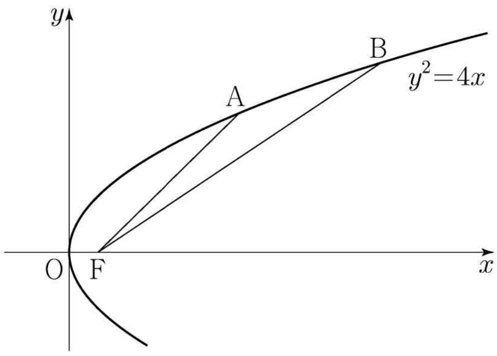
기하 : 이차곡선 유형별 문제 풀이

(백인대장훈련소 최형윤 원장)

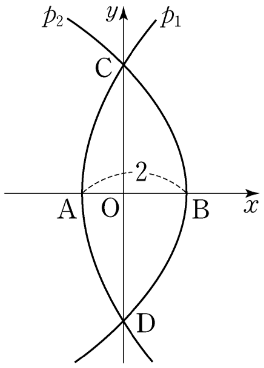
1-1 포물선의 정의

[2019. 09. 평가원]

1. 초점이 F인 포물선 $y^2 = 4x$ 위에 서로 다른 두 점 A, B가 있다. 두 점 A, B의 x좌표는 1 보다 큰 자연수이고 삼각형 AFB의 무게중심의 x좌표가 6일 때, $\overline{\mathrm{AF}} \times \overline{\mathrm{BF}}$ 의 최댓값을 구하시오. [4점]



2. 그림과 같이 좌표평면에서 x축 위의 두 점 A, B에 대하여 꼭짓점이 A인 포물선 p_1과 꼭짓점이 B인 포물선 p_2가 다음 조건을 만족시킨다. 이때, 삼각형 ABC의 넓이는? [4점]



(가) p_1의 초점은 B이고, p_2의 초점은 원점 O이다. (나) p_1과 p_2는 y축 위의 두 점 C, D에서 만난다. (다) $\overline{\mathrm{AB}} = 2$

① $4(\sqrt{2}-1)$ ② $3(\sqrt{3}-1)$ ③ $2(\sqrt{5}-1)$
④ $\sqrt{3}+1$ ⑤ $\sqrt{5}+1$

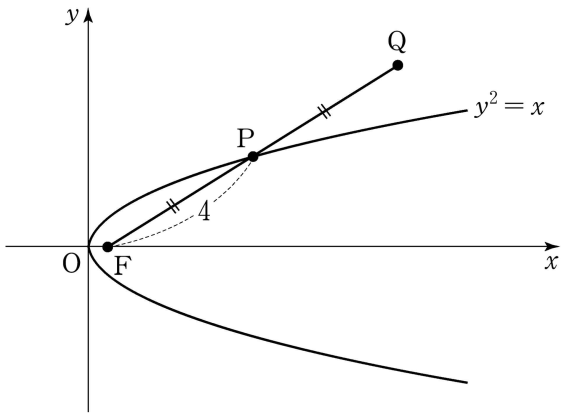
1-2 삼각부등식

3. 좌표평면위에 한 점 $\mathrm{A}(3,1)$가 있다. 포물선 $y^2=4x$위의 한 점 P와 $\mathrm{F}(1,0)$에 대하여, $\overline{\mathrm{AP}}+\overline{\mathrm{PF}}$의 최솟값을 구하시오.

1-3 중등기하활용

[2007. 대학수학능력시험]

4. 초점이 F인 포물선 $y^2 = x$ 위에 $\overline{\mathrm{FP}} = 4$인 점 P가 있다. 그림과 같이 선분 FP의 연장선 위에 $\overline{\mathrm{FP}} = \overline{\mathrm{PQ}}$가 되도록 점 Q를 잡을 때, 점 Q의 x 좌표는? [3점]



① $\frac{29}{4}$ ② 7 ③ $\frac{27}{4}$

④ $\frac{13}{2}$ ⑤ $\frac{25}{4}$

(기본적 성질)

[2013. 대학수학능력시험]

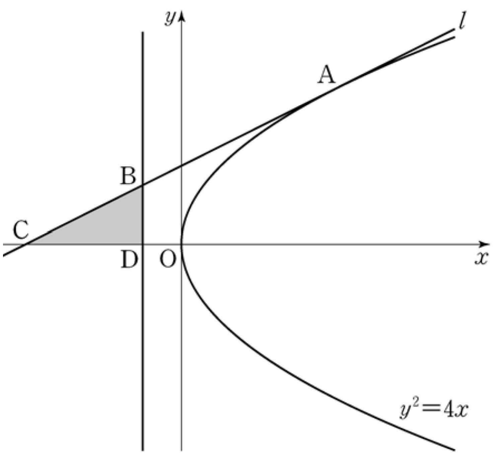
5. 자연수 n에 대하여 포물선 $y^2=\frac{x}{n}$의 초점 F를 지나는 직선이 포물선과 만나는 두 점을 각각 P, Q라 하자. $\overline{\mathrm{PF}}=1$이고 $\overline{\mathrm{FQ}}=a_n$이라 할 때, $\sum_{n=1}^{10}\frac{1}{a_n}$의 값은? [4점]

① 210 ② 205 ③ 200 ④ 195 ⑤ 190

1-4 포물선의 접선

[2016. 대학수학능력시험]

6. 포물선 $y^2 = 4x$ 위의 점 $\mathrm{A}(4,\ 4)$에서의 접선을 l 이라 하자. 직선 l과 포물선의 준선이 만나는 점을 B, 직선 l과 x축이 만나는 점을 C, 포물선의 준선과 x축이 만나는 점을 D라 하자. 삼각형 BCD의 넓이는? [3점]



① $\dfrac{7}{4}$　　② 2　　③ $\dfrac{9}{4}$

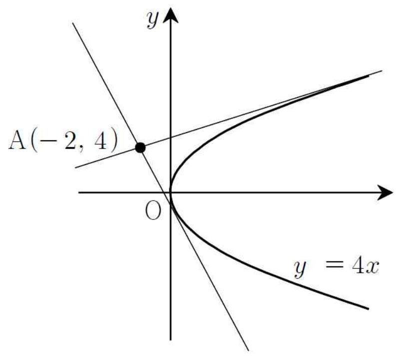
④ $\dfrac{5}{2}$　　⑤ $\dfrac{11}{4}$

[2014. 10. 서울교육청]

7. 자연수 n에 대하여 점 $(-n,\ 0)$을 지나고 제1사분면에서 포물선 $y^2 = 4x$에 접하는 직선의 기울기를 a_n이라 하자. $\sum_{n=1}^{10}\left(\frac{1}{a_n}\right)^2$의 값을 구하시오. [3점]

[2010. 사관학교]

8. 점 $\mathrm{A}(-2,\ 4)$에서 포물선 $y^2 = 4x$에 그은 두 접선의 기울기의 곱은? [3점]



① $-\frac{1}{4}$　② $-\frac{3}{8}$　③ $-\frac{1}{2}$　④ $-\frac{5}{8}$　⑤ $-\frac{3}{4}$

1-5 광학적 성질

[2017. 대학수학능력시험]

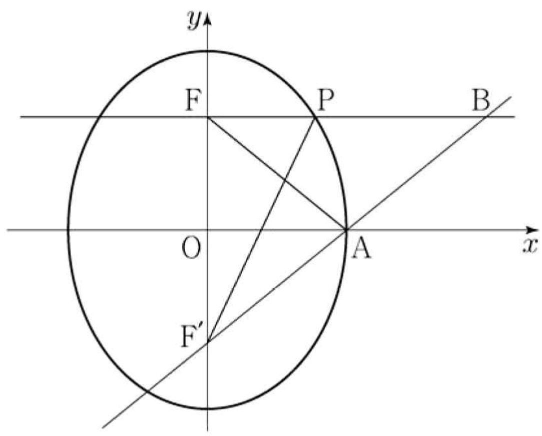
9. 두 양수 k, p에 대하여 점 $\mathrm{A}(-k,\ 0)$에서 포물선 $y^2 = 4px$에 그은 두 접선이 y축과 만나는 두 점을 각각 F, F', 포물선과 만나는 두 점을 각각 P, Q라 할 때, $\angle \mathrm{PAQ} = \dfrac{\pi}{3}$ 이다. 두 점 F, F'을 초점으로 하고 두 점 P, Q를 지나는 타원의 장축의 길이가 $4\sqrt{3} + 12$일 때, $k + p$의 값은? [4점]

① 8　　② 10　　③ 12
④ 14　　⑤ 16

2-1 타원의 정의

[2020. 대학수학능력시험]

10. 그림과 같이 두 점 $\mathrm{F}(0,\ c)$, $\mathrm{F}'(0,\ -c)$를 초점으로 하는 타원 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{25}=1$이 x축과 만나는 점 중에서 x좌표가 양수인 점을 A라 하자. 직선 $y=c$가 직선 AF'과 만나는 점을 B, 직선 $y=c$가 타원과 만나는 점 중 x좌표가 양수인 점을 P라 하자. 삼각형 BPF'의 둘레의 길이와 삼각형 BFA의 둘레의 길이의 차가 4일 때, 삼각형 AFF'의 넓이는?
(단, $0<a<5$, $c>0$) [3점]

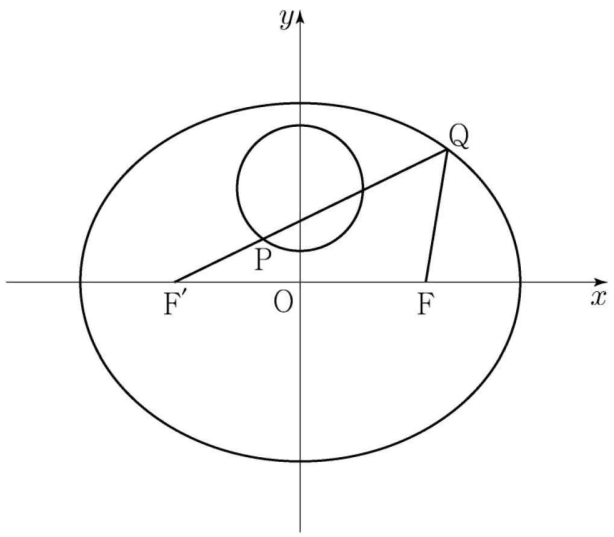


① $5\sqrt{6}$　　② $\dfrac{9\sqrt{6}}{2}$　　③ $4\sqrt{6}$
④ $\dfrac{7\sqrt{6}}{2}$　　⑤ $3\sqrt{6}$

2-2 타 이차곡선과의 성질 같이 활용하기

[2019. 대학수학능력시험]

11. 두 초점이 F, F'인 타원 $\dfrac{x^2}{49}+\dfrac{y^2}{33}=1$이 있다.
원 $x^2+(y-3)^2=4$ 위의 점 P에 대하여 직선 $\mathrm{F'P}$가 이 타원과 만나는 점 중 y좌표가 양수인 점을 Q라 하자. $\overline{\mathrm{PQ}}+\overline{\mathrm{FQ}}$의 최댓값을 구하시오. [4점]

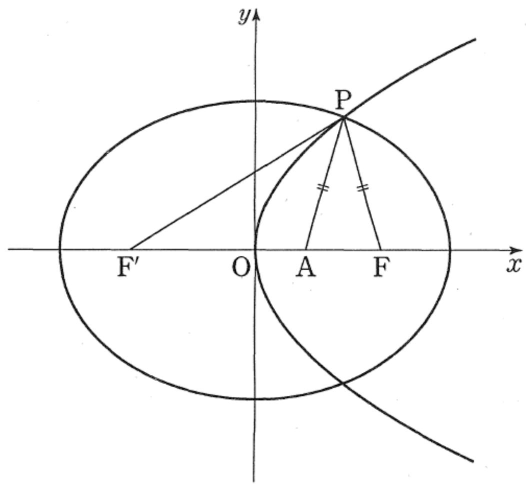


[2017. 09. 평가원]

12. 좌표평면에서 초점이 $\mathrm{A}(a,\ 0)$ $(a>0)$이고 꼭짓점이 원점인 포물선과 두 초점이 $\mathrm{F}(c,\ 0)$, $\mathrm{F}'(-c,\ 0)$ $(c>a)$인 타원의 교점 중 제1사분면 위의 점을 P라 하자.

$$\overline{\mathrm{AF}}=2,\ \overline{\mathrm{PA}}=\overline{\mathrm{PF}},\ \overline{\mathrm{FF'}}=\overline{\mathrm{PF'}}$$

일 때, 타원의 장축의 길이는 $p+q\sqrt{7}$이다. p^2+q^2의 값을 구하시오. (단, $p,\ q$는 유리수이다.) [4점]



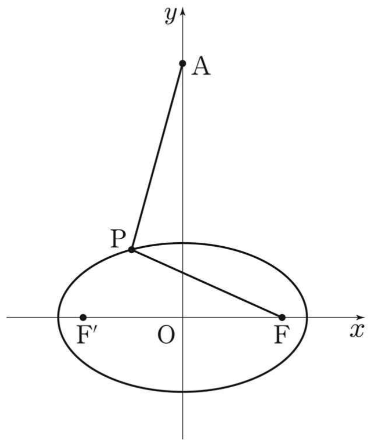
2-3 중선정리

13. 타원 $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$의 한 점 P와 두 초점 F, F'에 대하여 $\overline{\mathrm{PF}}^2+\overline{\mathrm{PF'}}^2$의 최솟값을 구하여라.

2-4 삼각부등식

[2014. 대학수학능력시험]

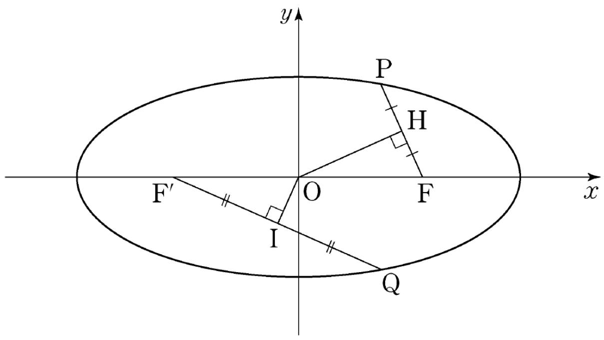
14. 그림과 같이 y축 위의 점 $\mathrm{A}(0,\ a)$와 두 점 F, F'을 초점으로 하는 타원 $\dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{9}=1$ 위를 움직이는 점 P가 있다. $\overline{\mathrm{AP}}-\overline{\mathrm{FP}}$의 최솟값이 1일 때, a^2의 값을 구하시오. [4점]



2-5 대칭성을 활용한 문제풀이

[2012. 06. 평가원]

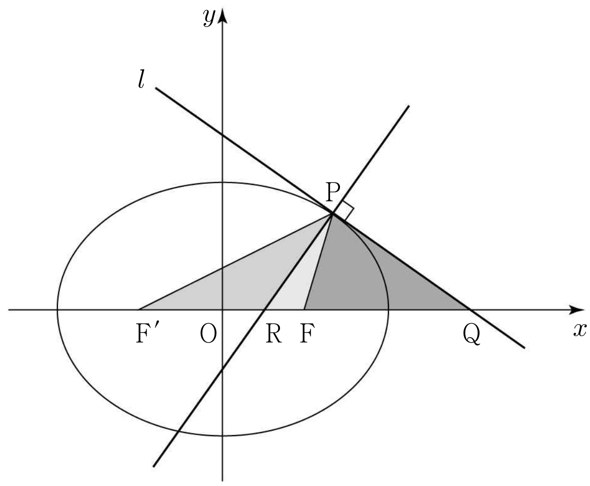
15. 두 점 $\mathrm{F}(5,\ 0)$, $\mathrm{F}'(-5,\ 0)$을 초점으로 하는 타원 위의 서로 다른 두 점 P, Q에 대하여 원점 O에서 선분 PF와 선분 QF'에 내린 수선의 발을 각각 H와 I라 하자. 점 H와 점 I가 각각 선분 PF와 선분 QF'의 중점이고, $\overline{\mathrm{OH}} \times \overline{\mathrm{OI}} = 10$일 때, 이 타원의 장축의 길이를 l이라 하자. l^2의 값을 구하시오. (단, $\overline{\mathrm{OH}} \neq \overline{\mathrm{OI}}$) [4점]



2-6 타원의 접선

[2014. 07. 인천교육청]

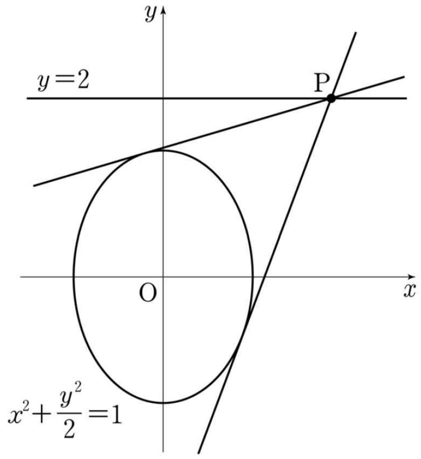
16. 그림과 같이 두 초점이 F, F'인 타원 $3x^2+4y^2=12$ 위를 움직이는 제1사분면 위의 점 P에서의 접선 l이 x축과 만나는 점을 Q, 점 P에서 접선 l과 수직인 직선을 그어 x축과 만나는 점을 R라 하자. 세 삼각형 PRF, $\mathrm{PF'R}$, PFQ의 넓이가 이 순서대로 등차수열을 이룰 때,
점 P의 x좌표는? [4점]



① $\frac{13}{12}$　　② $\frac{7}{6}$　　③ $\frac{5}{4}$

④ $\frac{4}{3}$　　⑤ $\frac{17}{12}$

17. 직선 $y=2$ 위의 점 P에서 타원 $x^2+\dfrac{y^2}{2}=1$에 그은 두 접선의 기울기의 곱이 $\dfrac{1}{3}$이다. 점 P의 x좌표를 k라 할 때, k^2의 값은? [4점]

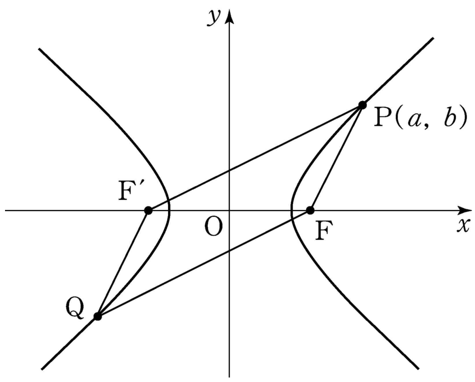


① 6　　② 7　　③ 8　　④ 9　　⑤ 10

쌍곡선의 정의

[2006. 대학수학능력시험]

18. 쌍곡선 $\frac{x^2}{5}-\frac{y^2}{4}=1$의 두 초점을 각각 F, F'이라 하고, 꼭짓점이 아닌 쌍곡선 위의 한 점 P의 원점에 대한 대칭인 점을 Q라 하자. 사각형 $\mathrm{F'QFP}$의 넓이가 24가 되는 점 P의 좌표를 $(a,\ b)$라 할 때, $|a|+|b|$의 값은? [3점]



① 9 ② 10 ③ 11
④ 12 ⑤ 13

점근선 활용

[2006. 09. 평가원]

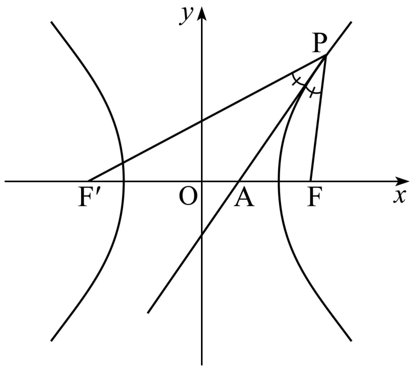
19. 쌍곡선 $\dfrac{x^2}{9}-\dfrac{y^2}{3}=1$ 의 두 초점 $(2\sqrt{3},\ 0)$, $(-2\sqrt{3},\ 0)$을 각각 F, F' 이라 하자. 이 쌍곡선 위를 움직이는 점 $\mathrm{P}(x,\ y)$ $(x>0)$에 대하여 선분 $\mathrm{F}'\mathrm{P}$ 위의 점 Q가 $\overline{\mathrm{FP}}=\overline{\mathrm{PQ}}$를 만족시킬 때, 점 Q가 나타내는 도형 전체의 길이는? [4점]

① π ② $\sqrt{3}\,\pi$ ③ 2π
④ 3π ⑤ $2\sqrt{3}\,\pi$

각의 이등분선 정리

[2007. 10. 서울교육청]

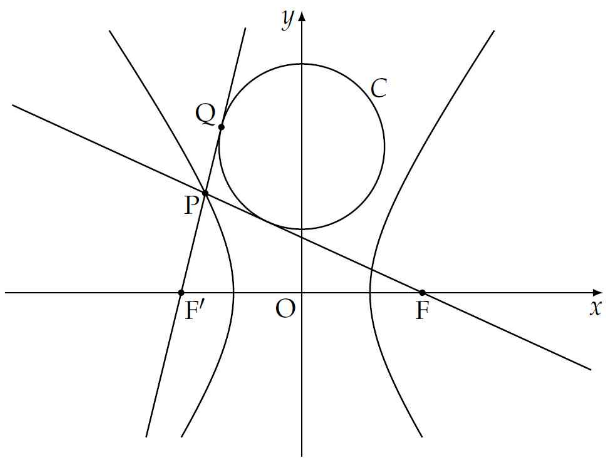
20. 쌍곡선 $\dfrac{x^2}{4}-\dfrac{y^2}{5}=1$ 의 두 초점을 F, F'이라 하자. 쌍곡선 위의 한 점 P에 대하여 $\angle\mathrm{F}'\mathrm{PF}$의 이등분선이 x축과 점 $\mathrm{A}(1,\ 0)$에서 만날 때, 삼각형 $\mathrm{PF}'\mathrm{F}$의 둘레의 길이를 구하시오. [3점]



대칭성을 이용한 풀이

[2018. 대학수학능력시험]

21. 그림과 같이 두 초점이 F, $\mathrm{F'}$인 쌍곡선 $\frac{x^2}{8}-\frac{y^2}{17}=1$ 위의 점 P에 대하여 직선 FP와 직선 $\mathrm{F'P}$에 동시에 접하고 중심이 y축 위에 있는 원 C가 있다. 직선 $\mathrm{F'P}$와 원 C의 접점 Q에 대하여 $\overline{\mathrm{F'Q}}=5\sqrt{2}$일 때, $\overline{\mathrm{FP}}^2+\overline{\mathrm{F'P}}^2$의 값을 구하시오. (단, $\overline{\mathrm{F'P}}<\overline{\mathrm{FP}}$) [4점]



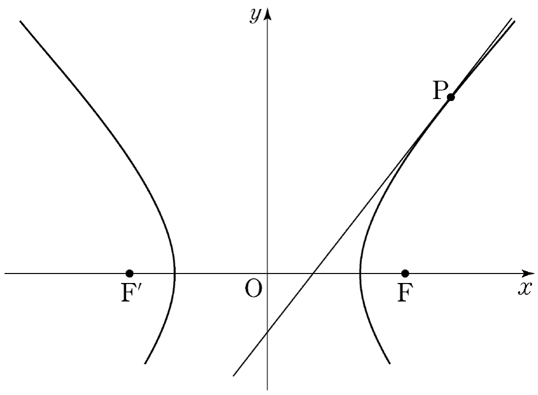
쌍곡선 접선

[2013. 09. 평가원]

22. 그림과 같이 두 초점이 $\mathrm{F}(3,\ 0), \mathrm{F}'(-3,\ 0)$인

쌍곡선 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$위의 점 $\mathrm{P}(4,\ k)$에서의 접선과 x축과의 교점이 선분 $\mathrm{F'F}$를 $2:1$로 내분할 때, k^2의 값을 하시오.

(단, $a,\ b$는 상수이다.) [4점]



〈정답 및 해설〉

1) 90

두 점 A, B의 좌표를 각각 $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$라 하면

$\overline{AF}=x_1+1$, $\overline{BF}=x_2+1$이다.

이때 삼각형 AFB의 무게중심의 x좌표는 $\dfrac{x_1+x_2+1}{3}$이므로

$\dfrac{x_1+x_2+1}{3}=6$에서 $x_1+x_2=17$이다.

x_1, x_2는 1 보다 큰 서로 다른 자연수이므로

가능한 (x_1, x_2)의 순서쌍은

$(2, 15), (3, 14), (4, 13), \cdots, (8, 9)$이다.

$\overline{AF}\times\overline{BF}=(x_1+1)(x_2+1)$

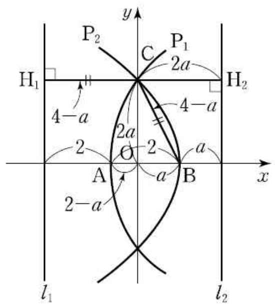
$=x_1x_2+x_1+x_2+1=18+x_1x_2$에서

x_1x_2의 최댓값은 72이므로

$\overline{AF}\times\overline{BF}$ 의 최댓값은 90이다.

2) ③

두 포물선 p_1, p_2의 준선을 각각 l_1, l_2라 하자.



$\overline{OB}=a$라 하면 포물선의 정의에 의해 그림과 같이 각각의 길이가 결정된다.

직각삼각형 OBC에서 피타고라스 정리에 의해

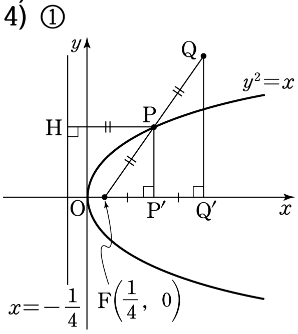
$\sqrt{a^2+(2a)^2}=4-a,\ a^2+2a-4=0$

$\therefore a=-1+\sqrt{5}\ (\because a>0)$

따라서 $\triangle$ABC의 넓이는 $\dfrac{1}{2}\times2\times2a=2a=2(\sqrt{5}-1)$

3) 4

4) ①



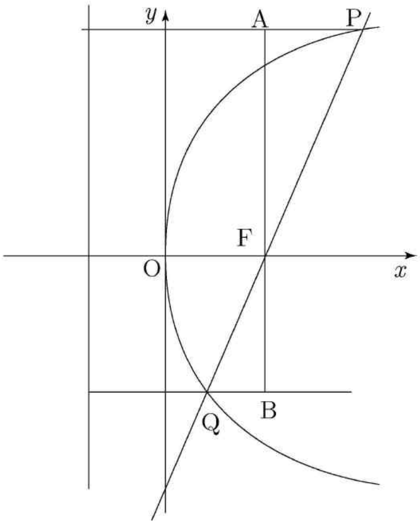
$\overline{HP}=4$이므로 $P'\left(\dfrac{15}{4},\ 0\right)$

또한, $\overline{FP'}=\overline{P'Q'}$이므로 $Q'\left(\dfrac{29}{4},\ 0\right)$

5) ①

포물선의 방정식 $y^2=\dfrac{x}{n}$ 에서 초점은 $\mathrm{F}\left(\dfrac{1}{4n}, 0\right)$ 이고

준선은 $x=-\dfrac{1}{4n}$ 이다. 다음 그림에서 초점 F를 지나고 y축과 평행한 직선이 점 P를 지나고 x축과 평행한 직선과 만나는 점을 A, 점 Q를 지나고 x축과 평행한 직선과 만나는 점을 B라 하자.



그러면 삼각형 FPA와 삼각형 FQB는 닮은 삼각형이다.

그런데 $\overline{\mathrm{PA}}=1-\dfrac{1}{2n}$ 이고

$\overline{\mathrm{QB}}=\dfrac{1}{4n}-\left(a_n-\dfrac{1}{4n}\right)=\dfrac{1}{2n}-a_n$ 이다.

그러므로

$$1 : a_n=\left(1-\frac{1}{2n}\right) : \left(\frac{1}{2n}-a_n\right)$$

$$\left(1-\frac{1}{2n}\right)a_n=\frac{1}{2n}-a_n$$

$$\frac{4n-1}{2n}a_n=\frac{1}{2n}$$

$$\therefore a_n=\frac{1}{4n-1}$$

$$\therefore \sum_{n=1}^{10}(4n-1)=4\times\frac{10\times11}{2}-10=210$$

6) ③

포물선 $y^2=4x$ 위의 점 $\mathrm{A}(4,\ 4)$에서의 접선의 방정식은

$4y=2(x+4)$

$y=\dfrac{1}{2}x+2$ …… ㉠

이때, 포물선의 준선의 방정식은 $x=-1$이므로

$\mathrm{D}(-1,\ 0)$

또, ㉠에 $x=-1$을 대입하면

$\mathrm{B}\left(-1,\ \dfrac{3}{2}\right)$

또, ㉠에 $y=0$을 대입하면

$\mathrm{C}(-4,\ 0)$

따라서 삼각형 BCD의 넓이를 S라 하면

$S=\dfrac{1}{2}\times\overline{\mathrm{CD}}\times\overline{\mathrm{BD}}=\dfrac{1}{2}\times3\times\dfrac{3}{2}=\dfrac{9}{4}$

7) 55

포물선 $y^2=4x$와 접하고 기울기가 a_n인 접선의 방정식은 $y=a_nx+\frac{1}{a_n}$이다.

이 접선이 점 $(-n,\ 0)$을 지나므로

$0=a_n\times(-n)+\frac{1}{a_n}$, ${a_n}^2=\frac{1}{n}$

접선이 제1사분면에서 접하므로 $a_n=\frac{1}{\sqrt{n}}$이다.

따라서 $\sum_{n=1}^{10}\left(\frac{1}{a_n}\right)^2=\sum_{n=1}^{10}n=55$

8) ③

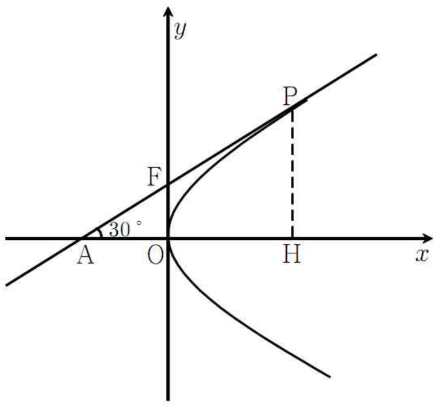
기울기를 m이라고 두면

$y=mx+\frac{1}{m}$가 접선의 방정식이 된다.

이 접선이 $(-2,\ 4)$를 지나므로 대입하면 $4=-2m+\frac{1}{m}$이 되고

$2m^2+4m-1=0$이므로 $m_1m_2=\frac{-1}{2}$이다.

9) ①



포물선 $y^2=4px$위의 점 $(x_1,\ y_1)$에서의 접선이 x축과만나는 점의 좌표가 $(-x_1,\ 0)$이므로

점 P에서 x축에 내린 수선의 발을 H라 하면 $\mathrm{H}(k, 0)$이다.

$\angle\mathrm{PAH}=30°$이므로

$\overline{\mathrm{FO}}=\frac{k}{\sqrt{3}}$, $\overline{\mathrm{PH}}=\frac{2k}{\sqrt{3}}$

$\overline{\mathrm{AF}}=\overline{\mathrm{FP}}=\frac{2k}{\sqrt{3}}$

$\overline{\mathrm{PF'}}=\sqrt{k^2+\left(\frac{3k}{\sqrt{3}}\right)^2}=2k$

타원의 장축의 길이는

$\overline{\mathrm{PF}}+\overline{\mathrm{PF'}}=\frac{2k}{\sqrt{3}}+2k=4\sqrt{3}+12$

$\therefore k=6$ ⋯⋯ ㉠

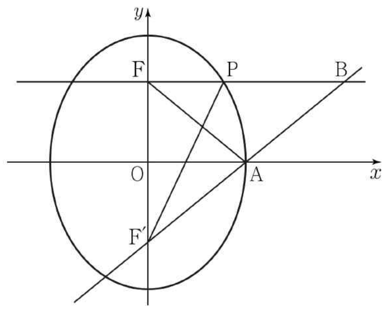
또 점 $(6, 4\sqrt{3})$이 포물선 $y^2=4px$위의 점이므로

$(4\sqrt{3})^2=24p$

$\therefore p=2$ ⋯⋯ ㉡

㉠, ㉡에서 $p+k=8$

10) ①



직선 FB가 x축과 평행하므로 $\triangle \mathrm{OAF}'$과 $\triangle \mathrm{FBF}'$은 $1:2$ 닮음의 직각삼각형이다. 따라서 $\overline{\mathrm{FP}}=t$라고 하면

$\triangle \mathrm{BPF}'$의 둘레$=\overline{\mathrm{BP}}+\overline{\mathrm{BF}'}+\overline{\mathrm{PF}'}=(2a-t)+10+(10-t)$

$\triangle \mathrm{BFA}$의 둘레$=\overline{\mathrm{AB}}+\overline{\mathrm{BF}}+\overline{\mathrm{AF}}=5+2a+5$이므로

삼각형 BPF'의 둘레의 길이와 삼각형 BFA의 둘레의 길이의 차가 4이므로 $2a-2t+20-(2a+10)=-2t+10=4$

$\therefore\ \overline{\mathrm{FP}}=t=3$이 된다. 그러므로

$\overline{\mathrm{FF}'}^2=7^2-3^2=40\quad\therefore\ \overline{\mathrm{FF}'}=2\sqrt{10}$

이고 $\overline{\mathrm{OA}}^2=5^2-10=15\quad\therefore\ \overline{\mathrm{OA}}=\sqrt{15}$

삼각형 AFF'의 넓이는 $\dfrac{1}{2}\times 2\sqrt{10}\times\sqrt{15}=5\sqrt{6}$

11) **11**

타원 $\dfrac{x^2}{49}+\dfrac{y^2}{33}=1$의 정의에 의하여

$\overline{\mathrm{F'P}}+\overline{\mathrm{PQ}}+\overline{\mathrm{FQ}}=2\times 7=14$

이므로

$\overline{\mathrm{PQ}}+\overline{\mathrm{FQ}}=14-\overline{\mathrm{F'P}}$

따라서 $\overline{\mathrm{PQ}}+\overline{\mathrm{FQ}}$가 최대가 되기 위해서는 $\overline{\mathrm{F'P}}$가 최소가 되어야 한다.

원 $x^2+(y-3)^2=4$의 중심을 $\mathrm{O}'(0,\ 3)$이라 하면 $\mathrm{F}'(-4,\ 0)$이므로

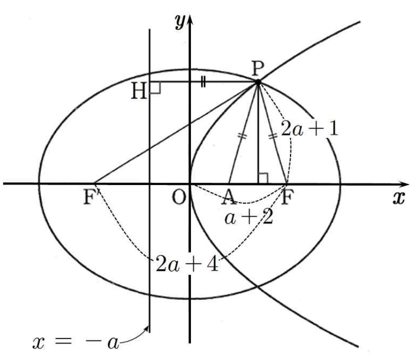
$\overline{\mathrm{F'P}}\geq\overline{\mathrm{F'O'}}$

$\quad=\sqrt{4^2+3^2}-2=3$

$\overline{\mathrm{PQ}}=\overline{\mathrm{FQ}}=14-\overline{\mathrm{F'P}}\leq 14-3=11$

즉, $\overline{\mathrm{PQ}}+\overline{\mathrm{FQ}}$의 최댓값은 11이다.

12) **29**



P 의 x 좌표는 $a+1$ 이고 포물선의 정의에 의하여

$\overline{\mathrm{PA}}=\overline{\mathrm{PH}}=\overline{\mathrm{PF}}=2a+1$ 이고, $\overline{\mathrm{FF}'}=\overline{\mathrm{PF}'}=2a+4$ 이다.

$\triangle \mathrm{PAF}$ 와 $\triangle \mathrm{F'FP}$ 는 닮음이므로

$2a+4 : 2a+1 = 2a+1 : 2$ 가 성립한다.

⇨ $(2a+1)^2 = 2(2a+4)$

⇨ $4a^2 = 7$

$\therefore\ a = \dfrac{\sqrt{7}}{2}$ 이다.

한편, 타원의 정의에 의하여 장축의 길이는 $\overline{\mathrm{F'P}}+\overline{\mathrm{FP}}$ 와 같다.

$\overline{\mathrm{F'P}}+\overline{\mathrm{FP}} = (2a+4)+(2a+1)$

$= 4a+5$

$= 5+2\sqrt{7}$

따라서 $p=5,\ q=2$ 이므로 $p^2+q^2=29$ 이다.

[다른 풀이]

포물선의 방정식은 $y^2=4ax$ 이고, 점 P 의 x 좌표는 $a+1$ 이므로 $\mathrm{P}\left(a+1, \sqrt{4a^2+4a}\right)$ 이다.

점 P 에서 포물선의 준선 $x=-a$ 에 내린 수선의 발을 H 라고 하면

$\overline{\mathrm{PF}}=\overline{\mathrm{PA}}=\overline{\mathrm{PH}}=2a+1$

또한 F 의 x 좌표 c 는 $a+2$ 이고

$\overline{\mathrm{PF'}}=\overline{\mathrm{FF'}}=2c=2a+4$

따라서 장축의 길이는 $\overline{\mathrm{PF}}+\overline{\mathrm{PF'}}=4a+5$

한편 $\overline{\mathrm{AF}}$ 의 중점을 M 이라고 하면

$\overline{\mathrm{PF'}}^2=\overline{\mathrm{F'M}}^2+\overline{\mathrm{PM}}^2$ 이므로

$(2a+4)^2=(2a+3)^2+\left(\sqrt{4a^2+4a}\right)^2$

$\therefore a=\dfrac{\sqrt{7}}{2}$

(장축의 길이) $= 4a+5 = 5+2\sqrt{7}$

$\therefore p=5, q=2$

$p^2+q^2=29$

13) 50

14) 105

타원의 장축의 길이가 10이므로 $\overline{\mathrm{PF}}+\overline{\mathrm{PF'}}=10$

$\overline{\mathrm{AP}}-\overline{\mathrm{FP}}$

$=\overline{\mathrm{AP}}+\overline{\mathrm{PF'}}-\overline{\mathrm{PF'}}-\overline{\mathrm{FP}}$

$=\overline{\mathrm{AP}}+\overline{\mathrm{PF'}}-(\overline{\mathrm{PF'}}+\overline{\mathrm{PF}})$

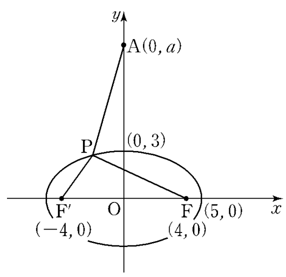
$=\overline{\mathrm{AP}}+\overline{\mathrm{PF'}}-10 \geq \overline{\mathrm{AF'}}-10$

(등호는 점 P가 $\overline{\mathrm{AF'}}$ 위에 있을 때)

이므로, $\overline{\mathrm{AF'}}=11$

$\mathrm{F}(-4,\ 0),\ \mathrm{A}(0,\ a)$에서 $16+a^2=11^2$

$\therefore\ a^2=105$



15) 180

$\overline{\mathrm{PF'}}$와 $\overline{\mathrm{QF}}$를 연결하여

$\overline{\mathrm{PF'}}=2\overline{\mathrm{OH}}=2a,\ \overline{\mathrm{QF}}=2\overline{\mathrm{OI}}=2b$라 하면

타원의 정의에 의해 $\overline{\mathrm{PF'}}+\overline{\mathrm{PF}}=\overline{\mathrm{QF'}}+\overline{\mathrm{QF}}$ 이고

$\angle\mathrm{FPF'}=\angle\mathrm{FPF'}=90°$이므로

$\overline{\mathrm{PF'}}=\overline{\mathrm{QF'}},\ \overline{\mathrm{PF}}=\overline{\mathrm{QF}}$

$\triangle\mathrm{PFF'}$에서 $4a^2+4b^2=100$

$\overline{\mathrm{OH}}\times\overline{\mathrm{OI}}=a\times b=10$

$\therefore\ l^2=(2a+2b)^2=180$

16) ④
초점 $\mathrm{F}(1, 0)$, $\mathrm{F}'(-1, 0)$
$\mathrm{P}(x_1,\ y_1)$에서 접선의 방정식은 $3x_1x+4y_1y=12$
접선의 x절편은 $\dfrac{4}{x_1}$
$\mathrm{P}(x_1,\ y_1)$에서 접선에 수직인 직선의 방정식은 $y-y_1=\dfrac{4y_1}{3x_1}(x-x_1)$
접선에 수직인 직선의 방정식의 x절편은 $\dfrac{x_1}{4}$
세 삼각형의 높이는 모두 같으므로 세 삼각형의 밑변의 길이가 등차수열을 이룬다.
$\overline{\mathrm{RF}}=1-\dfrac{x_1}{4}$, $\overline{\mathrm{F'R}}=\dfrac{x_1}{4}+1$, $\overline{\mathrm{FQ}}=\dfrac{4}{x_1}-1$
$2\left(\dfrac{x_1}{4}+1\right)=\left(1-\dfrac{x_1}{4}\right)+\left(\dfrac{4}{x_1}-1\right)$
양변에 $4x_1$을 곱하여 정리하면
$3{x_1}^2+8x_1-16=(3x_1-4)(x_1+4)=0$
따라서 $x_1=\dfrac{4}{3}$
17) ②
$\mathrm{P}(k,\ 2)$로 두면 기울기가 m인 접선은 $y=mx\pm\sqrt{m^2+2}$이고 $\mathrm{P}(k,\ 2)$를 지나므로 $2=mk\pm\sqrt{m^2+2}$
$2-mk=\pm\sqrt{m^2+2}$, $k^2m^2-4mk+4=m^2+2$
$(k^2-1)m^2-4km+2=0$
두 근을 $m_1,\ m_2$라 두면 $m_1\times m_2=\dfrac{2}{k^2-1}=\dfrac{1}{3}$ $\quad\therefore\ k^2=7$
18) ①
점 $(a,\ b)$는 쌍곡선 $\dfrac{x^2}{5}-\dfrac{y^2}{4}=1$ 위의 점이므로
$\dfrac{a^2}{5}-\dfrac{b^2}{4}=1$ …… ㉠
쌍곡선 $\dfrac{x^2}{5}-\dfrac{y^2}{4}=1$의 두 초점의 좌표는 $\mathrm{F}(3,\ 0)$, $\mathrm{F}'(-3,\ 0)$이다.
이때, 사각형 F′QFP의 넓이는 합동인 두 삼각형
F′QF, FPF′의 넓이와 같으므로
$\square\mathrm{F'QFP}=2\times\triangle\mathrm{FPF'}=2\times\dfrac{1}{2}\times\overline{\mathrm{FF'}}\times|b|=6|b|=24$
$\therefore\ |b|=4$ …… ㉡
㉠, ㉡에서 $a^2=25$이므로 $|a|=5$
$\therefore\ |a|+|b|=5+4=9$
19) ③
다음 그림에서 쌍곡선의 정의에 의하여
$\overline{\mathrm{PF'}}-\overline{\mathrm{PF}}=6$ 이고 $\overline{\mathrm{PF}}=\overline{\mathrm{PQ}}$ 이므로
$\overline{\mathrm{PF'}}-\overline{\mathrm{PQ}}=6$
따라서 점 Q는 점 F′으로부터
거리가 항상 6인 점이므로
점 F′을 중심으로 하고 반지름의 길이가
6인 원위의 점이다.
한편 주어진 쌍곡선의 점근선의 방정식이
$y=\pm\dfrac{\sqrt{3}}{3}x$ 이므로
점근선이 x축의 양의 방향과 이루는 각의 크기는
각각 $\dfrac{\pi}{6}$, $\dfrac{5\pi}{6}$ 이고

이때, $\angle PF'F=\theta$ 라 하면

$x>0$일 때 $0<\theta<\dfrac{\pi}{6}$ 이다.

따라서 점 Q가 움직이는 도형의 길이는

중심각의 크기가 $\dfrac{\pi}{3}$이고

반지름의 길이가 6인 부채꼴의 호의 길이이므로

$6\times\dfrac{\pi}{3}=2\pi$

20) 18

$F'(-3,0)$, $F(3,0)$이고 주축의 길이는 4이므로

$\overline{PF'}=a$, $\overline{PF}=b$라 하면 $a-b=4$

$\angle F'PA=\angle FPA$이므로 $a:b=2:1$

$\therefore\ a=8,\ b=4$

따라서 삼각형 PFF'의 둘레의 길이는 $8+4+6=18$이다.

21) 116

원의 중심을 $A(0,\ a)$라고 하고 원과 직선 PF의 접점을 R라 하자.

$\overline{PF'}=p$, $\overline{PQ}=\overline{PR}=q$, $\overline{RF}=r$라 하자.

$\overline{F'Q}=5\sqrt{2}$ 이므로 $p+q=5\sqrt{2}$ …… ㉠

쌍곡선의 주축의 길이가 $2\times2\sqrt{2}=4\sqrt{2}$ 이므로

쌍곡선의 정의에 의해

$\overline{PF}-\overline{PF'}=q+r-p=4\sqrt{2}$ …… ㉡

$\overline{AQ}=\overline{AR}$, $\overline{AF}=\overline{AF'}$ 이고

$\angle AQF'=\angle ARF=90°$이므로 두 삼각형 AQF'과 직각삼각형 ARF는 서로 합동이다.

따라서 $\overline{RF}=\overline{QF'}$ 이므로

$r=5\sqrt{2}$ …… ㉢

㉢을 ㉡에 대입하여 정리하면

$p-q=\sqrt{2}$ …… ㉣

㉠, ㉣을 연립하면 $p=3\sqrt{2}$, $q=2\sqrt{2}$

따라서 $\overline{FP}^2+\overline{F'P}^2=p^2+(q+r)^2$

$=(3\sqrt{2})^2+(7\sqrt{2})^2$

$=18+98=116$

22) 15

접선과 x축의 교점을 M이라 하면,

$\overline{F'P}:\overline{PF}=\overline{F'M}:\overline{MF}$ 이므로 $2\sqrt{1^2+k^2}=\sqrt{7^2+k^2}$

$\therefore k^2=15$