백 인 대 장

수학2 기말대비

20년 고3 기출

(1) 도함수의 활용

[2020. 10. 서울교육청]

1. 함수 $f(x)=2x^3-3(a+1)x^2+6ax$ 에 대하여 방정식 $f(x)=0$ 이 서로 다른 세 실근을 갖도록 하는 자연수 a 의 값을 가장 작은 수부터 차례대로 나열할 때 n 번째 수를 a_n 이라 하자. $a=a_n$ 일 때, $f(x)$ 의 극댓값을 b_n 이라 하자. $\sum_{n=1}^{10}(b_n-a_n)$ 의 값을 구하시오. [4점]

[2020. 09. 평가원]

2. 최고차항의 계수가 a인 이차함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여

$$|f'(x)| \le 4x^2+5$$

를 만족시킨다. 함수 $y=f(x)$의 그래프의 대칭축이 직선 $x=1$일 때, 실수 a의 최댓값은? [4점]

① $\frac{3}{2}$　② 2　③ $\frac{5}{2}$　④ 3　⑤ $\frac{7}{2}$

[2020. 03. 서울교육청]

3. $a>0$ 인 상수 a 에 대하여 함수
$f(x)=\left|(x^2-9)(x+a)\right|$ 가 오직 한 개의 x 값에서만 미분가능하지 않을 때, 함수 $f(x)$ 의 극댓값은? [4점]

① 32 ② 34 ③ 36
④ 38 ⑤ 40

[2020. 03. 서울교육청]

4. 이차함수 $g(x)=x^2-6x+10$ 에 대하여 삼차함수 $f(x)$ 가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 방정식 $f(x)=0$ 은 서로 다른 세 실근을 갖는다.
(나) 함수 $(g\circ f)(x)$ 의 최솟값을 m 이라 할 때, 방정식 $g(f(x))=m$ 의 서로 다른 실근의 개수는 2 이다.
(다) 방정식 $g(f(x))=17$ 은 서로 다른 세 실근을 갖는다.

함수 $f(x)$ 의 극댓값과 극솟값의 합은? [4점]

① 2 ② 4 ③ 6
④ 8 ⑤ 10

[2020. 03. 서울교육청]

5. 자연수 a 에 대하여 두 함수

$$f(x)=-x^4-2x^3-x^2,\ g(x)=3x^2+a$$

가 있다. 다음을 만족시키는 a 의 값을 구하시오. [4점]

모든 실수 x 에 대하여 부등식 $$f(x) \le 12x+k \le g(x)$$ 를 만족시키는 자연수 k 의 개수는 3 이다.

(2) 부정적분과 정적분

[2020. 10. 서울교육청]

6. 다항함수 $f(x)$ 의 한 부정적분 $g(x)$ 가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $f(x)=2x+2\int_0^1 g(t)\,dt$ (나) $g(0)-\int_0^1 g(t)\,dt=\frac{2}{3}$

$g(1)$ 의 값은? [4점]

① -2 ② $-\frac{5}{3}$ ③ $-\frac{4}{3}$

④ -1 ⑤ $-\frac{2}{3}$

[2020. 09. 평가원]

7. 실수 전체의 집합에서 연속인 두 함수 $f(x)$와 $g(x)$가 모든 실수 x에 대하여 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) $f(x) \geq g(x)$
> (나) $f(x)+g(x)=x^2+3x$
> (다) $f(x)g(x)=(x^2+1)(3x-1)$

$\int_0^2 f(x)\,dx$ 의 값은? [4점]

① $\frac{23}{6}$ ② $\frac{13}{3}$ ③ $\frac{29}{6}$
④ $\frac{16}{3}$ ⑤ $\frac{35}{6}$

[2020. 07. 인천교육청]

8. 다항함수 $f(x)$ 가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) $\lim_{x \to \infty} \frac{f(x)+f(-x)}{x^2}=3$
> (나) $f(0)=-1$

$\int_{-3}^{3} f(x)\,dx$ 의 값은? [4점]

① 13 ② 15 ③ 17
④ 19 ⑤ 21

[2020. 07. 인천교육청]

9. 모든 실수 x 에 대하여 $f(x) \geq 0$,

$f(x+3) = f(x)$ 이고 $\int_{-1}^{2} \{f(x) + x^2 - 1\}^2 dx$ 의 값이

최소가 되도록 하는 연속함수 $f(x)$ 에 대하여 $\int_{-1}^{26} f(x)\,dx$ 의

값을 구하시오. [4점]

[2020. 03. 서울교육청]

10. 함수 $f(x)$ 가 모든 실수 x 에 대하여

$$f(x) = x^3 - 4x\int_{0}^{1} |f(t)|\,dt$$

를 만족시킨다. $f(1) > 0$ 일 때, $f(2)$ 의 값은? [4점]

① 6 ② 7 ③ 8
④ 9 ⑤ 10

[2020. 10. 서울교육청]

11. 최고차항의 계수가 4 인 삼차함수 $f(x)$ 에 대하여 함수 $g(x)$ 를

$$g(x)=\int_0^x f(t)\,dt - xf(x)$$

라 하자. 모든 실수 x 에 대하여 $g(x) \le g(3)$ 이고 함수 $g(x)$ 는 오직 1 개의 극값만 가진다. $\int_0^1 g'(x)\,dx$ 의 값은? [4점]

① 8 ② 9 ③ 10

④ 11 ⑤ 12

[2020. 09. 평가원]

12. 함수 $f(x)=-x^2-4x+a$에 대하여 함수

$$g(x)=\int_0^x f(t)\,dt$$

가 닫힌구간 $[0,\ 1]$ 에서 증가하도록 하는 실수 a의 최솟값을 구하시오. [4점]

[2020. 07. 인천교육청]

13. 두 다항함수 $f(x)$, $g(x)$ 가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $f'(x)=x^2-4x$, $g'(x)=-2x$
(나) 함수 $y=f(x)$ 의 그래프와 함수 $y=g(x)$ 의 그래프는 서로 다른 두 점에서만 만난다.

<보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

< 보 기 >

ㄱ. 두 함수 $f(x)$ 와 $g(x)$ 는 모두 $x=0$ 에서 극대이다.
ㄴ. $\{f(0)-g(0)\}\times\{f(2)-g(2)\}=0$
ㄷ. 모든 실수 x 에 대하여 $\int_{-1}^{x}\{f(t)-g(t)\}\,dt\geq 0$이면 $\int_{-1}^{1}\{f(x)-g(x)\}\,dx=2$ 이다.

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

[2020. 04. 경기교육청]

14. 다항함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여

$$3xf(x)=9\int_{1}^{x}f(t)dt+2x$$

를 만족시킬 때, $f'(1)$의 값은? [4점]

① -2 ② -1 ③ 0
④ 1 ⑤ 2

[2020. 03. 서울교육청]

15. 최고차항의 계수가 1 인 삼차함수 $f(x)$ 에 대하여 함수 $g(x)$ 를

$$g(x)=\int_0^x f(t)dt+f(x)$$

라 할 때, 함수 $g(x)$ 는 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 함수 $g(x)$ 는 $x=0$ 에서 극댓값 0 을 갖는다. (나) 함수 $g(x)$ 의 도함수 $y=g'(x)$ 의 그래프는 원점에 대하여 대칭이다.

$f(2)$ 의 값은? [4점]

① -5　② -4　③ -3　④ -2　⑤ -1

[2021. 대학수학능력시험]

16. 실수 $a\,(a>1)$에 대하여 함수 $f(x)$를

$$f(x)=(x+1)(x-1)(x-a)$$

라 하자. 함수

$$g(x)=x^2\int_0^x f(t)dt-\int_0^x t^2 f(t)dt$$

가 오직 하나의 극값을 갖도록 하는 a의 최댓값은? [4점]

① $\frac{9\sqrt{2}}{8}$　② $\frac{3\sqrt{6}}{4}$　③ $\frac{3\sqrt{2}}{2}$　④ $\sqrt{6}$　⑤ $2\sqrt{2}$

(3) 정적분의 활용

[2020. 07. 인천교육청]

17. 첫째항이 1 이고 공차가 2 인 등차수열 $\{a_n\}$ 이 있다. 자연수 n 에 대하여 좌표평면 위의 점 P_n 을 다음 규칙에 따라 정한다.

> (가) 점 P_1 의 좌표는 $(1,\ 1)$ 이다.
> (나) 점 P_n 의 x 좌표는 a_n 이다.
> (다) 직선 $\mathrm{P}_n\mathrm{P}_{n+1}$ 의 기울기는 $\frac{1}{2}a_{n+1}$ 이다.

$x \geq 1$ 에서 정의된 함수 $y=f(x)$ 의 그래프가 모든 자연수 n 에 대하여 닫힌구간 $[a_n,\ a_{n+1}]$ 에서 선분 $\mathrm{P}_n\mathrm{P}_{n+1}$ 과 일치할 때, $\int_1^{11} f(x)\,dx$ 의 값은? [4점]

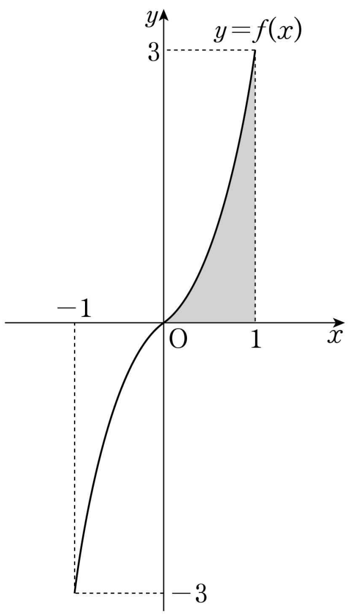
① 140　② 145　③ 150
④ 155　⑤ 160

[2020. 03. 서울교육청]

18. 닫힌구간 $[-1,\ 1]$ 에서 정의된 연속함수 $f(x)$ 는 정의역에서 증가하고 모든 실수 x 에 대하여 $f(-x)=-f(x)$ 가 성립할 때, 함수 $g(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

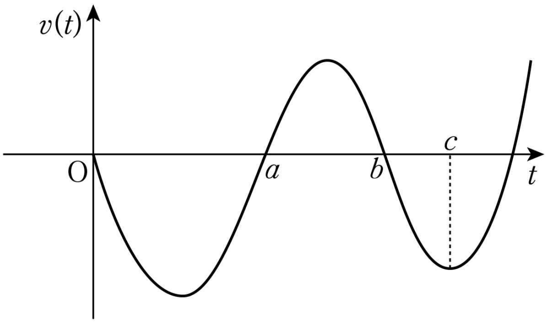
> (가) 닫힌구간 $[-1,\ 1]$ 에서 $g(x)=f(x)$ 이다.
> (나) 닫힌구간 $[2n-1,\ 2n+1]$ 에서 함수 $y=g(x)$ 의 그래프는 함수 $y=f(x)$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 $2n$ 만큼, y 축의 방향으로 $6n$ 만큼 평행이동한 그래프이다. (단, n 은 자연수이다.)

$f(1)=3$ 이고 $\int_0^1 f(x)dx=1$ 일 때, $\int_3^6 g(x)dx$ 의 값을 구하시오. [4점]



[2020. 03. 서울교육청]

19. 원점을 출발하여 수직선 위를 움직이는 점 P 의 시각 t $(t \geq 0)$ 에서의 속도 $v(t)$ 의 그래프가 그림과 같다.



점 P 가 출발한 후 처음으로 운동 방향을 바꿀 때의 위치는 -8 이고 점 P 의 시각 $t=c$ 에서의 위치는 -6 이다.
$\int_0^b v(t)dt = \int_b^c v(t)dt$ 일 때, 점 P 가 $t=a$ 부터 $t=b$ 까지 움직인 거리는? [4점]

① 3 ② 4 ③ 5
④ 6 ⑤ 7

[2020. 03. 서울교육청]

20. 수직선 위를 움직이는 점 P 의 시각 t 에서의 속도 $v(t)$ 가 $v(t)=3t^2-12t+9$ 이다. 점 P 가 $t=0$ 일 때 원점을 출발하여 처음으로 운동 방향을 바꾼 순간의 위치를 A 라 하자. 점 P 가 A 에서 방향을 바꾼 순간부터 다시 A 로 돌아올 때까지 움직인 거리를 구하시오. [4점]

1. 160

$f'(x)=6x^2-6(a+1)x+6a=6(x-1)(x-a)$

이므로 $f'(x)=0$ 에서 $x=1$ 또는 $x=a$

$f(1)=2-3(a+1)+6a=3a-1,$

$f(a)=2a^3-3a^2(a+1)+6a^2=-a^2(a-3)$

이므로 삼차방정식 $f(x)=0$이 서로 다른 세 실근을 갖기 위해서는

$f(1)f(a)=-a^2(3a-1)(a-3)<0$

$a^2>0$ 이므로 $(3a-1)(a-3)>0$

그런데 a는 자연수이므로 $a>3$

그러므로 $a_1=4,\ a_2=5,\ \cdots,\ a_n=n+3$

$a=a_n$ 일 때, $f(x)=2x^3-3(a_n+1)x^2+6a_nx$ 이고

$f(x)$는 $x=1$ 에서 극댓값 $b_n=f(1)=3a_n-1$

따라서 $\displaystyle\sum_{n=1}^{10}(b_n-a_n)=\sum_{n=1}^{10}(2n+5)=160$

2. ②

주어진 조건에 의하여 $f(x)=a(x-1)^2+b$ (b는 상수)로

놓으면 $f'(x)=2a(x-1)$ 이므로

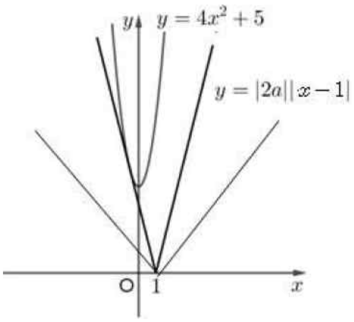
$|f'(x)|\le 4x^2+5$에서

$|2a(x-1)|\le 4x^2+5\ \cdots$ ㉠

즉, ㉠이 모든 실수 x에 대하여 성립해야 하므로 두 곡선

$y=|2a(x-1)|=|2a||x-1|,\ y=4x^2+5$

가 그림과 같아야 한다.



즉, 실수 a의 최댓값은 점 $(1,\ 0)$에서 곡선 $y=4x^2+5$

에 그은 접선이 $y=-|2a|(x-1)$일 때이므로 접점을

$(k,\ 4k^2+5)$ $(k<0)$이라 하면 $y'=8x$에서

$y-(4k^2+5)=8k(x-k)$

이 접선이 점 $(1,\ 0)$을 지나므로

$4k^2-8k-5=0,\ (2k-5)(2k+1)=0,\ k=-\dfrac{1}{2}$

즉, 접선의 기울기는 $8\times\left(-\dfrac{1}{2}\right)=-4$이므로

$-|2a|=-4,\ |a|=2$

$a=-2$ 또는 $a=2$

따라서 실수 a의 최댓값은 2이다.

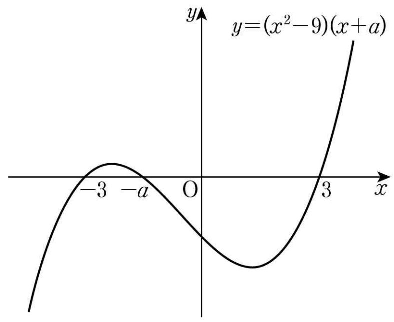
3. ①

(i) $0<a<3$ 일 때

함수 $y=(x^2-9)(x+a)$ 의 그래프는 x 축과

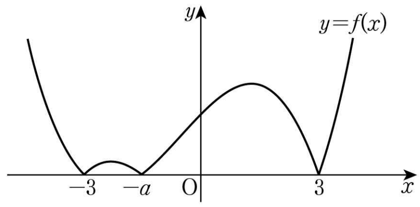
세 점 $(-3,0)$, $(-a,0)$, $(3,0)$ 에서 만나므로

그래프의 개형은 그림과 같다.



그러므로 함수 $f(x)=\left|(x^2-9)(x+a)\right|$ 의 그래프의 개형은

그림과 같다.



함수 $f(x)$ 는 $x=-3,\ x=-a,\ x=3$ 에서 미분가능하지

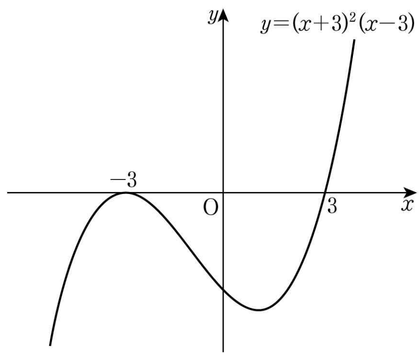
않으므로 주어진 조건을 만족시키지 않는다.

(ii) $a=3$일 때

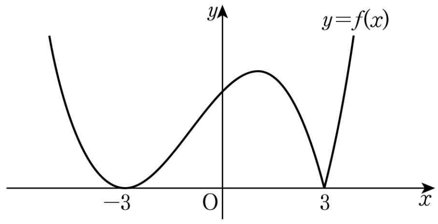
함수 $y=(x^2-9)(x+a)=(x+3)^2(x-3)$의 그래프는 x 축과

점 $(-3,0)$에서 접하고 점 $(3,0)$ 에서 만나므로 그래프의 개형은

그림과 같다.



그러므로 $f(x)=\left|(x+3)^2(x-3)\right|$ 의 그래프 개형은 그림과 같다.



$f(x)$ 는 $x=3$에서만 미분가능하지 않으므로

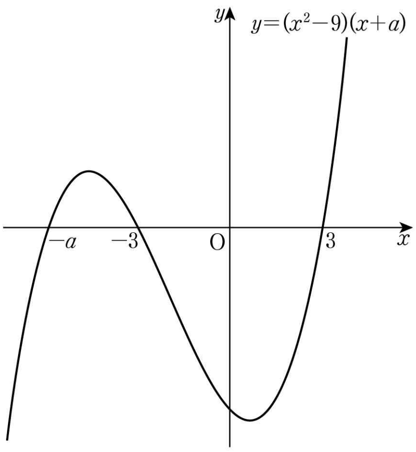
주어진 조건을 만족시킨다.

(iii) $a>3$ 일 때

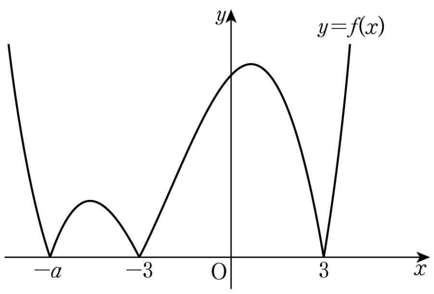
함수 $y=(x^2-9)(x+a)$ 의 그래프는 x 축과

세 점 $(-a,0)$, $(-3,0)$, $(3,0)$ 에서 만나므로

그래프의 개형은 그림과 같다.



그러므로 함수 $f(x)=|(x^2-9)(x+a)|$ 의 그래프의 개형은 그림과 같다.



함수 $f(x)$ 는 $x=-a,\ x=-3,\ x=3$ 에서 미분가능하지 않으므로 주어진 조건을 만족시키지 않는다.

그러므로 (ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)에 의해 $a=3$

함수 $y=(x^2-9)(x+3)$ 의 극솟값의 절댓값이

함수 $f(x)=|(x^2-9)(x+3)|$ 의 극댓값이다.

$y=(x^2-9)(x+3)$ 의 도함수는

$y'=2x(x+3)+(x^2-9)=3(x+3)(x-1)$ 이므로

$y'=0$ 에서 $x=-3$ 또는 $x=1$

$y=(x^2-9)(x+3)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-3	$\cdots$	1	$\cdots$
y'	+	0	-	0	+
y	↗	0	↘	-32	↗

그러므로 함수 $y=(x^2-9)(x+3)$ 은 $x=1$ 에서 극소이고 극솟값은 -32

따라서 함수 $f(x)$ 는 $x=1$ 에서 극대이고 극댓값은

$f(1)=|-32|=32$

[보충 설명]

$a=3$ 일 때 함수 $f(x)$ 가 $x=3$ 에서만 미분가능하지 않음을 보이자.

$$f(x)=|(x^2-9)(x+3)|$$
$$=|(x+3)^2(x-3)|$$
$$=\begin{cases}(x+3)^2(x-3) & (x\geq 3)\\ -(x+3)^2(x-3) & (x<3)\end{cases}$$

함수 $f(x)$ 가 구간 $(-\infty,3)$ 과 구간 $(3,\infty)$ 에서 각각 다항함수이므로 함수 $f(x)$ 는 $x\neq 3$ 인 모든 실수 x 에서 미분가능하다.

그런데

$$\lim_{x\to 3-}\frac{f(x)-f(3)}{x-3}=\lim_{x\to 3-}\frac{-(x+3)^2(x-3)}{x-3}=-36$$

$$\lim_{x\to 3+}\frac{f(x)-f(3)}{x-3}=\lim_{x\to 3+}\frac{(x+3)^2(x-3)}{x-3}=36$$

이므로 극한값 $\lim\limits_{x\to 3}\frac{f(x)-f(3)}{x-3}$ 이 존재하지 않는다.

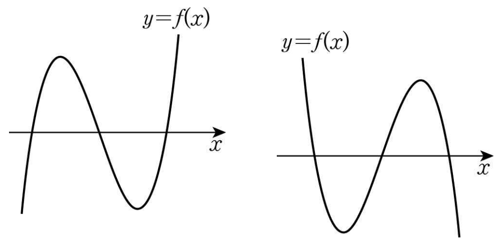
그러므로 $f(x)$ 는 $x=3$ 에서 미분가능하지 않다.

따라서 $f(x)$ 는 오직 한 개의 x 값에서만 미분가능하지 않다.

4. ①

함수 $f(x)$ 의 삼차항의 계수를 a 라 하면 조건 (가)에 의해 함수 $y=f(x)$ 의 그래프와 x 축이 서로 다른 세 점에서 만나므로 함수 $y=f(x)$ 의 그래프의 개형은 그림과 같다.

$a>0$일 때 $a<0$일 때



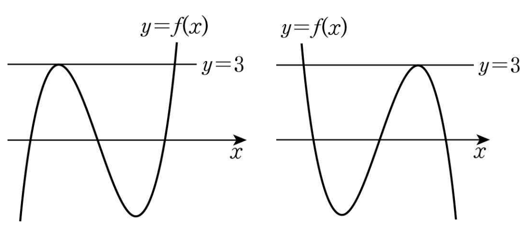
함수 $f(x)$ 는 삼차함수이므로 실수 전체의 집합을 치역으로 갖고, 이차함수 $g(x)=x^2-6x+10=(x-3)^2+1$ 은 $x=3$ 에서 최솟값 1 을 갖는다.

그러므로 조건 (나)에서 함수 $g(f(x))=\{f(x)-3\}^2+1$ 은 $f(x)=3$ 인 x에서 최솟값 1 을 가지므로 $m=1$

한편, 방정식 $g(f(x))=1$ 의 서로 다른 실근의 개수가 2 이므로 방정식 $f(x)=3$ 을 만족시키는 서로 다른 실근의 개수는 2

그러므로 직선 $y=3$ 과 함수 $y=f(x)$ 의 그래프의 개형은 그림과 같다.

$a>0$일 때 $a<0$일 때



즉, 함수 $f(x)$ 의 극댓값은 3

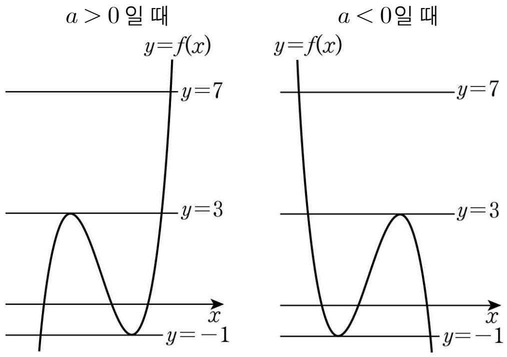
조건 (다)의 방정식 $g(f(x))=17$을 풀면

$\{f(x)-3\}^2+1=17,\ \{f(x)-3\}^2=16$

$f(x)=-1$ 또는 $f(x)=7$

조건 (다)에서 방정식 $g(f(x))=17$ 은 서로 다른 세 실근을 갖고 위의 그래프에서 방정식 $f(x)=7$ 의 실근의 개수를 유추하면 1 이므로 방정식 $f(x)=-1$ 의 서로 다른 실근의 개수는

2 이다.
그러므로 세 직선 $y=-1$, $y=3$, $y=7$ 과
함수 $y=f(x)$ 의 그래프의 개형은 그림과 같다.



즉, 함수 $f(x)$ 의 극솟값은 -1
따라서 함수 $f(x)$ 의 극댓값은 3, 극솟값은 -1 이므로 그 합은
$3+(-1)=2$

5. 34

모든 실수 x 에 대하여 부등식 $f(x) \le 12x+k \le g(x)$ 를
만족시키는 자연수 k 의 값의 범위를 구하여 보자.

(i) $f(x) \le 12x+k$
모든 실수 x 에 대하여 부등식 $f(x) \le 12x+k$ 를
만족시키는 k 의 값의 범위를 구하면 다음과 같다.
$h(x)=f(x)-12x$ 라고 하면
$h(x)=-x^4-2x^3-x^2-12x$,
$h'(x)=-4x^3-6x^2-2x-12=-2(x+2)(2x^2-x+3)$
$h(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

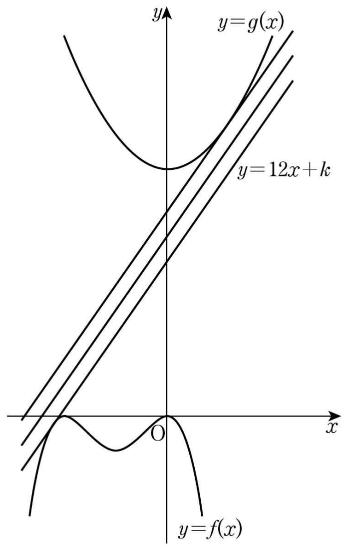
x	$\cdots$	-2	$\cdots$
$h'(x)$	+	0	-
$h(x)$	↗	20	↘

$h(x)$ 는 $x=-2$ 에서 최대이고 최댓값은 20
그러므로 모든 실수 x 에 대하여 부등식
$f(x) \le 12x+k$ 를 만족시키는 k 의 값의 범위는
$k \ge 20$

(ii) $g(x) \ge 12x+k$
모든 실수 x 에 대하여 부등식 $g(x) \ge 12x+k$ 를
만족시키는 k 의 값의 범위를 구하면 다음과 같다.
부등식 $3x^2-12x+a-k \ge 0$ 이 모든 실수 x 에 대하여 성립해야
하므로 이차방정식 $3x^2-12x+a-k=0$ 의 판별식을 D 라 하면
$\frac{D}{4}=(-6)^2-3\times(a-k) \le 0$, $k \le a-12$
모든 실수 x 에 대하여 부등식 $g(x) \ge 12x+k$ 를
만족시키는 k 의 값의 범위는 $k \le a-12$

(i), (ii)에 의해 $20 \le k \le a-12$ 이고 이를 만족시키는 자연수
k 의 개수는 3 이므로 $22 \le a-12 < 23$
따라서 $34 \le a < 35$ 이므로 자연수 a 의 값은 34

[보충 설명]
두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$ 의 그래프와 직선
$y=12x+k$ 의 관계는 그림과 같다.

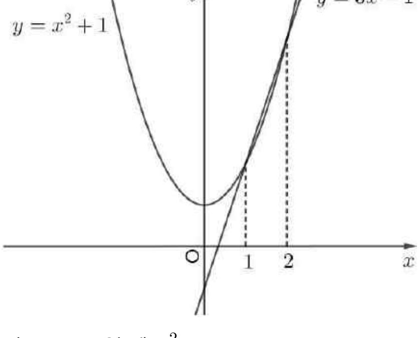


6. ③

$\int_0^1 g(t)\,dt=a$ 라 하면 (가)에서 $f(x)=2x+2a$
$g(x)$ 는 $f(x)$ 의 한 부정적분이므로
$g(x)=\int f(x)dx=x^2+2ax+C$ (C는 적분상수)
(나)에서 $C-\int_0^1(t^2+2at+C)dt=\frac{2}{3}$
$C-\left(\frac{1}{3}+a+C\right)=\frac{2}{3}$ 에서 $a=-1$
$\int_0^1 g(t)\,dt=a$ 에서 $\left[\frac{1}{3}t^3-t^2+Ct\right]_0^1=-1$
즉, $C=-\frac{1}{3}$ 이므로 $g(x)=x^2-2x-\frac{1}{3}$
따라서 $g(1)=1-2-\frac{1}{3}=-\frac{4}{3}$

7. ③

$x^2+3x=(x^2+1)+(3x-1)$
이고 두 함수 $y=x^2+1$, $y=3x-1$ 의 교점의 x 좌표는
$x^2+1=3x-1$, $x^2-3x+2=0$, $(x-1)(x-2)=0$
$x=1$ 또는 $x=2$
이므로 두 함수의 그래프는 그림과 같다.



즉, $x \le 1$ 또는 $x \ge 2$일 때 $x^2+1 \ge 3x-1$

$1 < x < 2$일 때 $x^2+1 < 3x-1$

이므로 조건 (가)를 만족시키는 함수 $f(x)$, $g(x)$는 각각

$$f(x)=\begin{cases} x^2+1 & (x \le 1) \\ 3x-1 & (1 < x < 2) \\ x^2+1 & (x \ge 2) \end{cases}$$

$$g(x)=\begin{cases} 3x-1 & (x \le 1) \\ x^2+1 & (1 < x < 2) \\ 3x-1 & (x \ge 2) \end{cases}$$

따라서

$$\int_0^2 f(x)dx = \int_0^1 (x^2+1)dx + \int_1^2 (3x-1)dx$$

$$= \left[\frac{1}{3}x^3+x\right]_0^1 + \left[\frac{3}{2}x^2-x\right]_1^2$$

$$= \frac{4}{3}+\left(4-\frac{1}{2}\right) = \frac{29}{6}$$

8. ⑤

다항함수 $f(x)$에 대하여

$f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$

(a_0, a_1, a_2, $\cdots$, a_n은 실수)라 하면

$f(-x)=a_n(-x)^n+a_{n-1}(-x)^{n-1}+\cdots+a_1(-x)+a_0$

이고 k가 홀수인 경우 $\int_{-3}^{3} x^k dx = 0$이므로

$$\int_{-3}^{3} f(-x)dx = \int_{-3}^{3} f(x)dx$$

조건 (가)에 의하여

$f(x)+f(-x)=3x^2+ax+b$ (a, b는 상수)

이고 $f(x)+f(-x)$는 차수가 홀수인 항을 갖지 않으므로 $a=0$

조건 (나)에 의하여 $f(0)+f(0)=-2=b$

그러므로 $f(x)+f(-x)=3x^2-2$

$$\int_{-3}^{3}\{f(x)+f(-x)\}dx = \int_{-3}^{3} f(x)dx + \int_{-3}^{3} f(-x)dx$$

$$= 2\int_{-3}^{3} f(x)dx$$

따라서 $\int_{-3}^{3} f(x)dx = \frac{1}{2}\int_{-3}^{3}\{f(x)+f(-x)\}dx$

$$= \frac{1}{2}\int_{-3}^{3}(3x^2-2)dx = 21$$

9. 12

모든 실수 x에 대하여 $\{f(x)+x^2-1\}^2 \ge 0$, $f(x) \ge 0$이므로

정적분 $\int_{-1}^{2}\{f(x)+x^2-1\}^2dx$의 값이 최소가 되기 위해서는

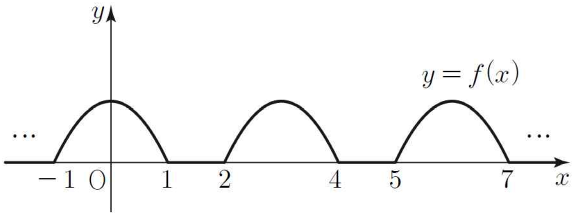
(i) $-1 \le x \le 1$에서

$x^2-1 \le 0$이므로 $f(x)=-(x^2-1)=-x^2+1$

(ii) $1 < x \le 2$에서

$x^2-1 > 0$이므로 $f(x)=0$

$f(x+3)=f(x)$이고, (i), (ii)에 의하여 함수 $f(x)$의 그래프의 개형은 다음과 같다.



$$\int_{-1}^{2} f(x)dx = \int_{2}^{5} f(x)dx = \int_{5}^{8} f(x)dx$$

$$= \cdots = \int_{23}^{26} f(x)dx$$

따라서 $\int_{-1}^{26} f(x)dx = 9\int_{-1}^{2} f(x)dx$

$$= 9\int_{-1}^{1}(-x^2+1)dx = 12$$

10. ②

$a=\int_0^1 |f(t)|dt$ 라 하면 $a>0$ 이고

$f(x)=x^3-4ax$

$f(1)=1-4a>0$ 에서 $a<\frac{1}{4}$

따라서 $0<a<\frac{1}{4}$ 이다.

$f(x)=x(x^2-4a)=0$ 에서 $x=0$ 또는 $x=\pm 2\sqrt{a}$

$0<x<2\sqrt{a}$ 일 때 $f(x)<0$ 이고 $x \ge 2\sqrt{a}$ 일 때

$f(x) \ge 0$ 이다.

$0<a<\frac{1}{4}$ 에서 $2\sqrt{a}<1$ 이므로

$$a=\int_0^{2\sqrt{a}}\{-f(t)\}dt+\int_{2\sqrt{a}}^{1} f(t)dt$$

$$=\int_0^{2\sqrt{a}}(-t^3+4at)dt+\int_{2\sqrt{a}}^{1}(t^3-4at)dt$$

$$=\left[-\frac{1}{4}t^4+2at^2\right]_0^{2\sqrt{a}}+\left[\frac{1}{4}t^4-2at^2\right]_{2\sqrt{a}}^{1}$$

$$=8a^2-2a+\frac{1}{4}$$

$8a^2-3a+\frac{1}{4}=0$에서

$32a^2-12a+1=0$, $(4a-1)(8a-1)=0$

$0<a<\frac{1}{4}$ 이므로 $a=\frac{1}{8}$ 이고

$f(x)=x^3-\frac{1}{2}x$

이때 $f(2)=2^3-\frac{1}{2}\times 2=7$

11. ②

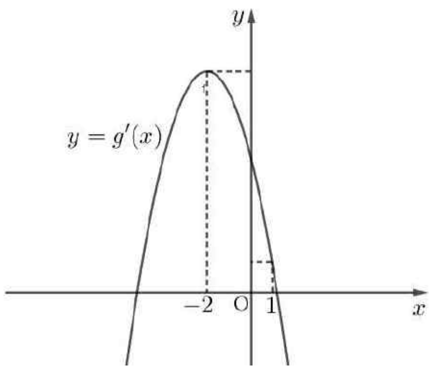
$g'(x)=f(x)-\{f(x)+xf'(x)\}=-xf'(x)$

삼차함수 $f(x)$ 의 최고차항의 계수가 4이므로 $f'(x)$ 는 이차항의

계수가 12 인 이차함수이다.
그러므로 $g'(x)=-xf'(x)$ 에서 $g'(x)$ 는 최고차항의 계수가 -12 인 삼차함수이다.
또, 모든 실수 x 에 대하여 $g(x) \le g(3)$ 이므로 함수 $g(x)$ 는 $x=3$ 에서 최댓값을 가지고 함수 $g(x)$ 는 $x=3$ 에서 극값을 가진다.
즉, $g'(3)=0$
그러므로 $f'(3)=0$에서 $g'(x)=-12x(x-3)(x-a)$
사차함수 $g(x)$ 가 오직 1 개의 극값만 가지므로 함수 $g(x)$ 는 $x=0$ 에서 극값을 가질 수 없다. 즉, $a=0$
$g'(x)=-12x^2(x-3)=-12x^3+36x^2$
따라서 $\int_0^1 g'(x)\,dx=\left[-3x^4+12x^3\right]_0^1=9$

12. 5

$f(x)=-x^2-4x+a,\ g(x)=\int_0^x f(t)dt$에서
$g'(x)=f(x)=-x^2-4x+a=-(x+2)^2+a+4$

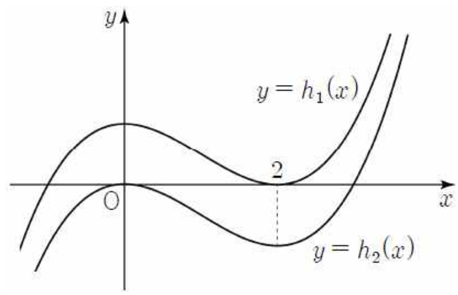


함수 $g(x)$가 닫힌 구간 $[0,\ 1]$에서 증가해야 하므로
$g'(1)=a-5\ge 0$
즉, $a\ge 5$이어야 한다.
따라서 a의 최솟값은 5이다.

13. ⑤

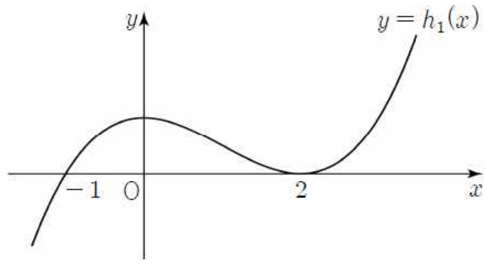
ㄱ. $f'(0)=g'(0)=0$
$x<0$에서 $f'(x)>0,\ g'(x)>0$
$0<x<4$에서 $f'(x)<0,\ g'(x)<0$
이므로 두 함수 $f(x)$와 $g(x)$는 모두 $x=0$에서 극대이다. (참)

ㄴ. $f(x)=\frac{1}{3}x^3-2x^2+C_1,\ g(x)=-x^2+C_2$
(단, $C_1,\ C_2$는 적분상수)
$h(x)=f(x)-g(x)$라 하면
$h'(x)=f'(x)-g'(x)=x(x-2)$
두 함수 $f(x)$, $g(x)$의 그래프가 서로 다른 두 점에서 만나는 경우는 삼차함수 $h(x)$의 그래프가 x축과 서로 다른 두 점에서만 만나는 경우이므로 삼차함수 $h(x)$의 그래프의 개형은 다음 $y=h_1(x)$와 $y=h_2(x)$의 두 가지이다.



$h(x)=h_1(x)$일 때, $h_1(2)=0$이므로
$h_1(0)\times h_1(2)=0$
$h(x)=h_2(x)$일 때, $h_2(0)=0$이므로
$h_2(0)\times h_2(2)=0$
$\{f(0)-g(0)\}\times\{f(2)-g(2)\}=0$ (참)

ㄷ. $\int_{-1}^0 h_2(t)dt<0$이므로 함수 $h_2(x)$는 모든 실수 x에 대하여
$\int_{-1}^x \{f(t)-g(t)\}dt\ge 0$을 만족시키는 함수 $h(x)$가 아니다.
$h_1(2)=-\frac{4}{3}+C_1-C_2=0,\ C_1-C_2=\frac{4}{3}$
$h_1(x)=\frac{1}{3}x^3-x^2+\frac{4}{3}=\frac{1}{3}(x+1)(x-2)^2$



$x<-1$일 때, $h_1(x)<0$이므로 $\int_{-1}^x h_1(t)dt>0$
$x\ge -1$일 때, $h_1(x)\ge 0$이므로 $\int_{-1}^x h_1(t)dt\ge 0$
그러므로 모든 실수 x에 대하여
$\int_{-1}^x \{f(t)-g(t)\}dt\ge 0$을 만족시키는 함수 $h(x)$는 함수 $h_1(x)$이다.
$\int_{-1}^1 \{f(x)-g(x)dx=\int_{-1}^1\left(\frac{1}{3}x^3-x^2+\frac{4}{3}\right)dx=2$ (참)
따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ

14. ⑤

$3xf(x)=9\int_1^x f(t)dt+2x$의 양변에 $x=1$을 대입하면
$3f(1)=0+2,\ f(1)=\frac{2}{3}$
$3xf(x)=9\int_1^x f(t)dt+2x$의 양변을 x에 대하여 미분하면
$3\{f(x)+xf'(x)\}=9f(x)+2$
$x=1$ 대입하면
$3\{f(1)+f'(1)\}=9f(1)+2$

$3f'(1)=6f(1)+2=6\times\dfrac{2}{3}+2=6$

따라서 $f'(1)=2$

15. ②

$g(x)=\int_0^x f(t)\,dt+f(x)$ 에서

$g'(x)=f(x)+f'(x)$,

$g(0)=\int_0^0 f(t)\,dt+f(0)=0+f(0)$,

$g'(0)=f(0)+f'(0)$

조건 (가)에 의해

$g(0)=f(0)=0$

$g'(0)=f(0)+f'(0)=0+f'(0)=0$ 이므로 $f'(0)=0$

그러므로 x^2 은 $f(x)$ 의 인수이다.

$f(x)=x^2(x-k)$ (단, k 는 상수)라 하면

$g'(x)=x^3-kx^2+3x^2-2kx$

$\quad =x^3+(3-k)x^2-2kx$

조건 (나)에 의해 모든 실수 x 에 대하여

$g'(-x)=-g'(x)$ 가 성립한다.

즉, $-x^3+(3-k)x^2+2kx=-x^3-(3-k)x^2+2kx$,

$2(3-k)x^2=0$ 에서 $k=3$

그러므로 $f(x)=x^2(x-3)$

따라서 $f(2)=-4$

[다른 풀이]

$f(x)=x^3+ax^2+bx+c$ 라고 놓으면

$f'(x)=3x^2+2ax+b$

조건 (가)에 의해 $f(0)=0$ 이므로 $c=0$,

$f'(0)=0$이므로 $b=0$

즉, $f(x)=x^3+ax^2$

$g'(x)=f(x)+f'(x)$

$\quad =x^3+ax^2+3x^2+2ax$

$\quad =x^3+(a+3)x^2+2ax$

조건 (나)에 의해 함수 $y=g'(x)$ 의 그래프는 원점에 대하여 대칭이므로 x^2의 계수는 0 이다. 즉, $a=-3$

따라서 $f(x)=x^3-3x^2$ 에서 $f(2)=8-12=-4$

16. ④

$g'(x)=2x\int_0^x f(t)dt+x^2f(x)-x^2f(x)$

$\quad =2x\int_0^x f(t)dt$

이고

$f(x)=(x+1)(x-1)(x-a)$ $(a>1)$이므로

$g'(x)=0$을 만족시키는 x의 값이 좌우에서

$g'(x)$의 부호가 변하는 값이 오직 한 개만 존재해야 한다.

이때, $g'(x)=0$을 만족시키는 x의 값은

$x=0$ 또는 방정식 $\int_0^x f(t)dt=0$의 실근이다.

i) $\int_0^\alpha f(t)dt=0$을 만족시키는 실수 α $(\alpha<-1)$가 반드시 존재하고, $x=\alpha$의 좌우에서 $g'(x)$의 부호는 음에서 양으로 바뀌므로 함수 $g(x)$는 $x=\alpha$에서 극값을 갖는다.

ii) $\int_0^0 f(t)dt=0$이고,

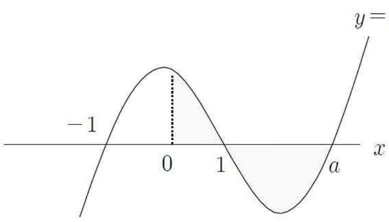
$-1<x<0$인 임의의 실수 x에 대하여 $\int_0^x f(t)dt<0$,

$0<x<1$인 임의의 실수 x에 대하여 $\int_0^x f(t)dt>0$이므로

$x=0$의 좌우에서 $\int_0^x f(t)dt$의 부호는 음에서 양으로 바뀐다.

따라서 $g'(x)=2x\int_0^x f(t)dt$의 부호는 $x=0$의 좌우에서 항상 0 이상이므로 함수 $g(x)$는 $x=0$에서 극값을 갖지 않는다.

따라서 a가 최대가 되는 조건을 만족시키는 경우 그림과 같이 색칠된 두 부분의 넓이가 같을 때이다.



즉, $\int_0^a f(x)dx=0$이어야 하므로

$\int_0^a (x+1)(x-1)(x-a)dx$

$=\left[\dfrac{1}{4}x^4-\dfrac{a}{3}x^3-\dfrac{1}{2}x^2+ax\right]_0^a$

$=\dfrac{1}{4}a^4-\dfrac{a^4}{3}-\dfrac{a^2}{2}+a^2$

$=-\dfrac{a^2}{12}+\dfrac{a^2}{2}=0$

$a^2=6$

즉, a의 최댓값은 $\sqrt{6}$ 이다.

17. ②

점 P_n의 좌표를 $(a_n,\ b_n)$이라 하자.

$a_n=1+(n-1)\times 2=2n-1$

이고 선분 $\mathrm{P}_n\mathrm{P}_{n+1}$과 직선 $x=a_n$, 직선 $x=a_{n+1}$ 및 x축과 둘러싸인 도형의 넓이 S_n은

$S_n=\int_{a_n}^{a_{n+1}} f(x)dx$

$\quad =\dfrac{1}{2}\times(a_{n+1}-a_n)\times(b_n+b_{n+1})$

$\quad =b_n+b_{n+1}$

$a_1=1,\ a_6=11$이므로

$$\int_1^{11} f(x)dx = \int_{a_1}^{a_6} f(x)dx$$
$$= S_1+S_2+S_3+S_4+S_5$$
$$= (b_1+b_2)+(b_2+b_3)+(b_3+b_4)$$
$$+(b_4+b_5)+(b_5+b_6)$$

조건 (다)에 의하여 직선 $\mathrm{P}_n\mathrm{P}_{n+1}$의 기울기는

$$\frac{b_{n+1}-b_n}{a_{n+1}-a_n} = \frac{1}{2}a_{n+1},\ b_{n+1} = b_n + a_{n+1}$$

$b_1 = 1 = a_1$

$b_2 = b_1 + a_2 = a_1 + a_2 = 4$

$b_3 = b_2 + a_3 = a_1 + a_2 + a_3 = 9$

$b_4 = b_3 + a_4 = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = 16$

$b_5 = b_4 + a_5 = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 = 25$

$b_6 = b_5 + a_6 = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 = 36$

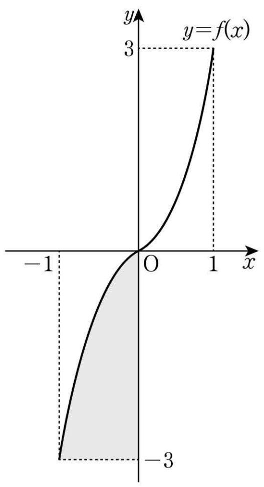
따라서 $\int_1^{11} f(x)dx = S_1+S_2+S_3+S_4+S_5$

$$= (1+4)+(4+9)+(9+16)$$
$$+(16+25)+(25+36)$$
$$= 145$$

18. 41

문제에서 $\int_0^1 f(x)dx = 1$ 이고, 함수 $y = f(x)$ 의

그래프는 원점에 대하여 대칭이다.



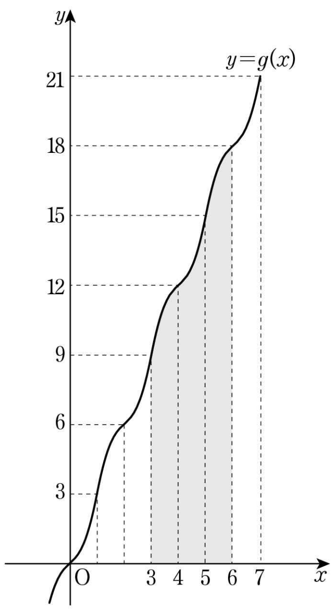
그러므로 그림에서 색칠된 영역의 넓이는 $3-1=2$

닫힌구간 $[3, 6]$ 에서 $\int_3^6 g(x)\,dx = \int_3^6 |g(x)|\,dx$ 는

곡선 $y = g(x)$ 와 x 축 및 두 직선 $x=3,\ x=6$ 으로

둘러싸인 도형의 넓이이므로 함수 $y=g(x)$ 의 그래프

와 구하는 영역을 그림으로 나타내면 다음과 같다.



닫힌구간 $[3, 5]$ 에서 함수 $y=g(x)$ 의 그래프는 함수 $y=f(x)$ 의

그래프를 x 축의 방향으로 4 만큼 평행이동하고 y 축의 방향으로

12 만큼 평행이동한 그래프이므로 $\int_3^5 g(x)\,dx = 2\times 12 = 24$

닫힌구간 $[5, 7]$ 에서 함수 $y=g(x)$ 의 그래프는 함수 $y=f(x)$ 의

그래프를 x 축의 방향으로 6 만큼 평행이동하고 y 축의 방향으로

18 만큼 평행이동한 그래프이므로 $\int_5^6 g(x)\,dx = 15\times 1 + 2 = 17$

따라서 $\int_3^6 g(x)\,dx = \int_3^5 g(x)\,dx + \int_5^6 g(x)\,dx = 41$

19. ③

$\int_0^a |v(t)|\,dt = s_1,\ \int_a^b |v(t)|\,dt = s_2,$

$\int_b^c |v(t)|\,dt = s_3$ 이라 하자.

점 P 는 출발한 후 시각 $t=a$ 에서 처음으로 운동 방향을 바꾸므로

$-8 = \int_0^a v(t)dt = -s_1$에서 $s_1 = 8$

점 P 의 시각 $t=c$ 에서의 위치가 -6 이므로

$-6 = \int_0^c v(t)dt = (-8)+s_2-s_3$

에서 $s_2 - s_3 = 2$ …… ㉠

$\int_0^b v(t)dt = \int_b^c v(t)dt$ 이므로

$-8+s_2 = -s_3$, 즉 $s_2+s_3 = 8$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $s_2 = 5,\ s_3 = 3$

따라서 구하는 거리는 5 이다.

20. 8

점 P 가 운동 방향을 바꿀 때 속도는 0 이므로

$v(t) = 3t^2 - 12t + 9 = 3(t-1)(t-3) = 0$, $t=1$ 또는 $t=3$

$0 \le t < 1$에서 $v(t) > 0$,
$1 < t < 3$에서 $v(t) < 0$,
$t > 3$ 에서 $v(t) > 0$
이므로 점 P 는 $t=1$ 일 때 처음으로 운동 방향을 바꾸고 $t=3$ 일 때 다시 운동 방향을 바꾼다.
그러므로 점 P 가 A 에서 방향을 바꾼 순간부터 다시 A 로 돌아올 때까지 움직인 거리는 점 P 가 $t=1$ 부터 $t=3$ 까지 이동한 거리의 2 배이다.
따라서 구하는 값은

$$\begin{aligned} 2\int_1^3 |v(t)|\,dt &= 2\int_1^3 \left(-3t^2+12t-9\right)dt \\ &= 2\Big[-t^3+6t^2-9t\Big]_1^3 \\ &= 8 \end{aligned}$$

[다른 풀이]
점 P 가 다시 A 로 돌아올 때의 시각을 $t=a$ (단, $a>1$)라 하면
$\int_1^a v(t)\,dt = 0$ 이므로

$$\begin{aligned} \int_1^a v(t)\,dt &= \int_1^a \left(3t^2-12t+9\right)dt \\ &= \Big[t^3-6t^2+9t\Big]_1^a \\ &= a^3-6a^2+9a-4 \\ &= (a-1)^2(a-4) = 0 \end{aligned}$$

그러므로 $t=4$ 일 때 점 P 가 다시 A 로 돌아온다.
따라서

$$\begin{aligned} \int_1^4 |v(t)|\,dt &= -\int_1^3 v(t)dt + \int_3^4 v(t)dt \\ &= -\int_1^3 \left(3t^2-12t+9\right)dt + \int_3^4 \left(3t^2-12t+9\right)dt \\ &= -\Big[t^3-6t^2+9t\Big]_1^3 + \Big[t^3-6t^2+9t\Big]_3^4 \\ &= 8 \end{aligned}$$