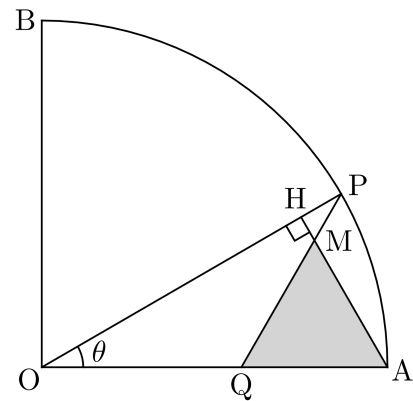
- ① 25 ② 27 ③ 29
- ④ 31 ⑤ 33

17. 곡선 $e^{2x} - e^y + x^2 - x = 0$ 위의 점 $(0, 0)$ 에서의 접선을 l_1 이라 하고 점 $(1, 2)$ 에서의 접선을 l_2 라 하자. 두 직선 l_1, l_2 가 이루는 예각의 크기를 θ 라 할 때, $\tan\theta$ 의 값은? [4점]

- ① $\frac{e^2 + 2}{3e^2}$ ② $\frac{e^2 + 2}{3e^2 + 1}$ ③ $\frac{e^2 + 1}{3e^2 + 1}$
- ④ $\frac{e^2 + 3}{3e^2}$ ⑤ $\frac{e^2 + 3}{3e^2 + 1}$

18. 그림과 같이 반지름의 길이가 1이고 중심각의 크기가 $\frac{\pi}{2}$ 인 부채꼴 OAB가 있다. 호 AB 위의 점 P와 선분 OA 위의 점 Q에 대하여 점 A에서 선분 OP에 내린 수선의 발을 H, 두 선분 AH와 PQ의 교점을 M이라 하자. $\angle POA = \theta$, $\overline{MA} = \overline{MQ}$ 일 때, 삼각형 MQA의 넓이를 $S(\theta)$ 라 하자. $\lim_{\theta \rightarrow 0^+} \frac{S(\theta)}{\theta^3} = a$ 일 때, $80a$ 의 값은?

(단, $0 < \theta < \frac{\pi}{4}$) [4점]



- ① 40 ② 45 ③ 50
- ④ 55 ⑤ 60

19. 다음은 정육각형의 서로 다른 6개의 꼭짓점에 임의로 1부터 6까지의 번호를 매기고 아래 규칙과 같은 게임을 할 때, 얻는 점수의 기댓값을 구하는 과정이다.

- (가) 주사위를 3번 굴려 숫자를 기록한다.
- (나) 나온 숫자에 해당하는 꼭짓점끼리 이어서 만들 수 있는 모든 선분을 긋는다. (단, 없다면 긋지 않는다.)
- (다) 만들어진 도형이 점인 경우 1점, 선분인 경우 2점, 직각삼각형인 경우 3점, 예각 또는 둔각삼각형인 경우 4점을 얻는다. (단, 중복으로 점수를 받지 않고 받을 수 있는 최대 점수를 받는다.)

게임을 진행할 때, 얻은 점수를 확률변수 X 라 하고, 이에 대한 확률질량함수 $P(X=k)$ ($k=1, 2, 3, 4$)를 구해보자.

1) $k=1$ 일 때
점만 만들어지는 경우는 주사위에서 모두 같은 숫자가 나올 때이므로 $P(X=1) = \frac{1}{36}$ 이다.

2) $k=2$ 일 때
점과 선분만 만들어지는 경우는 주사위에서 같은 숫자가 2번 그와 다른 숫자가 1번 나올 때이므로 $P(X=2) = \frac{[가]}{[가]}$

3) $k=3$ 일 때
정육각형에 외접하는 원을 그리고 원주각이 90° 인 경우를 살펴보면 직각삼각형이 만들어지는 경우를 관찰할 수 있다. 이를 활용하면 $P(X=3) = \frac{[나]}{[나]}$ 이다.

4) $k=4$ 일 때
 $\sum_{k=1}^4 P(X=k) = 1$ 이므로 $P(X=4) = \frac{[다]}{[다]}$ 이다.
따라서 얻는 점수의 기댓값은 $E(X) = \frac{[라]}{[라]}$ 이다.

위의 과정에서 (가), (나), (다), (라)에 알맞은 수를 각각

a, b, c, d 라 할 때, $\frac{d-a}{b-c}$ 의 값은? [4점]

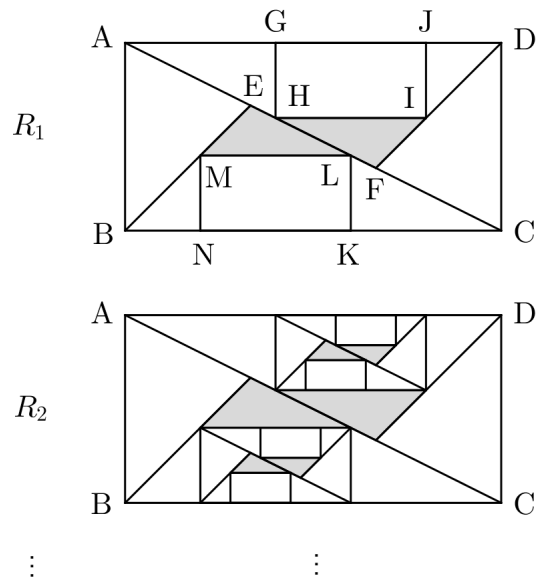
- ① 18 ② 19 ③ 20
- ④ 21 ⑤ 22

20. 그림과 같이 $\overline{AB}=2, \overline{BC}=4$ 인 직사각형 ABCD가 있다. 선분 AC를 1:2로 내분하는 점을 E, 2:1로 내분하는 점을 F라 하자.

선분 AD 위에 변 GJ가 있고, 선분 AC 위에 점 H가 있고 선분 DF 위에 점 I가 있으며 $\overline{GH}:\overline{HI}=1:2$ 인 직사각형 GHIJ를 그리고, 선분 BC 위에 변 KN이 있고, 선분 AC 위에 점 L이 있고 선분 BE 위에 점 M이 있으며 $\overline{KL}:\overline{LM}=1:2$ 인 직사각형 KLMN을 그린다. 이때, 삼각형 FHI와 삼각형 ELM의 내부 영역을 색칠하여 얻은 그림을 R_1 이라 하자.

그림 R_1 에서 두 직사각형 GHIJ, KLMN에 그림 R_1 을 얻은 것과 같은 방법으로 만들어지는 4개의 삼각형의 내부 영역을 색칠하여 얻은 그림을 R_2 라 하자.

이와 같은 과정을 계속하여 n 번째 얻은 그림 R_n 에 색칠되어 있는 부분의 넓이를 S_n 이라 할 때, $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ 의 값은? [4점]



- ① $\frac{64}{63}$ ② $\frac{64}{57}$ ③ $\frac{64}{51}$
- ④ $\frac{64}{45}$ ⑤ $\frac{64}{39}$

21. 실수 전체의 집합에서 연속인 이계도함수를 가지는 두 함수 $f(x), g(x)$ 가 모든 실수 x 에 대하여 다음 조건을 만족시킬 때, <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

(가) $f(x) = e^{-x^2} - xf'(x)$
 (나) $g(x) = \int_0^x x(x-2t)f'(t) dt$

— < 보 기 > —
 ㄱ. $f(1) - f'(1) - f''(1) = 3e^{-1}$
 ㄴ. $g(x) = g(-x)$
 ㄷ. $g''(1) < 0$

- ① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
 ④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

단답형

22. ${}_3\Pi_4$ 의 값을 구하시오. [3점]

23. 함수 $f(x) = \sin 2x - e^{-2x}$ 에 대하여 $f'(0)$ 의 값을 구하시오. [3점]

24. 이차방정식 $x^2 - 7x + \log_2 2a = 0$ 의 두 근이 $\log_2 a, \log_2 2b$ 일 때, $\log_a 2b + \log_b 2a$ 의 값을 구하시오.

(단, a, b 는 양수이고, $a \neq \frac{1}{2}, a \neq 1, b \neq 1$ 이다.) [3점]

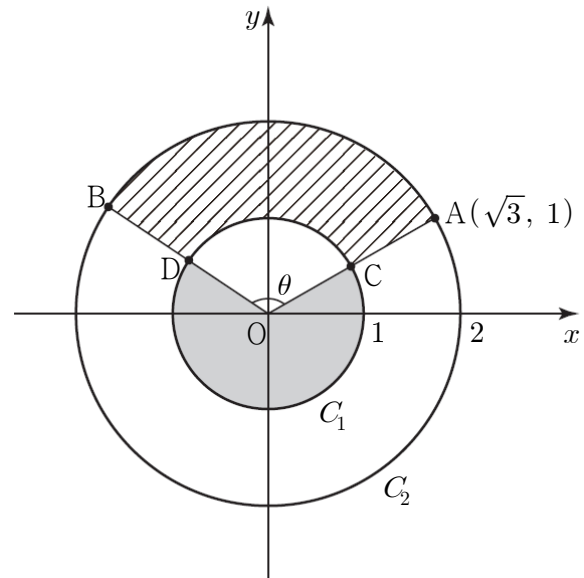
25. 두 사건 A, B 에 대하여

$$P(A) = \frac{1}{4}, P(A \cap B) = \frac{1}{9}$$

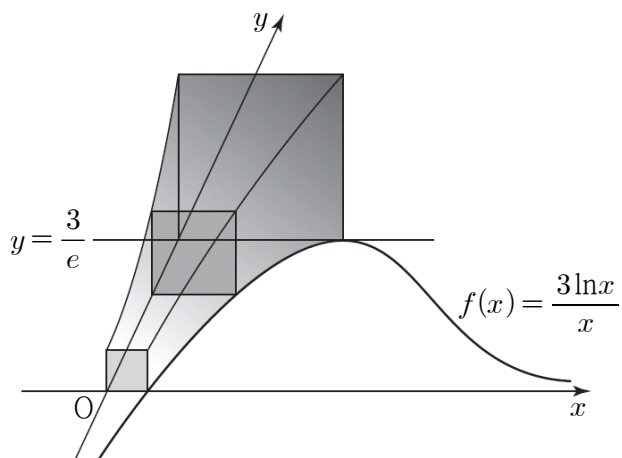
일 때, $P(B|A) = \frac{q}{p}$ 이다. $p+q$ 의 값을 구하시오.

(단, p 와 q 는 서로소인 자연수이다.) [3점]

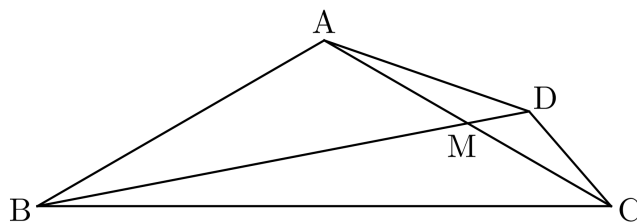
26. 그림과 같이 중심이 원점 O 이고, 반지름의 길이가 1, 2인 두 원 C_1, C_2 가 있다. 원 C_2 위의 두 점 $A(\sqrt{3}, 1), B$ 에 대하여 $\angle AOB = \theta$ 라 하고, 두 선분 OA, OB 가 원 C_1 과 만나는 점을 각각 C, D 라 하자. 색칠된 부채꼴 COD 의 넓이와 빗금 친 도형 $ABCD$ 의 넓이가 서로 같을 때, 점 D 의 좌표는 (a, b) 이다. $8a^2 + 4b^2$ 의 값을 구하시오. (단, 점 A 는 제 1사분면에 점 B 는 제 2사분면에 위치한다.) [4점]



27. 그림과 같이 함수 $f(x) = \frac{3\ln x}{x}$ 의 그래프와 직선 $y = \frac{3}{e}$, y 축 및 x 축으로 둘러싸인 부분을 밑면으로 하고, y 축에 수직으로 자른 단면이 모두 정사각형인 입체도형의 부피가 $a \times e - b$ 일 때, $a^2 + b^2$ 의 값을 구하시오. (단, a, b 는 유리수이다.) [4점]



28. 그림과 같이 $\overline{AB} = \overline{AC}$, $\angle BAC = \angle BDC = \frac{2\pi}{3}$ 인 사각형 ABCD에 대하여 두 대각선 AC, BD의 교점을 M이라 하자. $\overline{AM} = \overline{CM}$ 일 때, $\sin^2 \angle BAD = \frac{q}{p}$ 이다. $p+q$ 의 값을 구하시오. (단, p 와 q 는 서로소인 자연수이다.) [4점]



29. 두 사람 A, B가 다음 규칙에 따라 동전을 던져 점수를 얻는 게임을 한다.

- (가) 동전을 던져 앞면이 나오면 1점을 얻고, 그 사람이 다시 동전을 던진다.
 (나) 동전을 던져 뒷면이 나오면 점수를 얻지 못하고, 상대방이 동전을 던진다.
 (다) 먼저 4점을 얻는 사람이 이기고 게임을 끝낸다.

A부터 동전을 던지기 시작하여 두 사람 A, B가 던진 횟수의 합이 12이고, A가 4점, B가 2점을 얻어 A가 이길 확률은 $\frac{q}{p}$ 일 때, $p+q$ 의 값을 구하시오. (단, p, q 는 서로소인 자연수이다.) [4점]

30. 실수 k 에 대하여 다음 조건을 만족시키는 두 실수 s 와 t 의 차 $|s-t|$ 의 최솟값을 $f(k)$ 라 하자.

$$1 \leq x \leq e \text{인 임의의 실수 } x \text{에 대하여}$$

$$(kx - \ln x - s)(kx - \ln x - t) \leq 0$$

$4f'\left(\frac{2}{e}\right) + f'\left(\frac{1}{2e-3}\right)$ 의 값을 구하시오. [4점]



'Quality Education Creation'