2020. 09. 08

고3 이과 9월 평가원 모의고사 대비

확률과 통계

주요 논점 정리

Passion

Challenge

Professional

Action

100人대장

'Quality Education Creation'

#1 중복조합

(1) 케이스 분류 또는 여사건

(2) ‘차’ 조건

(3) 조건 반전 (‘이하’ 조건)

(4) 같.포,순 + ‘변화’에 조건

#1

1. 그림과 같이 전광판의 5개의 칸에 각각 0, 1, 2, 3, 4, 5 중 한 개의 숫자가 임의로 나타난다.
이 전광판에 나타나는 숫자의 합이 20인 경우의 수는?

① 96 ② 126 ③ 144
④ 196 ⑤ 256

#1

2. 두 기차역 A와 B를 연결하는 철로 사이에 15개의 역이 있다. A역에서 출발한 기차가 B역에 도착할 때까지 다음 조건에 따라 운행한다고 한다.

(가) A역과 B역 사이의 15개의 역 중에서 3개의 역에 정차한다. (나) 출발 후 첫 번째 정차한 역과 두 번째 정차한 역 사이에 적어도 한 개의 역이 있다. (다) 출발 후 두 번째 정차한 역과 세 번째 정차한 역 사이에 적어도 두 개의 역이 있다.

A역에서 B역까지 열차가 운행하는 경우의 수는?

① 210 ② 215 ③ 220
④ 225 ⑤ 230

#1

3. 두 종류의 카드 A, B가 7장씩 있다. 이 14장의 카드 중에서 7장의 카드를 택하여 일렬로 나열할 때, AB가 이 순서대로 연속하여 놓인 것이 한 번만 나타나도록 카드를 나열하는 경우의 수는? (단, 같은 종류의 카드는 서로 구별하지 않는다.)

① 55 ② 56 ③ 57
④ 58 ⑤ 59

#1

4. 다음 조건을 만족시키는 2 이상의 자연수 a, b, c, d의 모든 순서쌍 (a, b, c, d)의 개수는?

(가) $a+b+c+d=30$
(나) a, b, c 는 모두 d의 배수이다.

① 95 ② 97 ③ 105
④ 115 ⑤ 117

#2 확률의 법칙

(1) 확률의 덧셈 법칙

(1-1) 여사건의 확률

(2) 확률의 곱셈 법칙

#2

1. 숫자 $1,\ 1,\ 2,\ 2,\ 3,\ 3$이 하나씩 적혀 있는 6개의 공이 들어 있는 주머니가 있다. 이 주머니에서 한 개의 공을 임의로 꺼내어 공에 적힌 수를 확인한 후 다시 넣지 않는다.
이와 같은 시행을 6번 반복할 때, $k(1 \le k \le 6)$번째 꺼낸 공에 적힌 수를 a_k라 하자. 두 자연수 $m,\ n$을

$$m = a_1 \times 100 + a_2 \times 10 + a_3,$$
$$n = a_4 \times 100 + a_5 \times 10 + a_6$$

이라 할 때, $m > n$일 확률은 $\dfrac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오.
(단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]

#2

2. 어느 회의실에 5개의 고정된 의자가 있다. 이 회의실에 사회자를 비롯하여 회의 참석자인 갑과 을 총3 명이 자리에 앉아 회의 준비를 하고 있었다. 잠시 후 새로운 회의 참여자 2 명이 더 들어왔다. 원활한 회의 진행을 위해 사회자를 제외한 회의 참여자들의 자리를 재배치하였다. 이때 갑과 을이 모두 처음 자리가 아닌 다른 자리에 앉게 될 확률은?

① $\dfrac{1}{2}$　② $\dfrac{13}{24}$　③ $\dfrac{7}{12}$　④ $\dfrac{5}{8}$　⑤ $\dfrac{2}{3}$

#2

3. 흰 공 3개와 검은 공 4개가 들어 있는 상자에서 임의로 1개의 공을 꺼내는 시행을 반복할 때, 흰 공을 모두 꺼내면 시행을 멈춘다. 5번 이내에 시행을 멈출 확률을 p라 할 때, $35p$의 값을 구하시오.

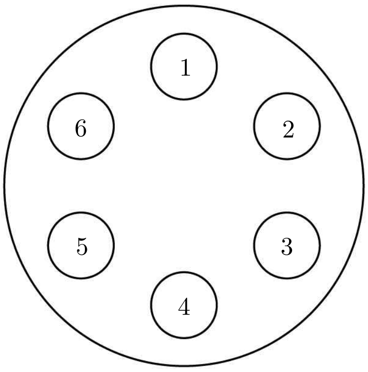
#2

4. 그림과 같이 3개의 주머니에 모양과 크기가 같은 공이 각각 3개씩 들어 있고, 각 주머니에 있는 공에는 1, 2, 3의 숫자가 한 개씩 적혀 있다. 각 주머니에서 임의로 공을 하나씩 꺼낼 때, 꺼낸 공에 적힌 세 숫자가 모두 다르면 상품을 받기로 하였다. 갑이 먼저 각 주머니에서 임 의로 공을 한 개씩 꺼낸 다음, 을이 각 주머니에서 임의로 공을 한 개 씩 꺼낸다. 갑이 상품을 받지 못했을 때, 을이 상품을 받았을 확률은 $\frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, 갑이 꺼낸 공은 다시 넣지 않고, p와 q는 서로소인 자연수이다.)

#3 케이스 분류(변별력)

#3

1. 그림과 같이 원탁 위에 1 부터 6 까지 자연수가 하나씩 적혀 있는 6 개의 접시가 놓여 있고 같은 종류의 쿠키 9 개를 접시 위에 담으려고 한다. 한 개의 주사위를 던져 나온 눈의 수가 적혀 있는 접시와 그 접시에 이웃하는 양 옆의 접시 위에 3 개의 쿠키를 각각 1 개씩 담는 시행을 한다. 예를 들어, 주사위를 던져 나온 눈의 수가 1 인 경우 6 , 1 , 2 가 적혀 있는 접시 위에 쿠키를 각각 1 개씩 담는다. 이 시행을 3 번 반복하여 9 개의 쿠키를 모두 접시 위에 담을 때, 6 개의 접시 위에 각각 한 개 이상의 쿠키가 담겨 있을 확률은? [4점]



① $\frac{7}{18}$　② $\frac{17}{36}$　③ $\frac{5}{9}$
④ $\frac{23}{36}$　⑤ $\frac{13}{18}$

#3

2. 집합 $X=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6\}$에 대하여 함수 $f: X \rightarrow X$ 중에서 다음 조건을 만족시키는 함수 f의 개수를 구하시오. [4점]

> (가) $f(3)\times f(6)$은 3의 배수이다.
> (나) 집합 X의 임의의 두 원소 x_1, x_2에 대하여
> $x_1 < x_2$이면 $f(x_1) \leq f(x_2)$이다.

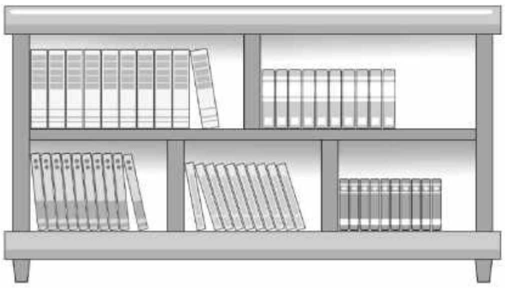
#3

3. 검은색 볼펜 1자루, 파란색 볼펜 4자루, 빨간색 볼펜 4자루가 있다. 이 9자루의 볼펜 중에서 5자루를 선택하여 2명의 학생에게 남김없이 나누어 주는 경우의 수를 구하시오. (단, 같은 색 볼펜끼리는 서로 구별하지 않고, 볼펜을 1자루도 받지 못하는 학생이 있을 수 있다.) [4점]

#3

4. 어느 학교 도서관에서 독서프로그램 운영을 위해 철학, 사회과학, 자연과학, 문학, 역사 분야에 해당하는 책을 각 분야별로 10권씩 총 50권을 준비하였다. 한 학급에서 이 50권의 책 중 24권의 책을 선택하려고 할 때, 다음 조건을 만족시키도록 선택하는 경우의 수를 구하시오. (단, 같은 분야에 해당하는 책은 서로 구별하지 않는다.) [4점]

(가) 철학, 사회과학, 자연과학 각각의 분야에 해당하는 책은 4권 이상씩 선택한다.
(나) 문학 분야에 해당하는 책은 선택하지 않거나 4권 이상 선택한다.
(다) 역사 분야에 해당하는 책은 선택하지 않거나 4권 이상 선택한다.



Level 1

1 다음 조건을 만족시키는 음이 아닌 정수 $a,\ b,\ c,\ d,\ e$의 모든 순서쌍 $(a,\ b,\ c,\ d,\ e)$의 개수를 구하시오. [4점]

> (가) $a,\ b,\ c,\ d,\ e$ 중에서 0의 개수는 2이다.
> (나) $a+b+c+d+e=6$
> (다) $a \neq b$

2 3개의 문자 $x,\ y,\ z$에서 중복을 허락하여 10개를 택해 일렬로 나열할 때, 다음 조건을 만족시키도록 나열하는 경우의 수는?

> (가) x와 y는 한 번만 서로 이웃한다.
> (나) y와 z는 한 번만 서로 이웃한다.
> (다) z와 x는 한 번만 서로 이웃한다.

① 500 ② 504 ③ 508
④ 512 ⑤ 516

3 다음 조건을 만족시키는 2 이상의 자연수 a, b, c, d의 모든 순서쌍 (a, b, c, d)의 개수는?

(가) $a+b+c+d=30$
(나) a, b, c 는 모두 d의 배수이다.

① 95 ② 97 ③ 105
④ 115 ⑤ 117

4 집합 $X=\{1, 2, 3\}$에서 집합 $Y=\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$로의 함수 f가

$$f(i+1)-f(i)\geq i+1 \text{ (단, } i=1, 2)$$

를 만족시킬 때, 함수 f의 개수는?

① 20 ② 24 ③ 28
④ 32 ⑤ 36

5 다음 조건을 만족시키는 음이 아닌 정수 x, y, z의 모든 순서쌍 $(x,\ y,\ z)$의 개수는?

(가) $x+y+z=10$
(나) $0<y+z<10$

① 39 ② 44 ③ 49
④ 54 ⑤ 59

6 집합 $X=\{n \mid n$은 20 이하의 자연수$\}$에 대하여 $a \in X$, $b \in X$인 두 자연수 a, b를 중복을 허락하여 선택할 때, $\sin\frac{a\pi}{3} \times \cos\frac{b\pi}{4}=0$이 성립할 확률을 $\frac{q}{p}$라 하자. $p+q$의 값을 구하시오.

7 주머니에 $1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6$의 숫자가 하나씩 적혀 있는 여섯 개의 공이 들어 있다. 이 주머니에서 임의로 한 개씩 총 두 개의 공을 꺼내어 공에 적혀 있는 숫자를 확인한 후 다시 넣지 않는다. 이와 같은 시행을 반복할 때, 첫 번째 꺼낸 두 공에 적혀 있는 숫자의 곱과 두 번째 꺼낸 공에 적혀 있는 숫자의 곱이 모두 8 이상일 확률은 $\dfrac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오.
(단, p, q는 서로소인 자연수이다.) [4점]

8 주머니 안에 $1,\ 1,\ 1,\ 2,\ 2,\ 3,\ 4$의 숫자가 하나씩 적혀 있는 흰 공 7개와 $1,\ 1,\ 2,\ 3$의 숫자가 하나씩 적혀 있는 검은 공 4개가 들어 있다. 이 주머니에서 임의로 2개의 공을 동시에 꺼낼 때, 꺼낸 2개의 공의 색이 같거나 공에 적혀 있는 숫자가 같을 확률은?

① $\dfrac{7}{11}$ ② $\dfrac{36}{55}$ ③ $\dfrac{37}{55}$
④ $\dfrac{38}{55}$ ⑤ $\dfrac{39}{55}$

9 집합 $S=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9\}$의 원소가 2개 이상인 부분집합 중에서 임의로 한 개를 뽑을 때,

이 부분집합의 모든 원소의 곱이 짝수일 확률은 $\dfrac{q}{p}$이다.

$p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.)

10 연필 7자루와 볼펜 4자루를 다음 조건을 만족시키도록 여학생 3명과 남학생 2명에게 남김없이 나누어 주는 경우의 수를 구하시오. (단, 연필끼리는 서로 구별하지 않고, 볼펜끼리도 서로 구별하지 않는다.) [4점]

(가) 여학생이 각각 받는 연필의 개수는 서로 같고, 남학생이 각각 받는 볼펜의 개수도 서로 같다.
(나) 여학생은 연필을 1자루 이상 받고, 볼펜을 받지 못하는 여학생이 있을 수 있다.
(다) 남학생은 볼펜을 1자루 이상 받고, 연필을 받지 못하는 남학생이 있을 수 있다.

Level 2

1 다음 조건을 만족시키는 자연수 $a,\ b,\ c,\ d,\ e$의 모든 순서쌍 $(a,\ b,\ c,\ d,\ e)$의 개수는?

(가) $a+b+c+d+e=28$
(나) $a \geq 6,\ b \geq 2a$
(다) $a+b$는 4의 배수이다.

① 28 ② 29 ③ 30
④ 31 ⑤ 32

2 다음 조건을 만족시키는 순서쌍 $(a,\ b,\ c,\ d,\ e)$의 개수를 구하시오. [4점]

(가) $a,\ b,\ c,\ d,\ e$는 $0,\ 2,\ 4,\ 6,\ 8$중 하나의 숫자이다.
(나) $a+b+c+d+e=32$

3 다음 조건을 만족시키는 1 이상 15 이하의 세 자연수 a, b, c의 모든 순서쌍 $(a,\ b,\ c)$의 개수를 구하시오. [4점]

(가) $a+2<b$ (나) $1<c-b<6$

4 두 종류의 카드 $\boxed{\mathrm{A}}$, $\boxed{\mathrm{B}}$가 8장씩 있다. 이 16장의 카드 중에서 8장의 카드를 선택하여 일렬로 나열할 때, $\boxed{\mathrm{A}}\boxed{\mathrm{B}}$가 이 순서대로 연속하여 놓인 것이 두 번만 나타나도록 카드를 나열하는 경우의 수는? (단, 같은 종류의 카드는 서로 구별하지 않는다.) [4점]

① 121 ② 122 ③ 124 ④ 126 ⑤ 128

5 9 이하의 자연수 중에서 중복을 허락하여 택한 6개의 수를 $a,\ b,\ c,\ d,\ e,\ f\ (a \le b \le c \le d \le e \le f)$라 할 때, 다음 조건을 만족시키는 $a,\ b,\ c,\ d,\ e,\ f$의 순서쌍 $(a,\ b,\ c,\ d,\ e,\ f)$의 개수는?

> (가) $a,\ b,\ c,\ d,\ e,\ f$ 중에서 6의 약수는 3개이다.
> (나) $a,\ b,\ c,\ d,\ e,\ f$ 중에서 9의 약수는 적어도 1개 있다.

① 600 ② 620 ③ 640 ④ 660 ⑤ 680

6 한 개의 주사위를 세 번 던질 때 나오는 눈의 수를 차례로 $a,\ b,\ c$라 하자. 세 수 $a,\ b,\ c$가 $a < b-2 \le c$를 만족시킬 확률은? [4점]

① $\frac{2}{27}$ ② $\frac{1}{12}$ ③ $\frac{5}{54}$ ④ $\frac{11}{108}$ ⑤ $\frac{1}{9}$

7 그림과 같이 1부터 9까지 숫자가 쓰여진 번호판이 있다. 이 가운데 어떤 3개의 숫자 뒤에는 경품이 있고, 나머지 6개의 숫자 뒤에는 아무것도 없다. A, B, C 세 사람이 순서대로 서로 다른 숫자를 각각 한 개씩 선택하여 경품이 있는지 확인하였다. C가 경품에 당첨되었을 때, 번호판에 남은 경품의 개수가 적어도 1개 이상일 확률은?

1	2	3
4	5	6
7	8	9

① $\frac{23}{28}$　② $\frac{6}{7}$　③ $\frac{25}{28}$
④ $\frac{13}{14}$　⑤ $\frac{27}{28}$

8 서로 다른 세 주머니에는 숫자 1, 2, 3, 4, 5가 하나씩 적힌 5개의 공이 각각 들어 있다. 갑이 서로 다른 세 주머니에서 각각 공을 한 개씩 임의로 꺼낸 후, 을도 서로 다른 세 주머니에서 각각 공을 한 개씩 임의로 꺼낸다. 갑이 꺼낸 3개의 공에 적힌 숫자를 크기순으로 a_1, a_2, a_3 $(a_1 \le a_2 \le a_3)$이라 하고 을이 꺼낸 3개의 공에 적힌 숫자를 크기순으로 b_1, b_2, b_3 $(b_1 \le b_2 \le b_3)$이라 할 때, $a_i \ne b_i$인 i $(i=1,\ 2,\ 3)$이 존재할 확률은? (단, 꺼낸 공은 주머니에 다시 넣지 않는다.)

① $\frac{193}{200}$　② $\frac{97}{100}$　③ $\frac{39}{40}$
④ $\frac{49}{50}$　⑤ $\frac{197}{200}$

9 주머니에 $1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7$의 숫자가 하나씩 적혀 있고 모양과 크기가 모두 같은 7개의 공이 있다. 이 주머니에서 동시에 3개의 공을 꺼낼 때, 꺼낸 공에 적힌 수를 $a,\ b,\ c\,(a<b<c)$라 하자. $|a-b|+|b-c|+|c-a|$가 4의 배수인 사건을 A라 하고, 6의 배수인 사건을 B라 할 때, $\mathrm{P}(A\cup B)$의 값은?

① $\frac{3}{5}$ ② $\frac{23}{35}$ ③ $\frac{5}{7}$

④ $\frac{27}{35}$ ⑤ $\frac{29}{35}$

10 주머니 안에 $1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5$의 숫자가 적힌 카드가 각각 2장씩 있다. 현진이가 먼저 2장의 카드를 고르고, 이어서 미혜가 2장의 카드를 골라서 각자 고른 순서대로 차례로 나열하여 두 자리의 자연수를 만든다. 현진이가 만든 두 자리의 자연수가 미혜가 만든 두 자리의 자연수보다 더 클 확률을 $\frac{p}{q}$라고 할 때, $p+q$의 값을 구하시오. (단, 고른 카드는 다시 주머니에 넣지 않으며, p와 q는 서로소인 자연수이다.)

11 4 이상의 자연수 n에 대하여 집합 A를

$$A=\{(x,\ y)\,|\,x+y\ \leq\ n,\ x\text{와 } y\text{는 자연수}\}$$

라 하자. 집합 A에서 임의로 선택된 한 개의 원소 $(a,\ b)$에 대하여 $i^a,\ i^b$이 모두 실수일 때, $i^a=i^b$일 확률이 $\dfrac{8}{15}$이 되도록 하는 모든 자연수 n의 값의 합을 구하시오.
(단, $i=\sqrt{-1}$)

12 집합 $A=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6\}$에서 집합 $B=\{7,\ 8,\ 9,\ 10\}$으로의 함수 f에 대하여 B에서 A로의 함수 $g(x)$를 집합 $\{s\,|\,s\in A,\ f(s)=x\}$의 원소의 개수라 정의하자. 다음 조건을 만족시키는 함수 f의 개수를 구하시오.
[4점]

(가) $g(7)=g(8)$ (나) $g(9)<g(10)$

13 숫자 $1,\ 1,\ 2,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 5,\ 6,\ 6$이 하나씩 적혀 있는 10장의 카드가 있다. 이 10장의 카드를 모두 한 번씩 사용하여 일렬로 임의로 나열할 때, 다음 조건을 만족시키는 경우의 수가 S이다. $\dfrac{S}{6!}$의 값은?

(가) 3이 적혀 있는 카드의 바로 양옆에는 각각 3보다 큰 수가 적혀 있는 카드가 있다. (나) 4가 적혀 있는 카드의 바로 양옆에는 각각 4보다 작은 수가 적혀 있는 카드가 있다.

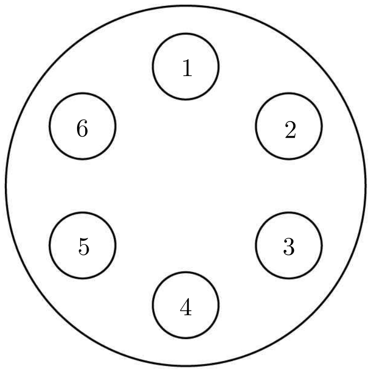
① 15 ② 17 ③ 19
④ 21 ⑤ 23

14 백인고등학교에서 학생들의 수능 성적 향상을 위해 수학1, 수학2, 확률과 통계, 미적분, 기하에 해당하는 책을 각 과목별로 준비하였다. 한 학급에서 30권의 책을 선택하려고 할 때, 다음 조건을 만족시키도록 선택하는 경우의 수를 구하시오. (단, 같은 과목에 해당하는 책은 서로 구별하지 않고, 선택하지 않는 과목이 있을 수도 있다.)

(가) 확률과 통계, 미적분, 기하 과목의 책은 각각 7권 이하씩 선택한다. (나) 수학1 과목의 책은 9권을 선택하거나 7권 이하 선택한다. (다) 수학2 과목의 책은 9권을 선택하거나 7권 이하 선택한다.

15 검은색 볼펜 1자루와 똑같은 모양의 빨간색 볼펜 3자루, 그리고 서로 다른 모양의 파란색 볼펜 3자루가 있다. 이 7자루의 볼펜 중에서 4자루를 선택하여 2명의 학생에서 남김없이 나누어 주는 경우의 수를 구하시오. (단, 빨간색 볼펜은 서로 구별하지 않고, 볼펜을 1자루도 받지 못하는 학생이 있을 수 있다.)

16 그림과 같이 원탁 위에 1부터 6까지 자연수가 하나씩 적혀 있는 6개의 접시가 놓여 있고 같은 종류의 쿠키 12개를 접시 위에 담으려고 한다. 한 개의 주사위를 던져 나온 눈의 수가 적혀 있는 접시에는 2개의 쿠키를 담고, 그 접시에 이웃하는 양옆의 접시 위에는 각각 1개의 쿠키를 담는 시행을 한다. 예를 들어, 주사위를 던져 나온 눈의 수가 1인 경우 1이 적혀 있는 접시 위에 쿠키를 2개, 2, 6이 적혀 있는 접시 위에 쿠키를 각각 1개씩 담는다. 이 시행을 3번 반복하여 6개의 접시 위에 각각 한 개 이상의 쿠키가 담겨 있었을 때, 각 접시에 놓인 쿠키의 개수의 최댓값이 4일 확률은 $\frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오.
(단, p와 q는 서로소인 자연수이다.)



한 눈에 보는 정답

#1 #2 #3

#1 1. ②	2. ③	3. 2	4. ④
#2 1. 22	2. ③	3. 10	4. 17
#3 1. ②	2. 327	3. 114	4. 396

Level 1

1. 84	2. ②	3. ④	4. ①	5. ④
6. 59	7. 19	8. ②	9. 489	10. 49

Level 2

1. ③	2. 70	3. 164	4. ④	5. ②	
6. ④	7. ⑤	8. ⑤	9. ④	10. 94	
11. 65	12. 120	13. ⑤	14. 412	15. 184	16. 20

정답 및 해설

1. ②

5개의 칸에 나타나는 숫자를 각각

$5-a,\ 5-b,\ 5-c,\ 5-d,\ 5-e$라 하자.

$25-(a+b+c+d+e)=20$이 되어야 하므로

$a+b+c+d+e=5$ ($a,\ b,\ c,\ d,\ e$는 0이상 5이하의 정수)

따라서 구하고자 하는 경우의 수는 ${}_5\mathrm{H}_5={}_9\mathrm{C}_5=126$

2. ③

A역과 출발 후 첫 번째 정차한 역 사이의 역의 개수를 a, 첫 번째 정차한 역과 두 번째 정차한 역 사이의 역의 개수를 b, 두 번째 정차한 역과 세 번째 정차한 역 사이의 역의 개수를 c, 세 번째 정차한 역과 B역 사이의 역의 개수를 d라 하자. 이때 a, b, c, d는 음이 아닌 정수이고

$a+b+c+d=12,\ b\geq1,\ c\geq2$

음이 아닌 정수 b', c'에 대하여 $b=b'+1,\ c=c'+2$라 하면

$a+(b'+1)+(c'+2)+d=12$

$a+b'+c'+d=9$ ... ㉠

구하는 경우의 수는 방정식 ㉠을 만족시키는 음이 아닌 정수 a, b', c', d의 순서쌍 (a, b', c', d)의 개수와 같으므로

그 경우의 수는

$${}_4H_9={}_{4+9-1}C_9$$
$$={}_{12}C_9$$
$$={}_{12}C_3$$
$$=\frac{12\times11\times10}{3\times2\times1}$$
$$=220$$

[다른 풀이]

A역에서 출발 후 첫 번째, 두 번째, 세 번째 정차한 역까지의 역의 개수를 각각 x, y, z라 하면

x, y, z는 자연수이고

$1\leq x<y<z\leq15,\ x+1<y,\ y+2<z$

이다. 이때

$1\leq x<y-1<z-3\leq12$

이므로 $y'=y-1,\ z'=z-3$이라 하면 구하는 경우의 수는

부등식

$1\leq x<y'<z'\leq12$

를 만족시키는 자연수 x, y', z'의 순서쌍 (x, y', z')의 개수와 같으므로 그 경우의 수는

$${}_{12}C_3=\frac{12\times11\times10}{3\times2\times1}=220$$

3. 2

'$\boxed{A}\boxed{B}$'가 이 순서대로 연속하여 놓인 것이 한 번만 나타나도록 7장의 카드를 나열하려면 먼저 '$\boxed{A}\boxed{B}$'와 같이 2장의 카드를 놓은 후 '$\boxed{A}\boxed{B}$'의 양 끝에 나머지 5장의 카드를 '$\boxed{A}\boxed{B}$'가 나타나지 않도록 놓으면 된다.

(i) '$\boxed{A}\boxed{B}$'의 오른쪽에 5장의 카드를 놓는 경우

'$\boxed{A}\boxed{B}$'가 나타나지 않도록 5장의 카드를 놓으려면 같은 종류의 카드 5장을 놓거나 새로 놓는 카드 $\boxed{B}$는 새로 놓는 카드 $\boxed{A}$의 왼쪽에 놓아야 한다. 두 종류의 카드를 놓는 순서가 정해져 있으므로 조건을 만족시키면서 나열하는 경우의 수는 두 종류의 카드 $\boxed{A}$, $\boxed{B}$ 에서 중복을 허락하여 5장의 카드를 택하는 중복조합의 수와 같다. 따라서 이 경우의 수는

${}_2\mathrm{H}_5={}_{2+5-1}\mathrm{C}_5={}_6\mathrm{C}_5={}_6\mathrm{C}_1=6$

(ii) '$\boxed{A}\boxed{B}$'의 왼쪽에 1장, 오른쪽에 4장의 카드를 놓는 경우

(i)과 같은 방법으로 왼쪽에 1장의 카드를 놓는 경우의 수는 ${}_2\mathrm{H}_1$이고, 오른쪽에 4장의 카드를 놓는 경우의 수는 ${}_2\mathrm{H}_4$이므로 이 경우의 수는

$${}_2\mathrm{H}_1\times{}_2\mathrm{H}_4={}_{2+1-1}\mathrm{C}_1\times{}_{2+4-1}\mathrm{C}_4$$
$$={}_2\mathrm{C}_1\times{}_5\mathrm{C}_4={}_2\mathrm{C}_1\times{}_5\mathrm{C}_1=2\times5=10$$

(iii) '$\boxed{A}\boxed{B}$'의 왼쪽에 2장, 오른쪽에 3장의 카드를 놓는 경우

(i)과 같은 방법으로 왼쪽에 2장의 카드를 놓는 경우의 수는 ${}_2\mathrm{H}_2$이고, 오른쪽에 3장의 카드를 놓는 경우의 수는 ${}_2\mathrm{H}_3$이므로 이 경우의 수는

$${}_2\mathrm{H}_2\times{}_2\mathrm{H}_3={}_{2+2-1}\mathrm{C}_2\times{}_{2+3-1}\mathrm{C}_3$$
$$={}_3\mathrm{C}_2\times{}_4\mathrm{C}_3={}_3\mathrm{C}_1\times{}_4\mathrm{C}_1=3\times4=12$$

(iv) '$\boxed{A}\boxed{B}$'의 왼쪽에 3장, 오른쪽에 2장의 카드를 놓는 경우

이 경우의 수는 (iii)의 경우의 수와 같으므로 12

(v) '$\boxed{A}\boxed{B}$'의 왼쪽에 4장, 오른쪽에 1장의 카드를 놓는 경우

이 경우의 수는 (ii)의 경우의 수와 같으므로 10

(vi) '$\boxed{A}\boxed{B}$'의 왼쪽에 5장의 카드를 놓는 경우

이 경우의 수는 (i)의 경우의 수와 같으므로 6

(i)~(vi)에서 구하는 경우의 수는

$2\times(6+10+12)=56$

답 ②

참고

(iii)의 경우에서 왼쪽에 2장의 카드를 놓는 경우는 $\boxed{A}\boxed{A}$, $\boxed{B}\boxed{A}$, $\boxed{B}\boxed{B}$의 3가지이고, 오른쪽에 3장의 카드를 놓는 경우는 $\boxed{A}\boxed{A}\boxed{A}$, $\boxed{B}\boxed{A}\boxed{A}$, $\boxed{B}\boxed{B}\boxed{A}$, $\boxed{B}\boxed{B}\boxed{B}$의 4가지이다.

4. ④

조건 (나)에 따라 $a=da_1,\ b=db_1,\ c=dc_1$ (단, $a_1,\ b_1,\ c_1\geq1$) 이라 하자.

조건 (가)의 식을 정리하면 $d(a_1+b_1+c_1+1)=30$ 이다.

$a,\ b,\ c,\ d$ 는 2이상의 자연수 이므로 주어진 조건에서 d가 될 수 있는 경우는 $d=2,\ 3,\ 5,\ 6$이다.

$a_1=a_2+1,\ b_1=b_2+1,\ c_1=c_2+1$

(단, $a_2,\ b_2,\ c_2\geq0$) 이라 하면

$d(a_1+b_1+c_1+1)=30$에서

$d(a_2+1+b_2+1+c_2+1+1)=30$으로 변형하고

(i) $d=2$이면 $a_2+b_2+c_2+4=15$

$a_2+b_2+c_2=11$ $\therefore$ ${}_3H_{11}={}_{13}C_{11}$

(ii) $d=3$이면 $a_2+b_2+c_2+4=10$

$a_2+b_2+c_2=6$ $\therefore$ ${}_3H_6={}_8C_6$

(iii) $d=5$이면 $a_2+b_2+c_2+4=6$

$a_2+b_2+c_2=2$ $\therefore$ ${}_3H_2={}_4C_2$

(iv) $d=6$이면 $a_2+b_2+c_2+4=5$

$a_2+b_2+c_2=1$ $\therefore$ ${}_3H_1={}_3C_1$

$\therefore$ ${}_{13}C_{11}+{}_8C_6+{}_4C_2+{}_3C_1=78+28+6+3=115$

1. 22

$a_k\,(1\le k\le 6)$를 순서쌍 $(a_1,\ a_2,\ a_3,\ a_4,\ a_5,\ a_6)$으로 나타내면 순서쌍의 개수는 $\dfrac{6!}{2!\,2!\,2!}=90$

이때, $m>n$이기 위해서는 $a_1>a_4$ 또는 $a_1=a_4,\ a_2>a_5$ 이어야 한다.

i) $a_1>a_4$인 순서쌍은

$(2,\ a_2,\ a_3,\ 1,\ a_5,\ a_6)$ 또는 $(3,\ a_2,\ a_3,\ 1,\ a_5,\ a_6)$ 또는 $(3,\ a_2,\ a_3,\ 2,\ a_5,\ a_6)$이므로 그 개수는

$3\times\dfrac{4!}{2!}=36$

ii) $a_1=a_4,\ a_2>a_5$인 순서쌍은

$(1,\ 3,\ a_3,\ 1,\ 2,\ a_6)$ 또는 $(2,\ 3,\ a_3,\ 2,\ 1,\ a_6)$ 또는 $(3,\ 2,\ a_3,\ 3,\ 1,\ a_6)$이므로 그 개수는 $3\times 2!=6$

i), ii)에 의하여 구하는 확률은 $\dfrac{36+6}{90}=\dfrac{7}{15}$

따라서 $p=15,\ q=7$이므로 $p+q=22$

2. ③

4 명이 4 개의 의자에 앉는 경우의 수는

$4!=24$

자리를 재배치할 때 갑 또는 을이 자기 자리에 앉도록 4 명의 자리를 배치하는 경우는 다음과 같다.

(i) 갑과 을이 모두 처음 앉았던 자리에 앉는 경우의 수는

$2!=2$

(ii) 갑만 처음 앉았던 자리에 앉는 경우의 수는

$2\times 2!=4$

(iii) 을만 처음 앉았던 자리에 앉는 경우의 수는

$2\times 2!=4$

따라서 갑과 을이 모두 처음 자리가 아닌 다른 자리에 앉게 될 확률을 여사건의 확률을 이용하여 구하면

$1-\dfrac{10}{24}=\dfrac{14}{24}=\dfrac{7}{12}$

[다른 풀이]

(i) 갑이 자기 자리에 앉을 확률은 $\dfrac{3!}{4!}=\dfrac{1}{4}$

(ii) 을이 자기 자리에 앉을 확률은 $\dfrac{3!}{4!}=\dfrac{1}{4}$

(iii) 갑, 을 모두 자기 자리에 앉을 확률은 $\dfrac{2!}{4!}=\dfrac{1}{12}$

따라서 갑 또는 을이 자기 자리에 앉을 확률은

$\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{4}-\dfrac{1}{12}=\dfrac{5}{12}$

따라서 여사건의 확률을 이용하여 구하면

$1-\dfrac{5}{12}=\dfrac{7}{12}$

3. 10

전체 경우의 수 $=\dfrac{7!}{4!\cdot 3!}=35$

5번째 시행까지 흰 공 3개와 검은 공 2개를 꺼내면 된다.

구하려는 경우의 수

$\dfrac{5!}{3!\cdot 2!}=10$ $\quad\therefore p=\dfrac{10}{35},\quad 35p=10$

4. 17

갑이 꺼낸 공 중 같은 숫자가 적힌 공이 있는 사건을 A, 을이 꺼낸 공에 적힌 세 숫자가 모두 다른 사건을 B라 하면 구하는 확률은 $P(B|A)$이다.

갑, 을이 3개의 주머니에서 꺼낸 공에 적힌 숫자를 각각 순서쌍 $(a,\ b,\ c)$로 나타내기로 하자.

(i) 갑이 꺼낸 공에 적힌 세 숫자가 모두 같은 경우

$(1,\ 1,\ 1)$, $(2,\ 2,\ 2)$, $(3,\ 3,\ 3)$의 3가지 경우가 있으므

로 이 경우의 확률은

$$\frac{3}{3\times3\times3}=\frac{1}{9}$$

이때 을이 꺼낸 공의 세 숫자가 모두 다를 확률은 0이다.

(ii) 갑이 꺼낸 공에 적힌 세 숫자 중 두 숫자가 같은 경우

갑이 꺼낸 공에 적힌 세 숫자 중 두 숫자가 서로 같을 확률은

$$_3C_2\times\frac{_3C_3\times{}_3C_1\times{}_2C_1}{3\times3\times3}=\frac{2}{3}$$

이때 갑이 꺼낸 공이 (1, 1, 2)이면 을이 꺼낸 공에 적힌 숫자가 서로 다른 경우는 (2, 3, 1), (3, 2, 1)의 2가지 경우가 있으므로 갑이 꺼낸 공에 적힌 세 숫자 중 두 숫자가 서로 같을 때, 을이 꺼낸 공의 세 숫자가 모두 다를 확률은

$$\frac{2}{2\times2\times2}=\frac{1}{4}$$

따라서 갑이 꺼낸 공에 적힌 세 숫자 중 두 숫자가 같고, 을이 꺼낸 공에 적힌 세 숫자가 모두 다를 확률은

$$\frac{2}{3}\times\frac{1}{4}=\frac{1}{6}$$

(i), (ii)에서

$$P(A)=\frac{1}{9}+\frac{2}{3}=\frac{7}{9},\ P(A\cap B)=0+\frac{1}{6}=\frac{1}{6}$$

따라서 구하는 확률은

$$P(B|A)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}=\frac{3}{14}$$

$\therefore p+q=17$

1. ②

주사위를 3번 던져 첫 번째, 두 번째, 세 번째 나온 눈의 수를 각각 a, b, c라 하고 세 수 a, b, c의 순서쌍을 $(a,\ b,\ c)$라 하자.

주사위를 3번 던져 나오는 모든 경우의 수는

$6^3=216$

주어진 조건을 만족시키지 않는 경우는 빈 접시가 생기는 경우이다.

(i) 빈 접시가 1개인 경우

예를 들어, 1이 적혀 있는 접시가 빈 접시인 경우는

$(3,\ 3,\ 5)$, $(3,\ 5,\ 5)$, $(3,\ 4,\ 5)$

인 각각의 순서쌍의 수를 일렬로 나열하는 것과 같으므로

$2\times\frac{3!}{2!}+3!=12$ (가지)

같은 방법으로 빈 접시가 2, 3, 4, 5, 6이 적혀 있는 접시인 경우도 각각 12가지이다.

그러므로 $12\times6=72$

(ii) 빈 접시가 2개인 경우

빈 접시가 2개인 경우는 두 접시가 이웃하는 경우이다.

예를 들어, 1, 2가 적혀 있는 접시가 빈 접시인 경우는

$(4,\ 4,\ 5)$, $(4,\ 5,\ 5)$

인 각각의 순서쌍의 수를 일렬로 나열하는 것과 같으므로

$2\times\frac{3!}{2!}=6$ (가지)

같은 방법으로 빈 접시가 2, 3과 3, 4와 4, 5와 5, 6과 6, 1이 적혀 있는 접시인 경우도 각각 6가지이다.

그러므로 $6\times6=36$

(iii) 빈 접시가 3개인 경우

예를 들어, 1, 2, 3이 적혀 있는 접시가 빈 접시인 경우는

$(5,\ 5,\ 5)$

인 순서쌍의 수를 일렬로 나열하는 것과 같으므로 1가지이다.

같은 방법으로 빈 접시가 2, 3, 4와 3, 4, 5와 4, 5, 6과 5, 6, 1과 6, 1, 2가 적혀 있는 접시인 경우도 각각 1가지이다.

그러므로 $1\times6=6$

(i), (ii), (iii)에 의하여 빈 접시가 생기는 경우의 수는

$72+36+6=114$

따라서 구하는 확률은 $1-\frac{114}{216}=\frac{17}{36}$

2. 327

(i) $f(3)$이 3의 배수인 경우

① $f(3)=3$인 경우

$f(1)$, $f(2)$를 선택하는 경우의 수는

$_3H_2={}_4C_2=6$

$f(4)$, $f(5)$, $f(6)$을 선택하는 경우의 수는

$_4H_3={}_6C_3=20$

그러므로 $6\times20=120$

② $f(3)=6$인 경우

$f(1)$, $f(2)$를 선택하는 경우의 수는

$_6H_2={}_7C_2=21$

$f(4)$, $f(5)$, $f(6)$을 선택하는 경우의 수는

$_1H_3={}_3C_3=1$

그러므로 $21\times1=21$

①, ②에 의하여 $f(3)$이 3의 배수인 경우의 수는

$120+21=141$

(ii) $f(6)$이 3의 배수인 경우

① $f(6)=3$인 경우

$f(1)$, $f(2)$, $f(3)$, $f(4)$, $f(5)$를 선택하는 경우의 수는

$_3H_5={}_7C_5=21$

② $f(6)=6$인 경우

$f(1)$, $f(2)$, $f(3)$, $f(4)$, $f(5)$를 선택하는 경우의 수는

$_6H_5={}_{10}C_5=252$

①, ②에 의하여 $f(6)$이 3의 배수인 경우의 수는 $21+252=273$

(iii) $f(3)$, $f(6)$이 모두 3의 배수인 경우

① $f(3)=f(6)=3$인 경우

$f(1)$, $f(2)$를 선택하는 경우의 수는

$_3H_2={}_4C_2=6$

$f(4)$, $f(5)$를 선택하는 경우의 수는

$_1H_2={}_2C_2=1$

그러므로 $6\times1=6$

② $f(3)=3$, $f(6)=6$인 경우

$f(1)$, $f(2)$를 선택하는 경우의 수는

$_3H_2={}_4C_2=6$

$f(4)$, $f(5)$를 선택하는 경우의 수는

$_4H_2={}_5C_2=10$

그러므로 $6\times10=60$

③ $f(3)=f(6)=6$인 경우

$f(1)$, $f(2)$를 선택하는 경우의 수는

$_6H_2={}_7C_2=21$

$f(4)$, $f(5)$를 선택하는 경우의 수는

${}_1H_2 = {}_2C_2 = 1$

그러므로 $21 \times 1 = 21$

①, ②, ③에 의하여 $f(3)$, $f(6)$이 모두 3의 배수인

경우의 수는 $660 + 21 = 87$

따라서 (i) (ii) (iii)에 의하여 구하는 경우의 수는

$141 + 273 - 87 = 327$

3. 114

2명의 학생을 A, B라 하고 두 학생 A, B가 받는 볼펜의 개수를(A, B)로 나타내면

(5, 0), (4, 1), (3, 2), (2, 3), (1, 4), (0, 5)의 6가지이다.

또한, A, B학생에게 나눠 준 검은색 볼펜, 파란색 볼펜, 빨간색 볼펜의 개수를 각각 a, b, c라 하면

$a + b + c = 5$

(단, $0 \le a \le 1$, $0 \le b \le 4$, $0 \le c \le 4$) 이다.

(i) (5, 0)인 경우

① $a = 0$이면 $b + c = 5$에서

순서쌍 (b, c)의 개수는(4, 1), (3, 2),

(2, 3), (1, 4)의 4이다.

② $a = 1$ 이면 $b + c = 4$ 이므로

순서쌍 (b, c)의 개수는

${}_2H_4 = {}_{2+4-1}C_4 = {}_5C_4 = 5$

(ii) (4, 1)인 경우

① B에게 검은 볼펜을 나눠 준 경우

$b + c = 4$ 이므로 순서쌍 (b, c)의 개수는 5이다.

② B에게 파란색 볼펜을 나눠 준 경우

$a + b + c = 4$

(단, $0 \le a \le 1$, $0 \le b \le 3$, $0 \le c \le 4$)

이고

㉠ $a = 0$ 이면 $b + c = 4$ 이므로

순서쌍 (b, c)의 개수는(3, 1), (2, 2)

(1, 3), (0, 4)의 4이다.

㉡ $a = 1$ 이면 $b + c = 3$ 이므로

순서쌍 (b, c)의 개수는

${}_2H_3 = {}_{2+3-1}C_3 = 4$

③ B에게 빨간색 볼펜을 나눠 준 경우도(ii) ②와 같다.

(iii) (3, 2)인 경우

① B에게 검은색, 파란색 볼펜을 각각 1개씩 나눠 준 경우

$b + c = 3$ (단, $0 \le b \le 3$, $0 \le c \le 4$)

이므로 순서쌍 (b, c)의 개수는 4이다.

② B에게 검은색, 빨간색 볼펜을 각각 1개씩 나눠 준 경우도(iii) ①과 같다.

③ B에게 파란색, 빨간색 볼펜을 각각 1개씩 나눠 준 경우

$a + b + c = 3$

(단, $0 \le a \le 1$, $0 \le b \le 3$, $0 \le c \le 3$)

㉠ $a = 0$ 이면 $b + c = 3$ 이므로 순서쌍 (b, c)의 개수는 4이다.

㉡ $a = 1$ 이면 $b + c = 2$ 이므로 순서쌍 (b, c)의 개수는

${}_2H_2 = {}_{2+2-1}C_2 = 3$

④ B에게 파란색 볼펜을 2개 나눠 준 경우

$a + b + c = 3$

(단, $0 \le a \le 1$, $0 \le b \le 2$, $0 \le c \le 4$)

㉠ $a = 0$이면 $b + c = 3$ 이므로 순서쌍 (b, c)의 개수는

(2, 1), (1, 2), (0, 3)의 3이다.

㉡ $a = 1$이면 $b + c = 2$ 이므로 순서쌍 (b, c)의 개수는 3이다.

⑤ B에게 빨간색 볼펜을 2개 나눠 준 경우는(iii) ④의 경우와 같다.

또한, (2, 3), (1, 4), (0, 5)인 경우는 각각(3, 2), (4, 1), (5, 0)인 경우와 같으므로 구하는 경우의 수는

$2\{(4+5) + (5 + 8 \times 2) + (4 \times 2 + 7 + 3 \times 2 \times 2)\}$

$= 2 \times (9 + 21 + 27)$

$= 2 \times 57$

$= 114$

4. 396

철학, 사회과학, 자연과학 분야에 해당하는 책은

반드시 선택해야 하므로 최소 3개 분야에서

최대 5개 분야에 해당하는 책을 선택할 수 있다.

철학, 사회과학, 자연과학 각각의 분야에서 선택한 책의 권수를

순서대로 a, b, c(a, b, c는 4 이상 10 이하의 자연수)라 하자.

i) 3개 분야에 해당하는 책을 선택하는 경우

$a + b + c = 24$에서

$a = 4$일 때, $b + c = 20$을 만족시키는 순서쌍 $(b,\ c)$의 개수는 1

$a = 5$일 때, $b + c = 19$를 만족시키는 순서쌍 $(b,\ c)$의 개수는 2

⋮

$a = 10$일 때, $b + c = 14$를 만족시키는 순서쌍 $(b,\ c)$의 개수는 7

따라서 구하는 경우의 수는 $1 + 2 + \cdots + 7 = 28$

ii) 4개의 분야에 해당하는 책을 선택하는 경우

문학 또는 역사 분야 중 한 분야를 선택하는 경우의 수는 2이고

선택된 분야에서 선택한 책의 권수를

d(d는 4 이상 10 이하의 자연수)라 하자.

$a = a' + 4$, $b = b' + 4$, $c = c' + 4$, $d = d' + 4$

(a', b', c', d'은 6 이하의 음이 아닌 정수)라 하면

$a + b + c + d = 24$에서

$(a' + 4) + (b' + 4) + (c' + 4) + (d' + 4) = 24$

$a' + b' + c' + d' = 8$

방정식 $a' + b' + c' + d' = 8$을 만족시키는 6 이하의 음이 아닌

정수 a', b', c', d'의 모든 순서쌍 $(a',\ b',\ c',\ d')$의 개수는

서로 다른 4개에서 중복을 허용하여 8개를 택하는 중복조합의 수

${}_4H_8 = {}_{11}C_8 = {}_{11}C_3 = 165$에서

a', b', c', d' 중 어느 하나의 값이 7인

경우의 수 ${}_4C_1 \times {}_3H_1 = 12$와

a', b', c', d' 중 어느 하나의 값이 8인

경우의 수 4를 뺀 것과 같다.

따라서 구하는 경우의 수는 $2 \times (165 - 12 - 4) = 298$

iii) 5개의 분야에 해당하는 책을 선택하는 경우

문학 분야와 역사 분야에서 선택한 책의 권수를 각각

d, e(d, e는 4 이상 10 이하의 자연수)라 하자.

$a = a' + 4$, $b = b' + 4$, $c = c' + 4$, $d = d' + 4$, $e' = e' + 4$

(a', b', c', d', e'은 6 이하의 음이 아닌 정수)라 하면

$a + b + c + d + e = 24$에서

$(a'+4)+(b'+4)+(c'+4)+(d'+4)+(e'+4)=24$

$a'+b'+c'+d'+e'=4$

방정식 $a'+b'+c'+d'+e'=4$를 만족시키는 6 이하의 음이 아닌 정수 a', b', c', d', e'의 모든 순서쌍 (a', b', c', d', e')의 개수는

서로 다른 5개에서 중복을 허용하여 4개를 택하는 중복조합의 수와 같다.

따라서 구하는 경우의 수는 ${}_5\mathrm{H}_4={}_8\mathrm{C}_4=70$

따라서 ⅰ), ⅱ), ⅲ)에 의하여 구하는 경우의 수는

$28+298+70=396$

1. 84

(1) a또는 b가 0

c,d,e 중에서 0인거 하나 선택 ${}_3\mathrm{C}_1$

a,b중에서 선택 ${}_2\mathrm{C}_1$

$x+y+z=6(xyz\neq 0)$

${}_3\mathrm{H}_3\times{}_3\mathrm{C}_1\times{}_2\mathrm{C}_1=60$

(2) a,b모두 0아님

c,d,e 중에서 0인 것 2개 고르기 ${}_3\mathrm{C}_2$

$a=1, a=2$일 때 $a=b$인 경우 1개씩 있음

${}_3\mathrm{C}_2\times({}_3\mathrm{H}_3-2)=24$

2. ②

x와 y, y와 z, z와 x가 각각 한 번씩만 서로 이웃하면 나열된 문자열을 같은 문자가 연속하여 나열되는 네 개의 구역으로 나눌 수 있다.

예를 들어 조건을 만족시키는 문자열 xxyyyzxxxx에서 네 개의 구역을 그림으로 나타내면 다음과 같다.

xx	yyy	z	$xxxx$

이때 각 구역에 나열하는 문자의 종류를 그림으로 나타내면 다음과 같은 6가지 경우가 있다.

x	y	z	x
x	z	y	x
y	z	x	y
y	x	z	y
z	x	y	z
z	y	x	z

이 각각에 대하여 각 구역에는 해당 문자를 적어도 한 개 나열해야 하고 각 구역에 나열한 문자의 개수의 총합은 10이 되어야 하므로 각 구역에 나열하는 문자의 개수를 첫 번째 구역부터 차례로 a, b, c, d라 하면

a+b+c+d=10 (a, b, c, d는 자연수)

이고,

a=a'+1, b=b'+1, c=c'+1, d=d'+1 (a', b', c', d'은 음이 아닌 정수)

로 놓으면

a'+b'+c'+d'=6 …… ㉠

이때 ㉠을 만족시키는 음이 아닌 정수 a', b', c', d'의 모든 순서쌍 (a', b', c', d')의 개수는 서로 다른 4개에서 6개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

$${}_4H_6={}_{4+6-1}C_6={}_9C_6={}_9C_3=\frac{9\times8\times7}{3\times2\times1}=84$$

따라서 구하는 경우의 수는 곱의 법칙에 의하여

6×84=504

3. ④

조건 (나)에 따라 $a=da_1,\ b=db_1,\ c=dc_1$ (단, $a_1,\ b_1,\ c_1\geq 1$) 이라 하자.

조건 (가)의 식을 정리하면 $d(a_1+b_1+c_1+1)=30$ 이다.

$a,\ b,\ c,\ d$ 는 2이상의 자연수 이므로 주어진 조건에서 d가 될 수 있는 경우는 $d=2,\ 3,\ 5,\ 6$이다.

$a_1=a_2+1,\ b_1=b_2+1,\ c_1=c_2+1$

(단, $a_2,\ b_2,\ c_2\geq 0$) 이라 하면

$d(a_1+b_1+c_1+1)=30$에서

$d(a_2+1+b_2+1+c_2+1+1)=30$으로 변형하고

(ⅰ) $d=2$이면 $a_2+b_2+c_2+4=15$

$a_2+b_2+c_2=11 \qquad \therefore\ {}_3\mathrm{H}_{11}={}_{13}\mathrm{C}_{11}$

(ⅱ) $d=3$이면 $a_2+b_2+c_2+4=10$

$a_2+b_2+c_2=6 \qquad \therefore\ {}_3\mathrm{H}_6={}_8\mathrm{C}_6$

(ⅲ) $d=5$이면 $a_2+b_2+c_2+4=6$

$a_2+b_2+c_2=2 \qquad \therefore\ {}_3\mathrm{H}_2={}_4\mathrm{C}_2$

(ⅳ) $d=6$이면 $a_2+b_2+c_2+4=5$

$a_2+b_2+c_2=1 \qquad \therefore\ {}_3\mathrm{H}_1={}_3\mathrm{C}_1$

$\therefore\ {}_{13}\mathrm{C}_{11}+{}_8\mathrm{C}_6+{}_4\mathrm{C}_2+{}_3\mathrm{C}_1=78+28+6+3=115$

4. ①

$f(1), f(2), f(3)$은 모두 집합 Y의 원소이고

$f(2)-f(1)\geq 2$이고 $f(3)-f(2)\geq 3$이므로

$f(1)<f(2)<f(3)$이다.

따라서 $f(1), f(2), f(3)$을 포함한 집합 Y의 원소

1부터 9까지의 자연수를 일렬로 나열하면

$\square f(1)\square f(2)\square f(3)\square$

와 같다.
이때, $f(2)-f(1) \geq 2$이 성립하기 위해서는
$f(1)$과 $f(2)$ 사이에 있는 빈칸(□)에는
1개 이상의 숫자가 나열되어야 하고
$f(3)-f(2) \geq 3$이 성립하기 위해서는
$f(2)$와 $f(3)$ 사이에 있는 빈칸(□)에는
2개 이상의 숫자가 나열되어야 한다.
따라서 구하는 함수 f의 개수는
$\square f(1) \square f(2) \square f(3) \square$의 빈칸(□)에 들어갈 숫자의
개수를 왼쪽부터 순서대로 a, b, c, d라 하면
$a \geq 0$, $b \geq 1$, $c \geq 2$, $d \geq 0$이고
방정식 $a+b+c+d=6$을 만족시키는 음이 아닌 정수
a, b, c, d의 순서쌍 (a, b, c, d)의 개수와 같다.
이때, $b=b'+1$, $c=c'+2$라 하면
$a \geq 0$, $b \geq 1$, $c \geq 2$, $d \geq 0$이고
방정식 $a+b+c+d=6$을 만족시키는 음이 아닌 정수
a, b, c, d의 순서쌍 (a, b, c, d)의 개수는
방정식 $a+b'+c'+d=3$을 만족시키는 음이 아닌 정수
a, b', c', d의 순서쌍 (a, b', c', d)의 개수와 같다.
$\therefore\ {}_4\mathrm{H}_3 = {}_6\mathrm{C}_3 = 20$

5. 답 ④
[해설]
조건 (가)를 만족시키는 순서쌍 (x, y, z)의 개수는

$${}_3\mathrm{H}_{10} = {}_{3+10-1}\mathrm{C}_{10} = {}_{12}\mathrm{C}_{10} = {}_{12}\mathrm{C}_2 = \frac{12 \times 11}{2} = 66$$

이때, $y+z=0$인 순서쌍 (x, y, z)의 개수는
$(10, 0, 0)$의 1이고,
$y+z=10$인 순서쌍 (x, y, z)의 개수는

$${}_2\mathrm{H}_{10} = {}_{2+10-1}\mathrm{C}_{10} = {}_{11}\mathrm{C}_{10} = {}_{11}\mathrm{C}_1 = 11$$

즉, 11이므로
구하고자 하는 순서쌍 (x, y, z)의 개수는
$66-1-11=54$

6. 59
$\sin\frac{a\pi}{3} = 0$이 되는 사건을 A 라 하고 $\cos\frac{b\pi}{4} = 0$이 되는 사건을 B 라 하자. 구하는 확률은 $\mathrm{P}(A \cap B)$이다.
$\sin\frac{a\pi}{3} = 0$이 되는 20이하의 자연수 a는
3, 6, 9, 12, 15, 18이므로

$$\mathrm{P}(A) = \frac{3}{10}$$

$\cos\frac{b\pi}{4} = 0$이 되는 20이하의 자연수 b는
2, 6, 10, 14, 18이므로

$$\mathrm{P}(B) = \frac{1}{4}$$

또한 두 사건 A, B는 서로 독립이므로

$$\mathrm{P}(A \cap B) = \mathrm{P}(A) \cdot \mathrm{P}(B) = \frac{3}{40}$$

구하는 확률 $\mathrm{P}(A \cup B)$는

$$\mathrm{P}(A \cup B) = \mathrm{P}(A) + \mathrm{P}(B) - \mathrm{P}(A \cap B)$$

이므로

$$\mathrm{P}(A \cap B) = \frac{3}{10} + \frac{1}{4} - \frac{3}{40} = \frac{19}{40}$$

따라서 $p+q=59$

7. 19

8. ②
전체 경우의 수 ${}_{11}\mathrm{C}_2$가지에서
색이 같은 경우: ${}_7\mathrm{C}_2 + {}_4\mathrm{C}_2$가지
색이 다르고 숫자가 1로 같은 경우: ${}_3\mathrm{C}_1 \times {}_2\mathrm{C}_1$가지
색이 다르고 숫자가 2로 같은 경우: ${}_2\mathrm{C}_1 \times {}_1\mathrm{C}_1$가지
색이 다르고 숫자가 3으로 같은 경우: ${}_1\mathrm{C}_1 \times {}_1\mathrm{C}_1$가지
로 구하려는 확률은

$$\frac{{}_7\mathrm{C}_2 + {}_4\mathrm{C}_2 + {}_3\mathrm{C}_1 \cdot {}_2\mathrm{C}_1 + {}_2\mathrm{C}_1 \cdot {}_1\mathrm{C}_1 + 1}{{}_{11}\mathrm{C}_2} = \frac{36}{55}$$

가 된다.

9. 489

10. 49
주어진 조건을 표로 나타내면 다음과 같다.

여학생	A	B	C	합
연필	s개	s개	s개	$3s$개
볼펜				$4-2t$

남학생	a	b	합
연필			$7-3s$
볼펜	t개	t개	$2t$개

(1) 여학생이 연필을 1개씩 받으면
남학생 2명이 연필 4개를 나누어 가지므로 ${}_2\mathrm{H}_4 = 5$가지
(2) 여학생이 연필을 2개씩 받으면
남학생이 남은 연필을 나누어 가지는 경우는 ${}_2\mathrm{H}_1 = 2$
따라서 남학생과 여학생이 연필을 나누어 갖는 경우는 7가지

(3) 남학생이 볼펜을 1개씩 받으면

여학생이 남은 볼펜을 나누어 가지는 경우는 ${}_3H_2 = 6$

(4) 남학생이 볼펜을 2개씩 받으면

여학생이 남은 볼펜을 나누어 가지는 경우는 ${}_3H_0 = 1$

따라서 남학생과 여학생이 볼펜을 나누어 갖는 경우는 7가지
그러므로 조건을 만족하는 경우의 수는 49가지다.

1. ③

① $a=6$, $b \geq 12$이면서 (다)조건을 만족하는 b는 14, 18

(i) $b=14$인 경우

$6+14+c+d+e=28$, 즉 $c+d+e=8$

$(1, 1, 6)$, $(2, 2, 4)$, $(2, 3, 3)$로 (c, d, e)의 순서쌍은 $3\times3=9$

$(1, 2, 5)$, $(1, 3, 4)$로 (c, d, e)의 순서쌍은 $6\times2=12$

$\therefore$ $9+12=21$

(ii) $b=18$인 경우

$6+18+c+d+e=28$ 즉 $c+d+e=4$

$(1, 1, 2)$로 (c, d, e)의 순서쌍은 3가지

② $a=7$, $b \geq 14$이면서 (다)조건을 만족하는 b는 17

$7+17+c+d+e=28$ 즉 $c+d+e=4$

$(1, 1, 2)$로 (c, d, e)의 순서쌍은 3가지

③ $a=8$, $b \geq 16$이면서 (다)조건을 만족하는 b는 16

$8+16+c+d+e=28$즉 $c+d+e=4$

$(1, 1, 2)$로 (c, d, e)의 순서쌍은 3가지

④ $a \geq 9$인 경우 (다)조건을 만족하는 c, d, e는 없다.

$\therefore$ $21+3\times9=30$가지

[별해] $a \geq 6$, $b \geq 2a$인 조건, $a+b$는 4의 배수이다.인 조건을 같이 생각해보면

$b \geq 2a \Leftrightarrow b+a \geq 3a \geq 18$ 이므로

18이상의 $a+b$가 될수 있는 4의 배수를 찾으면

$a+b=20$, 24 두 개가 가능하다.

$a+b=20$인 경우는 $a=6$, $b=14$, $c+d+e=8$이며

c, d, e는 자연수이므로 c, d, e 해의 개수는

${}_3H_5={}_7C_5=21$이다.

$a+b=24$인 경우는 $a=6$, $b=18$, $a=7$, $b=17$, $a=8$, $b=16$ 세가지가 가능하며 $c+d+e=4$이며

c, d, e는 자연수이므로 c, d, e 해의 개수는

${}_3H_1={}_3C_1=3$이다.

$\therefore$ $1\times21+3\times3=30$가지

2. 70

$a=2p$, $b=2q$, $c=2r$, $d=2s$, $e=2t$라 두면,

$2(p+q+r+s+t)=32$

그런데, $0 \leq p, q, r, s, t \leq 4$이다.

따라서 $4-p=a'$, $4-q=b'$, $4-r=c'$, $4-s=d'$, $4-t=e'$ 라 두면

$a'+b'+c'+d'+e'=4$ (단, $0 \leq a', b', c', d', e' \leq 4$)

$\therefore {}_5H_4={}_8C_4=70$

3. 164

$b=a+x$, $c=b+y$라 하면 $c=a+x+y$이고 이는 15이하가 된다. 따라서 $15-c=z$라 하면 $a+x+y+z=15$를 만족하고 $a \geq 1$, $x \geq 3$, $y \in \{2, 3, 4, 5\}$이어야 한다.$a'=a-1$, $x'=x-3$이라 하면

$y=2$일 때, $a'+x'+z=9$의 음이아닌 정수해의 개수

${}_3H_9=55$개,

$y=3$일 때, $a'+x'+z=8$의 음이아닌 정수해의 개수

${}_3H_8=45$개,

$y=4$일 때, $a'+x'+z=7$의 음이아닌 정수해의 개수

${}_3H_7=36$개,

$y=5$일 때, $a'+x'+z=6$의 음이아닌 정수해의 개수

${}_3H_6=28$개

를 얻는다. 이를 합하면 총 164가지의 경우의 수가 된다.

(별해)

식을 정리하면 $a+3<b+1<c<b+6$

상황을 검은공 3개와 흰 공 12개를 배열한다고 생각하면 검은공이 놓인 위치가 뽑는 숫자.

첫 번째 검은공 앞에 놓인 흰 공의 수를 x, 첫 번째와 두 번째 검은공 사이에 놓인 흰 공의 수를 y, 두 번째와 세 번째 검은공 사이에 놓인 흰 공의 수를 z, 세 번째 검은공 뒤에 놓인 흰 공의 수를 w 라하면

$x+y+z+w=12$ $(x \geq 0, y \geq 2, 1 \leq z \leq 4, w \geq 0)$

따라서 ${}_4H_9-{}_4H_5={}_{12}C_3-{}_8C_3=220-56=164$

4. ④

BABABA로 두고

각 자리에 들어갈 문자의 개수를 x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6이라 할 때,

$x_1+x_2+x_3+x_4+x_5+x_6=8$이고

$x_1 \geq 0$, $x_6 \geq 0$,

$x_2 \geq 1$, $x_3 \geq 1$, $x_4 \geq 1$, $x_5 \geq 1$

에서 ${}_6H_4=126$

5. ②

1, 2, 3, 6 중에서 중복을 허락하여 3개를 뽑는 경우의 수는

$_4H_3 = {}_{4+3-1}C_3 = {}_6C_3 = 20$

4, 5, 7, 8, 9 중에서 중복을 허락하여 3개를 뽑는 경우의 수는

$_5H_3 = {}_{5+3-1}C_3 = {}_7C_3 = 35$

이때, 2, 6 중에서만 3개가 뽑히고 4, 5, 7, 8 중에서만 3개가 뽑히는 경우의 수를 제외해야 한다. 즉,

$$\begin{aligned} {}_2H_3 \times {}_4H_3 &= {}_{2+3-1}C_3 \times {}_{4+3-1}C_3 \\ &= {}_4C_1 \times {}_6C_3 \\ &= 4 \times 20 = 80 \end{aligned}$$

따라서, 구하는 경우의 수는 $(20 \times 35) - 80 = 620$이다.

6. ④

주사위를 세 번 던져서 나오는 모든 경우의 수는 216가지이다.

$a < b-2 \le c$를 만족시키는 경우이므로 a를 기준으로 b, c가 될 수 있는 경우의 수를 구해보면

$a=1$일 때, $b=4$이면 c는 $2, 3, 4, 5, 6$으로 5가지

$a=1$일 때, $b=5$이면 c는 $3, 4, 5, 6$으로 4가지

$a=1$일 때, $b=6$이면 c는 $4, 5, 6$으로 3가지

$a=2$일 때, $b=5$이면 c는 $3, 4, 5, 6$으로 4가지

$a=2$일 때, $b=6$이면 c는 $4, 5, 6$으로 3가지

$a=3$일 때, $b=6$이면 c는 $4, 5, 6$으로 3가지

따라서 $a < b-2 \le c$를 만족시키는 경우의 수는 22가지이다.

따라서 구하려는 확률은 $\frac{22}{216} = \frac{11}{108}$ 이다.

7. ⑤

조건부확률 $\mathrm{P}(A) = \frac{8 \times 7 \times {}_3C_1}{9 \times 8 \times 7} = \frac{1}{3}$

$\mathrm{P}(A \cap B) = \mathrm{P}(A) - \mathrm{P}(A,\ B,\ C$ 모두 당첨$)$

$= \frac{1}{3} - \frac{3 \times 2 \times 1}{9 \times 8 \times 7} = \frac{9}{28}$

$\therefore \mathrm{P}(B|A) = \frac{\mathrm{P}(A \cap B)}{\mathrm{P}(A)} = \frac{27}{28}$

[다른 풀이]

C는 이미 당첨되었으니, 남은 경품이 적어도 1개 이상이 되려면

$1 - \frac{{}_2C_2}{{}_8C_2} = \frac{27}{28}$

8. ⑤

갑과 을이 서로 다른 세 주머니에서 공을 각각 한 개씩 꺼내는 경우의 수는

$5^3 \times 4^3$

$a_i \ne b_i$인 i (i=1, 2, 3)이 존재하는 사건을 A라 하면 사건 A의 여사건 A^C은 $a_i \ne b_i$인 i가 존재하지 않는 사건이다.

즉, $a_1 = b_1,\ a_2 = b_2,\ a_3 = b_3$인 사건이다.

서로 다른 세 주머니에는 1, 2, 3, 4, 5가 적힌 공이 1개씩 있으므로 갑과 을이 꺼낸 3개의 공에 적힌 숫자를 크기순으로 배열했을 때 사건 A^C이 일어나려면 갑이 꺼낸 3개의 공에 적힌 숫자는 서로 달라야 한다.

1, 2, 3, 4, 5의 5개의 숫자에서 갑이 꺼낸 3개의 공에 적힌 서로 다른 숫자를 정하는 경우의 수는

$_5C_3 = {}_5C_2 = \frac{5 \times 4}{2 \times 1} = 10$

(ⅰ) 이 10가지 경우 중에서 갑이 서로 다른 세 주머니에서 1, 2, 3이 적힌 공을 꺼냈다고 가정할 때, 꺼내는 순서를 정하는 경우의 수는 3!

(ⅱ) (ⅰ)에서 갑이 1, 2, 3이 적힌 공을 차례로 꺼냈다고 할 때 을도 서로 다른 세 주머니에서 1, 2, 3이 적힌 공을 꺼내려면 차례로 2, 3, 1이 적힌 공을 꺼내거나 3, 1, 2가 적힌 공을 꺼내야 한다.

(ⅰ), (ⅱ)에서 갑과 을이 모두 1, 2, 3이 적힌 공을 꺼내는 경우의 수는

3!×2=12

따라서

$P(A^C) = \frac{10 \times 12}{5^3 \times 4^3} = \frac{3}{5^2 \times 2^3} = \frac{3}{200}$ 이므로 구하는 확률은

$P(A) = 1 - P(A^C) = 1 - \frac{3}{200} = \frac{197}{200}$

9. ④

10. 94

현진이가 만든 두 자리의 자연수가 미혜가 만든 두 자리의 자연수보다 더 클 확률과 더 작은 확률은 같으므로 같은 자연수를 만들 확률을 구해서 여사건을 적용한다.

$\frac{1}{2} \times (1 - 1 \times \frac{8}{9} \times \frac{1}{8} \times \frac{1}{7}) = \frac{1}{2} \times (1 - \frac{1}{63}) = \frac{31}{63}$

11. 65

i^a, i^b이 모두 실수이려면, a, b가 모두 짝수이어야 하고, $i^a = i^b$이려면 $a - b = 4m$ (m은 정수)이어야 한다.

a, b가 모두 짝수인 사건을 X, $a - b = 4m$ (m은 정수)인 사건을 Y라 하면 $P(Y|X) = \frac{8}{15}$ 인 자연수 n의 값을 구해야 한다.

(ⅰ) 먼저 $n = 4k$ (k는 자연수)인 경우를 살펴보자.

$a + b$의 값에 따라 a, b가 모두 짝수인 (a, b) 및 그 중에서 $a - b = 4m$ (m은 정수)인 (a, b)를 나열하면 다음과 같다.

$a+b$의 값	a, b가 모두 짝수인 (a, b)	a, b가 모두 짝수이고 $a-b=4m$인 (a, b)
$a+b=2$	없음	없음
$a+b=4$	$(2, 2)$	$(2, 2)$
$a+b=6$	$(2, 4)$, $(4, 2)$	없음
$a+b=8$	$(2, 6)$, $(4, 4)$, $(6, 2)$	$(2, 6)$, $(4, 4)$, $(6, 2)$
$a+b=10$	$(2, 8)$, $(4, 6)$, $(6, 4)$, $(8, 2)$	없음
$a+b=12$	$(2, 10)$, $(4, 8)$, $(6, 6)$, $(8, 4)$, $(10, 2)$	$(2, 10)$, $(4, 8)$, $(6, 6)$, $(8, 4)$, $(10, 2)$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$a+b=4k$ $(=n)$	$(2, 4k-2)$, $\cdots$, $(4k-2, 2)$	$(2, 4k-2)$, $\cdots$, $(4k-2, 2)$

즉, $n=4k$일 때

$$n(X)=1+2+3+\cdots+(2k-1)$$
$$=\frac{2k\times(2k-1)}{2}=k(2k-1)$$

이고

$$n(X\cap Y)=1+3+5+\cdots+(2k-1)$$
$$=\frac{k\times\{2+2(k-1)\}}{2}=k^2$$

따라서

$$P(Y|X)=\frac{P(X\cap Y)}{P(X)}=\frac{n(X\cap Y)}{n(X)}$$
$$=\frac{k^2}{k(2k-1)}=\frac{k}{2k-1}$$

$\frac{k}{2k-1}=\frac{8}{15}$ 에서 $k=8$이다.

즉, $n=4\times8=32$일 때 $P(Y|X)=\frac{8}{15}$ 이다.

(ii) $n=4k+1$일 때는 $n=4k$인 경우와 $n(X)$, $n(X\cap Y)$의 값이 모두 같으므로 $n=4k$일 때의 확률과 같다.

따라서 $n=33$일 때도 $P(Y|X)=\frac{8}{15}$ 이다.

(iii) $n=4k+2$일 때는 $n=4k$인 경우와 비교하였을 때, $n(X)$의 값은 $a+b=4k+2$일 때의 $2k$만큼 증가하지만 $n(X\cap Y)$의 값은 변하지 않는다.

따라서 $P(Y|X)=\frac{k^2}{k(2k+1)}=\frac{k}{2k+1}$

$\frac{k}{2k+1}=\frac{8}{15}$ 을 만족시키는 자연수 k의 값은 존재하지 않으므로

$P(Y|X)=\frac{8}{15}$ 인 자연수 n은 존재하지 않는다.

(iv) $n=4k+3$일 때는 $n=4k+2$일 때와 $n(X)$, $n(X\cap Y)$의 값이 모두 같으므로 $n=4k+2$일 때의 확률과 같다.

따라서 $P(Y|X)=\frac{8}{15}$ 인 자연수 n은 존재하지 않는다.

(i)~(iv)에서 $P(Y|X)=\frac{8}{15}$ 인 자연수 n의 값의 합은

32+33=65

12. 120

$g(x)=0$이 될 수 없으므로 $g(x)=0$인 경우 제외

따라서 $g(7)=1$, $g(8)=1$, $g(9)=1$, $g(10)=3$인 경우가 유일하다.

${}_6C_1\times{}_5C_1\times{}_4C_1=120$

13. ⑤

(i) 3, 4가 서로 이웃한 경우 : $2\times7!$

(ii) 3, 4가 서로 이웃하지 않은 경우 :

3옆에 5, 5 또는 6, 6 4옆에 1, 1 또는 2, 2가 있는 경우 :

$4\times\frac{6!}{2!2!}$

3옆에 5, 6 또는 6, 5 4옆에 1, 1 또는 2, 2가 있는 경우 :

$4\times\frac{6!}{2!}$

3옆에 5, 5 또는 6, 6 4옆에 1, 2 또는 2, 1가 있는 경우 :

$4\times\frac{6!}{2!}$

3옆에 5, 5 또는 6, 6 4옆에 1, 2 또는 2, 1가 있는 경우 :

$4\times6!$

$4\times\left(\frac{6!}{2!2!}+\frac{6!}{2!}+\frac{6!}{2!}+6!\right)$

따라서

$S=7!\times2+(1+2+2+4)$

$\frac{S}{6!}=23$

14. 412

선택한 책의 개수 중에서

수학1, 수학2, 확률과 통계, 미적분, 기하 과목의 개수를 각각 a, b, c, d, e라 하자. (a, b는 9 또는 7이하의 음이 아닌 정수, c, d, e는 7이하의 음이 아닌 정수)

각각의 경우의 수를 구하면

(i) $a+b=9$, $c+d+e=21$

$a+b=9$인 경우의 수는 8,

$c+d+e=21$인 경우의 수는

$c=7-c'$, $d=7-d'$, $e=7-e'$라 하면 (c', d', e'는 7이하의 음이 아닌 정수

$c'+d'+e'=0$이므로 경우의 수는 ${}_3H_0={}_3C_0=1$

따라서 경우의 수는

$8\times{}_3H_0=8$

(ii) $a+b=10$, $c+d+e=20$

$7\times{}_3H_1=21$

(iii) $a+b=11$, $c+d+e=19$

$6\times{}_3H_2=36$

(iv) $a+b=12$, $c+d+e=18$

$5\times{}_3H_3=50$

(v) $a+b=13$, $c+d+e=17$

$4\times{}_3H_4=60$

(vi) $a+b=14$, $c+d+e=16$

$3\times{}_3H_5=63$

(vii) $a+b=15$, $c+d+e=15$

$2\times{}_3H_6=56$

(ⅶ) $a+b=16,\ c+d+e=14$

$2\times{}_3H_7=72$

(ⅷ) $a+b=18,\ c+d+e=12$

$1\times({}_3H_9-3-6)=46$

따라서 구하는 경우의 수는

$8+21+36+50+60+63+56+72+46=412$

15. 184

2명의 학생을 A, B라 하고 두 학생 A, B가 받는 펜의 개수를(A, B)로 나타내면

(ⅰ) (4,0)인 경우

① 나누어주는 빨간색 볼펜의 개수가 3인 경우의 수 : ${}_4C_1=4$

② 나누어주는 빨간색 볼펜의 개수가 2인 경우의 수 : ${}_4C_2=6$

③ 나누어주는 빨간색 볼펜의 개수가 1인 경우의 수 : ${}_4C_3=4$

④ 나누어주는 빨간색 볼펜의 개수가 0인 경우의 수 : ${}_4C_4=1$

$4+6+4+1=15$

(ⅱ) (3,1)인 경우

① 나누어주는 빨간색 볼펜의 개수가 3일 때, 빨간 색 볼펜을

A에게 3개 나누어주는 경우 ${}_4C_1=4$

A에게 2개, B에게 1개 나누어주는 경우 ${}_4C_1=4$

$4+4=8$

② 나누어주는 빨간색 볼펜의 개수가 2일 때, 빨간 색 볼펜을

A에게 2개 나누어주는 경우 ${}_4C_1\times{}_3C_1=12$

A에게 1개, B에게 1개 나누어주는 경우 ${}_4C_2=6$

③ 나누어주는 빨간색 볼펜의 개수가 1일 때, 빨간 색 볼펜을

A에게 1개 나누어주는 경우 ${}_4C_2\times{}_2C_1=12$

B에게 1개 나누어주는 경우 ${}_4C_3=4$

④ 나누어주는 빨간색 볼펜의 개수가 0인 경우

${}_4C_3\times{}_1C_1=4$

$4+4+12+6+12+4+4=46$

(ⅲ) (2,2)인 경우

① 나누어주는 빨간색 볼펜의 개수가 3일 때, 빨간 색 볼펜을

A에게 2개, B에게 1개 나누어주는 경우 ${}_4C_1=4$

A에게 1개, B에게 2개 나누어주는 경우 ${}_4C_1=4$

② 나누어주는 빨간색 볼펜의 개수가 2일 때, 빨간 색 볼펜을

A에게 2개 나누어주는 경우 ${}_4C_2=6$

A에게 1개, B에게 1개 나누어주는 경우 ${}_4C_1\times{}_3C_1=12$

B에게 2개 나누어주는 경우 ${}_4C_2=6$

③ 나누어주는 빨간색 볼펜의 개수가 1일 때, 빨간 색 볼펜을

A에게 1개 나누어주는 경우 ${}_4C_1\times{}_3C_2=12$

B에게 1개 나누어주는 경우 ${}_4C_2\times{}_2C_1=12$

④ 나누어주는 빨간색 볼펜의 개수가 0인 경우

${}_4C_2\times{}_2C_2=6$

$4+4+6+12+6+12+12+6=62$

(ⅳ) (1,3)인 경우 (ⅱ)와 같은 방법으로 46

(ⅴ) (0,4)인 경우 (ⅰ)과 같은 방법으로 15

따라서 모든 경우의 수는 $15+46+62+46+15=184$

16. 20

빈 접시가 생기지 않는 경우의 수는 $216-114=102$

조건을 만족시키는 경우는 3번 던진 주사위의 눈이

1이 2번, 4가 1번 나오는 경우 : $\frac{3!}{2!}=3$

2이 2번, 5가 1번 나오는 경우 : $\frac{3!}{2!}=3$

3이 2번, 6이 1번 나오는 경우 : $\frac{3!}{2!}=3$

4이 2번, 1이 1번 나오는 경우 : $\frac{3!}{2!}=3$

5이 2번, 2이 1번 나오는 경우 : $\frac{3!}{2!}=3$

6이 2번, 3이 1번 나오는 경우 : $\frac{3!}{2!}=3$

조건을 만족시키는 경우의 수는 $3\times6=18$

구하는 확률은 $\frac{18}{102}=\frac{3}{17}$