백 인 대 장

수학2 기말대비

최근 5개년 2학년 기출

(1) 도함수의 활용

1. 닫힌구간 $[0, 5]$에서 정의된 함수 $f(x) = x^3 - 9x^2 + 15x + a$의 최솟값이 -15일 때, 최댓값은? (단, a는 상수이다.) [4점]

① 15 ② 16 ③ 17 ④ 18 ⑤ 19

2. 최고차항의 계수가 1인 사차함수 $f(x)$가 있다. 실수 t에 대하여 함수 $|f(x) - t|$가 미분가능하지 않은 서로 다른 점의 개수를 $g(t)$라 할 때, 함수 $f(x)$, $g(t)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 방정식 $f'(x) = 0$의 실근은 $1, 4$뿐이다.
(나) 함수 $g(t)$는 $t = 2$와 $t = -25$에서만 불연속이다.
(다) 방정식 $f(x) = 0$은 4보다 큰 실근을 갖는다.

$f(-1)$의 값은? [4점]

① 41 ② 44 ③ 47 ④ 50 ⑤ 53

3. 좌표평면에서 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$와 원점을 지나는 직선 $y=g(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 극댓값 27을 갖는다. (나) 함수 $\lvert f(x)-g(x)\rvert$는 $x=-3$에서만 미분가능하지 않다. (다) 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=g(x)$는 서로 다른 두 점에서 만난다.

함수 $f(x)$의 극솟값을 구하시오. [4점]

4. 함수 $f(x)=\frac{1}{3}x^3+a$의 역함수를 $g(x)$라 하자. 두 함수 $y=f(x)$와 $y=g(x)$의 그래프가 서로 다른 두 점에서 만나도록 하는 모든 상수 a의 값의 곱은? [4점]

① $-\frac{25}{36}$ ② $-\frac{4}{9}$ ③ $-\frac{1}{4}$ ④ $-\frac{1}{9}$ ⑤ $-\frac{1}{36}$

5. 최고차항의 계수가 1 인 삼차함수 $f(x)$ 가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $1<x<2$ 인 모든 실수 x 에 대하여 $f'(x)<0$ 이고 $f'(x-1)f'(x+1)<0$ 이다.
(나) 함수 $f(\lvert x\rvert)$ 는 모든 실수 x 에서 미분가능하다.

$f(0)-f(-2)$ 의 값을 구하시오. [4점]

(2) 부정적분과 정적분

6. 최고차항의 계수가 양수인 사차함수 $f(x)$의 도함수 $f'(x)$에 대하여 방정식 $f'(x)=0$이 세 실근 α, 0, $\beta(\alpha<0<\beta)$를 갖는다.

$$S=\int_{\alpha}^{0}\lvert f'(x)\rvert dx,\ \ T=\int_{0}^{\beta}\lvert f'(x)\rvert dx$$

라 할 때, <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

〈 보 기 〉

ㄱ. 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 극댓값을 갖는다.
ㄴ. $\alpha+\beta=0$이면 $S=T$이다.
ㄷ. $S<T$이고 $f(\alpha)=0$이면 방정식 $f(x)=0$의 양의 실근의 개수는 2이다.

① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

7. 실수 전체의 집합에서 연속인 함수 $f(x)$ 가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 모든 정수 m 에 대하여 $\displaystyle\int_{m}^{m+2} f(x)\,dx = 4$ 이다.
(나) $0 \le x \le 2$ 에서 $f(x) = x^3 - 6x^2 + 8x$ 이다.

$4\displaystyle\int_{1}^{10} f(x)\,dx$ 의 값을 구하시오. [4점]

8. 최고차항의 계수가 1 인 두 사차함수 $f(x)$, $g(x)$ 가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 두 함수 $y = f(x)$ 와 $y = g(x)$ 의 그래프가 만나는 세 점의 x 좌표는 각각 -1 , 0 , 2 이다.
(나) $\displaystyle\int_{0}^{2} f(x)dx = 4$, $\displaystyle\int_{0}^{2} g(x)dx = 12$

$f(3) - g(3)$ 의 값을 구하시오. [4점]

9. 함수 $f(x)=-x+2-t$에 대하여 함수 $g(t)$를

$$g(t)=\int_{0}^{t}|f(x)|\,dx$$

라 하자. <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? (단, $t>0$) [4점]

〈 보 기 〉

ㄱ. $g(1)=\frac{1}{2}$

ㄴ. 함수 $g(t)$는 $t=2$에서 미분가능하다.

ㄷ. 방정식 $g(t)=\frac{2}{3}$는 서로 다른 두 실근을 갖는다.

① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

10. 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$에 대하여 함수 $g(x)$를

$$g(x)=\int_{2}^{x}(t-2)f'(t)\,dt$$

라 하자. 함수 $g(x)$가 $x=0$에서만 극값을 가질 때, $g(0)$의 값은? [4점]

① -2 ② $-\frac{5}{2}$ ③ -3
④ $-\frac{7}{2}$ ⑤ -4

11. 삼차함수 $f(x)=x^3-4x$ 의 그래프를 x 축에 대하여 대칭이동한 곡선을 $y=g(x)$ 라 하자. <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

〈 보 기 〉

ㄱ. $\int_{-1}^{1} f(x)dx = 0$

ㄴ. $\int_{-1}^{0} f(x)\,dx + \int_{0}^{1} g(x)\,dx = \frac{7}{2}$

ㄷ. 방정식 $\int_{0}^{x} g(t)dt = \int_{0}^{x} f(t)dt + 3$ 은 열린 구간 $(0,\ 1)$ 에서 적어도 하나의 실근을 갖는다.

① ㄱ　② ㄷ　③ ㄱ, ㄴ　④ ㄴ, ㄷ　⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

(3) 정적분의 활용

12. 곡선 $y=x^3-3x^2+x$ 와 직선 $y=x-4$ 로 둘러싸인 부분의 넓이는? [4점]

① $\frac{21}{4}$　② $\frac{23}{4}$　③ $\frac{25}{4}$　④ $\frac{27}{4}$　⑤ $\frac{29}{4}$

13. 최고차항의 계수가 음수인 삼차함수 $f(x)$의 도함수를 $h(x)$라 하자. $f(-1)=f(1)=f(2)=0$일 때, <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

〈 보 기 〉

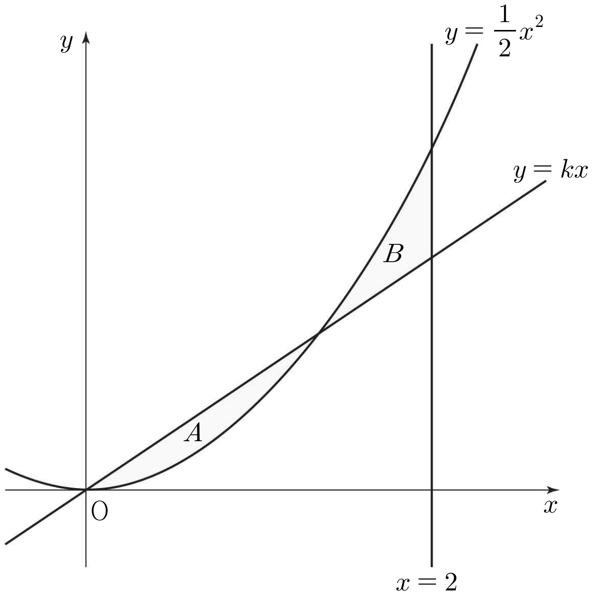
ㄱ. $\int_{1}^{2} f(x)dx > 0$

ㄴ. $h(0) < 0$

ㄷ. $\int_{m}^{n} h(x)dx$의 값이 최대일 때, $m+n=\frac{4}{3}$이다. (단, $m < n$)

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

14. 그림과 같이 곡선 $y=\frac{1}{2}x^2$과 직선 $y=kx$로 둘러싸인 부분의 넓이를 A, 곡선 $y=\frac{1}{2}x^2$과 두 직선 $x=2$, $y=kx$로 둘러싸인 부분의 넓이를 B라 하자. $A=B$일 때, $30k$의 값을 구하시오. (단, k는 $0<k<1$인 상수이다.) [4점]



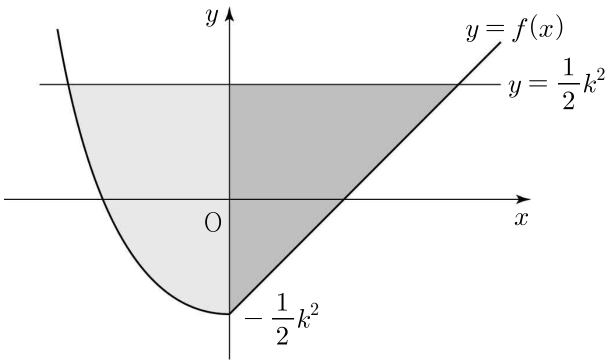
15. 실수 전체의 집합에서 정의된 함수

$$f(x)=\begin{cases} x^2-\dfrac{1}{2}k^2 & (x<0) \\ x-\dfrac{1}{2}k^2 & (x\geq 0) \end{cases}$$

가 있다. 그림과 같이 함수 $y=f(x)$ 의 그래프와

직선 $y=\dfrac{1}{2}k^2$ 으로 둘러싸인 도형의 넓이가 y 축에 의하여

이등분될 때, 상수 k 의 값은? (단, $k>0$) [4점]



① $\dfrac{2}{3}$　　② 1　　③ $\dfrac{4}{3}$

④ $\dfrac{5}{3}$　　⑤ 2

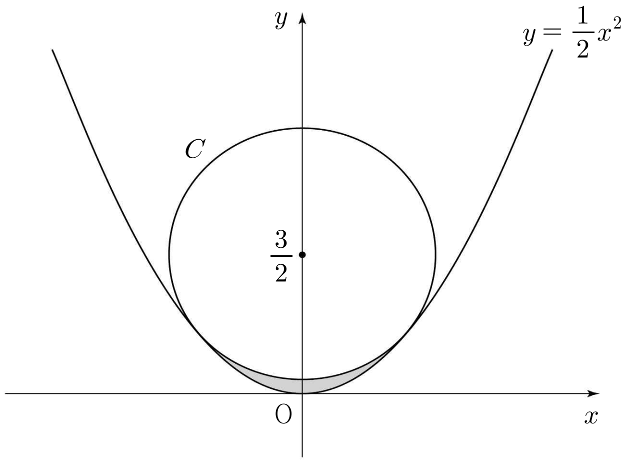
16. 그림과 같이 중심이 $\left(0,\ \dfrac{3}{2}\right)$이고,

반지름의 길이가 $r\left(r<\dfrac{3}{2}\right)$인 원 C가 있다.

원 C가 함수 $y=\dfrac{1}{2}x^2$ 의 그래프와 서로 다른 두 점에서 만날

때, 원 C와 함수 $y=\dfrac{1}{2}x^2$ 의 그래프로 둘러싸인 

모양의 넓이는 $a+b\pi$이다. $120(a+b)$의 값을 구하시오.
(단, a, b는 유리수이다.) [4점]



17. 원점을 동시에 출발하여 수직선 위를 움직이는 두 점 P, Q의 시각 t에서의 속도가 각각

$$v_1(t)=\frac{1}{2}t^2-3t,\ v_2(t)=-\frac{1}{2}t^2+t$$

이다. 다음은 두 점 P, Q가 출발 후 처음으로 만날 때까지 두 점 P, Q 사이의 거리의 최댓값을 구하는 과정이다.

> 두 점 P, Q의 시각 t 에서의 위치를 각각 $x_1(t)$, $x_2(t)$라 하면
>
> $$x_1(t)=\frac{1}{6}t^3-\frac{3}{2}t^2$$
>
> $$x_2(t)=\boxed{\text{(가)}}$$
>
> 출발 후 처음으로 두 점 P, Q가 만나는 시각은 $t=6$이다.
> $0<t\le 6$에서 두 점 P, Q 사이의 거리를 $l(t)$라 하면
> $l(t)$는 $t=\boxed{\text{(나)}}$일 때 극대이면서 최대이므로
> $l(t)$의 최댓값은 $\boxed{\text{(다)}}$이다.

위의 (가)에 알맞은 식을 $f(t)$라 하고, (나), (다)에 알맞은 수를 각각 a, b라 할 때, $\frac{a\times b}{f(2)}$의 값은? [4점]

① 60 ② 62 ③ 64
④ 66 ⑤ 68

18. 원점을 동시에 출발하여 수직선 위를 움직이는 두 점 P, Q의 시각 $t\ (t\ge 0)$에서의 속도가 각각

$$f(t)=t^2-t,\ g(t)=-3t^2+6t$$

일 때, <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

> 〈 보 기 〉
>
> ㄱ. 점 P는 출발 후 운동방향을 1번 바꾼다.
> ㄴ. $t=2$에서 두 점 P, Q의 가속도를 각각 p, q라 할 때, $pq<0$이다.
> ㄷ. $t=0$부터 $t=3$까지 점 Q가 움직인 거리는 8이다.

① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

19. 원점을 출발하여 수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 t에서의 속도 $v(t)$가

$$v(t)=\begin{cases} 6t-2t^2 & (0 \le t < 3) \\ \frac{1}{2}(3-t) & (t \ge 3) \end{cases}$$

이다. 점 P가 시각 $t=0$에서 시각 $t=7$까지 움직인 거리는? [4점]

① 11 ② 12 ③ 13 ④ 14 ⑤ 15

1. ③

$f'(x)=3x^2-18x+15=3(x-1)(x-5)$

$f'(x)=0$에서 $x=1$ 또는 $x=5$

닫힌 구간 $[0,\ 5]$에서 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	0	$\cdots$	1	$\cdots$	5
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	a	↗	$a+7$	↘	$a-25$

닫힌 구간 $[0,\ 5]$에서 함수 $f(x)$는 최댓값 $a+7$, 최솟값 $a-25$를 갖는다.

$a-25=-15,\ a=10$

$\therefore$ 최댓값은 $a+7=17$

2. ④

$f(x)$는 최고차항의 계수가 1인 사차함수이므로

$f(x)=x^4+ax^3+bx^2+cx+d$라 하면

$f'(x)=4x^3+3ax^2+2bx+c$이다.

(가)에서 방정식 $f'(x)=0$의 실근이 $1,\ 4$뿐이므로

$f'(x)=4(x-1)(x-4)^2$이거나

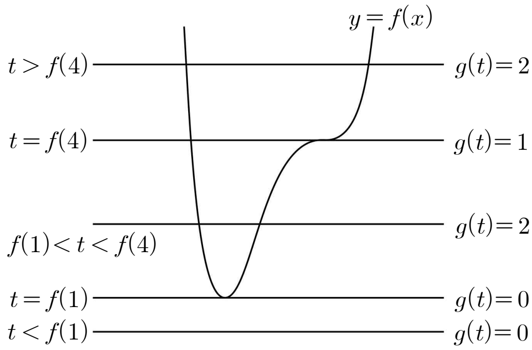
$f'(x)=4(x-1)^2(x-4)$이다.

(i) $f'(x)=4(x-1)(x-4)^2$일 때

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	1	$\cdots$	4	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$+$
$f(x)$	↘	극소	↗	$f(4)$	↗

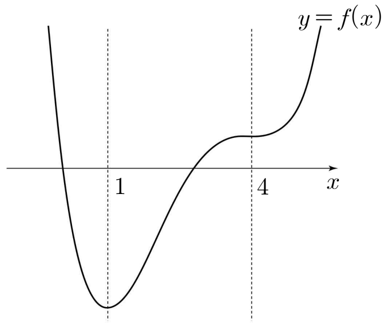
따라서 함수 $f(x)$의 그래프의 개형과 실수 t에 대한 함수 $g(t)$의 값은 그림과 같다.



함수 $g(t)$는 $t=f(1)$, $t=f(4)$에서 불연속이므로

(나)에 의하여 $f(1)=-25,\ f(4)=2$이다.

따라서 함수 $f(x)$의 그래프는 그림과 같다.



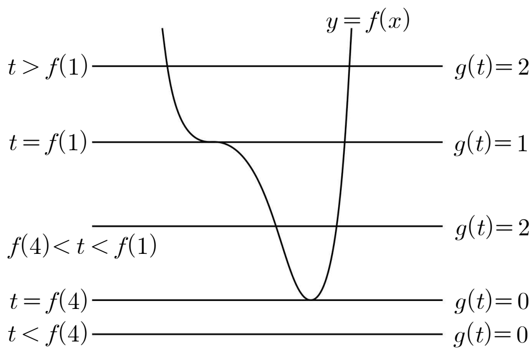
이때 방정식 $f(x)=0$의 두 실근이 모두 4보다 작으므로 (다)를 만족시키지 못한다.

(ii) $f'(x)=4(x-1)^2(x-4)$일 때

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	1	$\cdots$	4	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	$f(1)$	↘	극소	↗

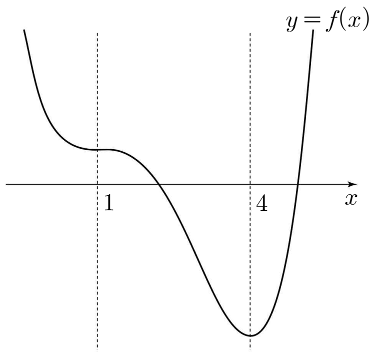
따라서 함수 $f(x)$의 그래프의 개형과 실수 t에 대한 함수 $g(t)$의 값은 그림과 같다.



함수 $g(t)$는 $t=f(4)$, $t=f(1)$에서 불연속이므로

(나)에 의하여 $f(1)=2,\ f(4)=-25$이다.

따라서 함수 $f(x)$의 그래프는 그림과 같다.



이때 방정식 $f(x)=0$은 4보다 큰 실근을 갖는다.

(i), (ii)에 의하여

$f'(x)=4(x-1)^2(x-4)$

$=4x^3-24x^2+36x-16$

$\therefore\ a=-8,\ b=18,\ c=-16$

또한 $f(1)=2$이므로 $d=7$

따라서 $f(x)=x^4-8x^3+18x^2-16x+7$이므로

$f(-1)=50$

3. 23

조건 (가)에서 $f(0)=27,\ f'(0)=0$

함수 $h(x)=f(x)-g(x)$ 라 할 때,

조건 (나), (다)에서

함수 $h(x)$ 의 그래프는 점 $(-3,\ 0)$ 을 지나고

$x=a\ (a\neq -3)$ 에서 x축과 접한다.

따라서 $h(x)=(x+3)(x-a)^2$

$f(0)=27,\ g(0)=0$ 이므로

$h(0)=f(0)-g(0)$

$3a^2=27,\ a=3\ (\because\ a\neq -3)$

$\therefore\ h(x)=f(x)-g(x)=(x+3)(x-3)^2$

$\qquad\qquad =x^3-3x^2-9x+27$

$h'(x)=f'(x)-g'(x)=3x^2-6x-9$

$f'(0)=0$ 이므로 $f'(0)-g'(0)=-9$

$\therefore\ g'(0)=9$

$y=g(x)$ 는 원점을 지나는 직선이므로 $g(x)=9x$

$f(x)-g(x)=x^3-3x^2-9x+27$ 에서

$f(x)=x^3-3x^2+27$

$f'(x)=3x^2-6x=3x(x-2)$

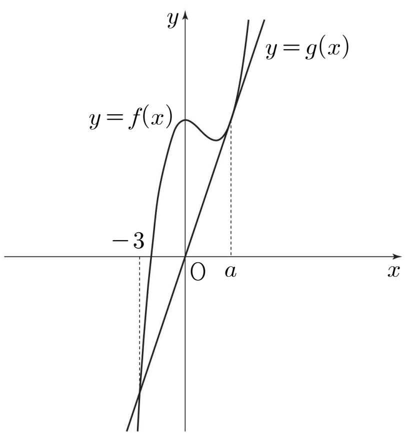
$f'(x)=0$ 에서 $x=0$ 또는 $x=2$

함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	0	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	27	$\searrow$	23	$\nearrow$

따라서 함수 $f(x)$ 는 $x=2$ 에서 극솟값 23 을 갖는다.

[참고]



4. ②

함수 $g(x)$ 가 함수 $f(x)$ 의 역함수이고,

함수 $y=f(x)$ 의 그래프와 함수 $y=g(x)$ 의 그래프가 서로 다른 두 점에서 만나므로 함수 $y=f(x)$ 의 그래프와 직선 $y=x$ 가 서로 다른 두 점에서 만난다.

함수 $y=f(x)$ 의 그래프와 직선 $y=x$ 의 접점의 x 좌표를 k 라 하면

$f(k)=k$ 이므로 $\dfrac{1}{3}k^3+a=k$

$f'(k)=1$ 이므로 $k^2=1$ 이다.

$k=1$ 일 때 $a=\dfrac{2}{3}$, $k=-1$ 일 때 $a=-\dfrac{2}{3}$

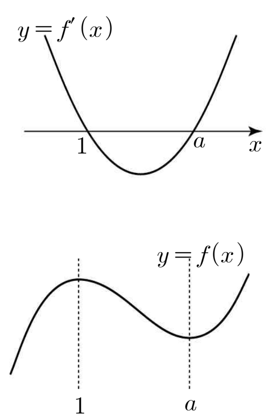
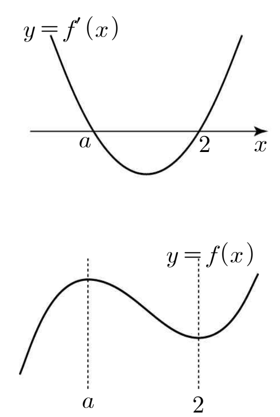
따라서 모든 상수 a 의 값의 곱은 $-\dfrac{4}{9}$

5. 20

$1<x<2$ 인 모든 실수 x 에 대하여

$f'(x)<0$ 이고 $f'(x-1)f'(x+1)<0$ 이므로

두 함수 $y=f'(x)$ 와 $y=f(x)$ 의 그래프의 개형은 다음의 두 가지 경우이다.

(i) $f'(1)=0$	(ii) $f'(2)=0$
 $a\geq 3$	 $a\leq 0$

함수 $g(x)=\begin{cases} f(-x) & (x<0) \\ f(x) & (x\geq 0) \end{cases}$ 라 하자.

함수 $g(x)$ 는 모든 실수 x 에서 미분가능하므로

$g'(0)$ 가 존재해야 한다.

$\displaystyle\lim_{h\to 0-}\frac{g(0+h)-g(0)}{h}$

$\displaystyle=\lim_{h\to 0-}\frac{f(-h)-f(0)}{h}=-f'(0)$

$\displaystyle\lim_{h\to 0+}\frac{g(0+h)-g(0)}{h}$

$\displaystyle=\lim_{h\to 0+}\frac{f(h)-f(0)}{h}=f'(0)$

$-f'(0)=f'(0)$ 이므로 $f'(0)=0$

위의 그래프의 개형 중 (ii)에 해당되므로

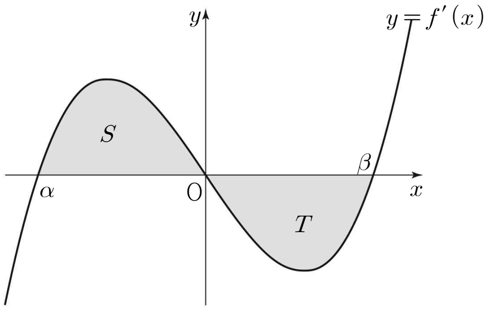
$f'(x)=3x(x-2)$

$f(x)=x^3-3x^2+C$ (단, C 는 적분상수이다.)

$f(0)-f(-2)=20$

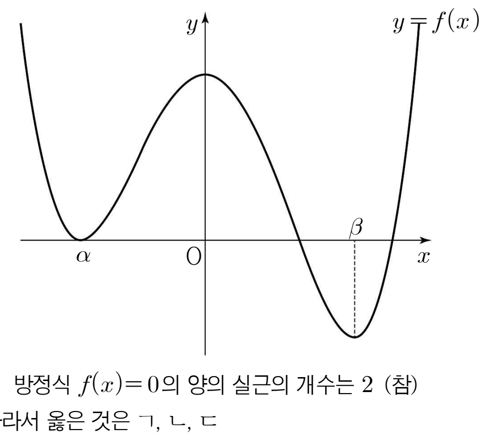
6. ⑤

ㄱ. $f'(x)$의 최고차항의 계수가 양수이므로
함수 $y=f'(x)$의 그래프는 그림과 같다.
$f'(0)=0$이고 $x=0$의 좌우에서 $f'(x)$의 부호가
양에서 음으로 바뀌므로 함수 $f(x)$는 $x=0$에서
극댓값을 갖는다. (참)



ㄴ. $\alpha=-\beta$에 의하여
$f'(x)=k(x-\beta)x(x+\beta)=kx^3-k\beta^2x\ (k>0)$
$f(x)=\dfrac{k}{4}x^4-\dfrac{k\beta^2}{2}x^2+C$ (단, C는 적분상수)
따라서 $f(x)$는 y축에 대하여 대칭인 함수이므로
$f(-\beta)=f(\beta)$
$S=\displaystyle\int_{\alpha}^{0}|f'(x)|dx=\int_{-\beta}^{0}f'(x)dx=f(0)-f(-\beta)$
$T=\displaystyle\int_{0}^{\beta}|f'(x)|dx=\int_{0}^{\beta}\{-f'(x)\}dx$
$=-f(\beta)+f(0)$
따라서 $S=T$ (참)

ㄷ. $S<T$, $f(\alpha)=0$이므로
$f(0)-f(\alpha)<-f(\beta)+f(0)$에서 $f(\beta)<0$
함수 $f(x)$는 $x=\alpha$, $x=\beta$에서 극솟값,
$x=0$에서 극댓값을 갖는다.
$y=f(x)$의 그래프의 개형은 그림과 같다.



방정식 $f(x)=0$의 양의 실근의 개수는 2 (참)
따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ

7. 71

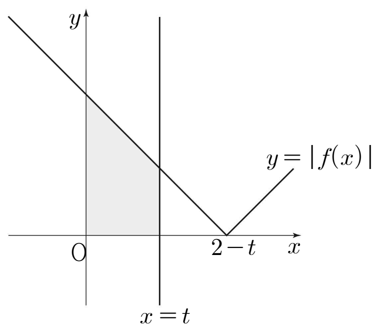
$\displaystyle\int_{1}^{10}f(x)\,dx=\int_{0}^{10}f(x)\,dx-\int_{0}^{1}f(x)\,dx$
$\displaystyle=\int_{0}^{2}f(x)\,dx+\int_{2}^{4}f(x)\,dx+\int_{4}^{6}f(x)\,dx$
$\displaystyle+\int_{6}^{8}f(x)\,dx+\int_{8}^{10}f(x)\,dx-\int_{0}^{1}f(x)\,dx$
$\displaystyle=5\times4-\int_{0}^{1}(x^3-6x^2+8x)\,dx$
$=20-\dfrac{9}{4}=\dfrac{71}{4}$
따라서 $\displaystyle 4\int_{1}^{10}f(x)\,dx=71$

8. 36

최고차항의 계수가 1인 두 사차함수 $y=f(x)$,
$y=g(x)$ 의 그래프가 만나는
세 점의 x 좌표가 $-1,\ 0,\ 2$이므로
$f(x)-g(x)=a(x+1)x(x-2)\ (a\neq0)$
조건 (나)에 의하여
$\displaystyle\int_{0}^{2}\{f(x)-g(x)\}dx=4-12=-8$이므로
$\displaystyle\int_{0}^{2}\{f(x)-g(x)\}dx=\int_{0}^{2}\{a(x+1)x(x-2)\}dx$
$\displaystyle=a\int_{0}^{2}(x^3-x^2-2x)dx=a\left[\frac{1}{4}x^4-\frac{1}{3}x^3-x^2\right]_0^2$
$=a\left(4-\dfrac{8}{3}-4\right)=-\dfrac{8}{3}a=-8$
$a=3$이므로 $f(x)-g(x)=3(x+1)x(x-2)$
$f(3)-g(3)=36$

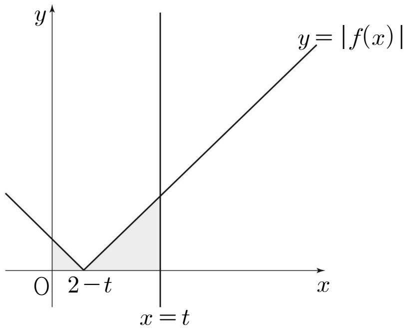
9. ⑤

함수 $|f(x)|$의 그래프와 x축이 만나는 점의
x좌표는 $2-t$
(i) $0<t<1$일 때
함수 $y=|f(x)|$의 그래프와 직선 $x=t$는 그림과 같다.



$\displaystyle g(t)=\int_{0}^{t}(-x+2-t)dx$
$\displaystyle=\left[-\frac{1}{2}x^2+2x-tx\right]_0^t=-\frac{3}{2}t^2+2t$

(ii) $1\leq t<2$일 때
함수 $y=|f(x)|$의 그래프와 직선 $x=t$는 그림과 같다.



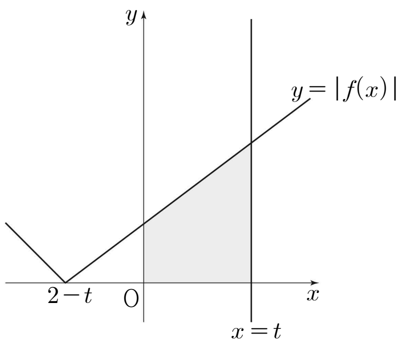
$$g(t)=\int_{0}^{2-t}(-x+2-t)dx+\int_{2-t}^{t}(x-2+t)dx$$

$$=\left[-\frac{1}{2}x^2+2x-tx\right]_0^{2-t}+\left[\frac{1}{2}x^2-2x+tx\right]_{2-t}^{t}$$

$$=\frac{5}{2}t^2-6t+4$$

(iii) $t\geq 2$일 때

함수 $y=|f(x)|$의 그래프와 직선 $x=t$는 그림과 같다.



$$g(t)=\int_0^t(x-2+t)dx=\left[\frac{1}{2}x^2-2x+tx\right]_0^t=\frac{3}{2}t^2-2t$$

(i), (ii), (iii)에 의해

$$\text{함수 } g(t)=\begin{cases}-\frac{3}{2}t^2+2t & (0<t<1)\\ \frac{5}{2}t^2-6t+4 & (1\leq t<2)\\ \frac{3}{2}t^2-2t & (t\geq 2)\end{cases}$$

ㄱ. $g(1)=\int_0^1|-x+1|dx=\frac{1}{2}$ (참)

ㄴ. (i) $t=2$에서 연속

$$\lim_{t\to 2-}\left(\frac{5}{2}t^2-6t+4\right)=\lim_{t\to 2+}\left(\frac{3}{2}t^2-2t\right)=2 \quad g(2)=2$$

(ii) $t=2$에서 미분가능

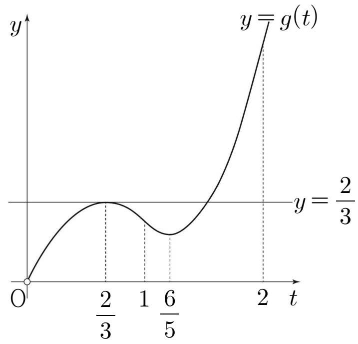
$$\lim_{t\to 2-}\frac{g(t)-g(2)}{t-2}=\lim_{t\to 2-}\left(\frac{5}{2}t-1\right)=4$$

$$\lim_{t\to 2+}\frac{g(t)-g(2)}{t-2}=\lim_{t\to 2+}\left(\frac{3}{2}t+1\right)=4$$

∴ 함수 $g(t)$는 $t=2$에서 미분가능 (참)

ㄷ. 함수 $g(t)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

t	(0)	$\cdots$	$\frac{2}{3}$	$\cdots$	1	$\cdots$	$\frac{6}{5}$	$\cdots$	2	$\cdots$
$g'(t)$		+	0	−	−	−	0	+	+	+
$g(t)$		↗	$\frac{2}{3}$	↘		↘	극소	↗		↗



함수 $g(t)$는 $t=\frac{2}{3}$에서 극댓값 $\frac{2}{3}$를 가지므로

방정식 $g(t)=\frac{2}{3}$는 서로 다른 두 실근을 갖는다. (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ

10. ⑤

함수 $g(x)=\int_2^x(t-2)f'(t)dt$ 이므로

$g'(x)=(x-2)f'(x)$

함수 $g(x)$ 가 $x=0$ 에서만 극값을 가지므로 상수 a 에 대하여

$g'(x)=(x-2)\times ax(x-2)$

$f'(x)=ax(x-2)$ 이고

함수 $f(x)$ 의 최고차항이 x^3 이므로 $a=3$

$f'(x)=3x(x-2)$

따라서 $g(0)=\int_2^0 3t(t-2)^2dt$

$$=\left[\frac{3}{4}t^4-4t^3+6t^2\right]_2^0=-4$$

11. ⑤

$f(-x)=-f(x)$, $g(x)=-f(x)$이므로

ㄱ. $\int_{-1}^{1}f(x)dx=0$ (참)

ㄴ. $\int_{-1}^{0}f(x)dx+\int_0^1 g(x)dx$

$$=-\int_0^1 f(x)dx-\int_0^1 f(x)dx$$

$$=-2\int_0^1 f(x)dx$$

$$=-2\left[\frac{1}{4}x^4-2x^2\right]_0^1=\frac{7}{2} \text{ (참)}$$

ㄷ. $h(x)=\int_0^x g(t)dt-\int_0^x f(t)dt-3$이라 하자.

$h(x) = -2\int_0^x f(t)dt - 3$은 연속함수이다.

$h(0) = -3 < 0$

$h(1) = -2\int_0^1 f(t)dt - 3 = \frac{1}{2} > 0$

사이값 정리에 의하여 $h(c) = 0$인 실수 c가

0과 1 사이에 적어도 하나 존재한다. (참)

따라서 <보기>에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ

12. ④

$x^3 - 3x^2 + x = x - 4$

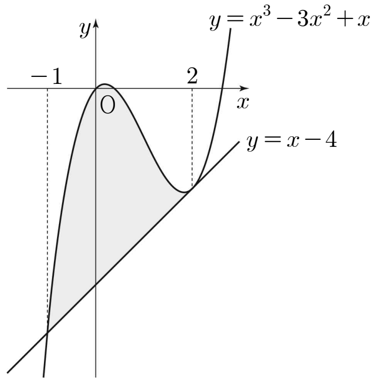
$(x+1)(x-2)^2 = 0$이므로

곡선 $y = x^3 - 3x^2 + x$와 직선 $y = x - 4$가

만나는 점의 x좌표는 -1과 2

$$\int_{-1}^{2} \left|(x^3 - 3x^2 + x) - (x-4)\right| dx$$

$$= \int_{-1}^{2} (x^3 - 3x^2 + 4)\, dx = \left[\frac{1}{4}x^4 - x^3 + 4x\right]_{-1}^{2} = \frac{27}{4}$$



13. ③

ㄱ. $f(x) = a(x+1)(x-1)(x-2)$ $(a < 0)$라 하자.

$1 < x < 2$일 때, $f(x) > 0$

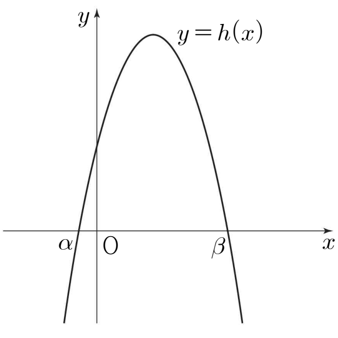
$\int_1^2 f(x)dx > 0$ $\therefore$ (참)

ㄴ. $h(x) = f'(x) = a(3x^2 - 4x - 1)$

$h(0) = -a > 0$ $\therefore$ (거짓)

ㄷ. 방정식 $h(x) = 0$의 서로 다른 두 실근을

α, $\beta(\alpha < \beta)$라 하자.



$\int_m^n h(x)dx$의 값이 최대가 되려면

닫힌 구간 $[m, n]$이 $h(x) \ge 0$를 만족시키는

구간과 일치하여야 하므로 $m = \alpha$, $n = \beta$

$\therefore m + n = \alpha + \beta = \frac{4}{3}$ $\therefore$ (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ

14. 20

$y = \frac{1}{2}x^2$과 $y = kx$가 만나는 점의 x좌표는 0 또는

$2k$이므로

$A = \int_0^{2k}\left(kx - \frac{1}{2}x^2\right)dx$, $B = \int_{2k}^{2}\left(\frac{1}{2}x^2 - kx\right)dx$

$A = B$이므로

$$\int_0^{2k}\left(kx - \frac{1}{2}x^2\right)dx = \int_{2k}^{2}\left(\frac{1}{2}x^2 - kx\right)dx$$

$$\int_0^{2k}\left(kx - \frac{1}{2}x^2\right)dx - \int_{2k}^{2}\left(\frac{1}{2}x^2 - kx\right)dx = 0$$

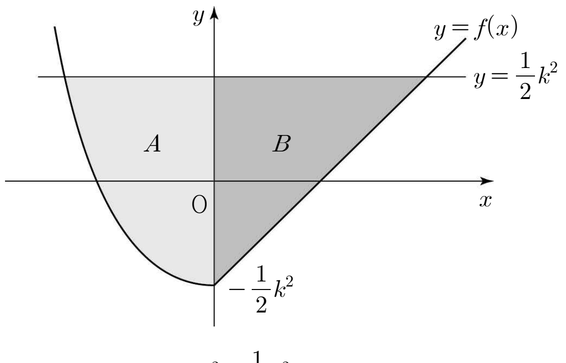
$$\int_0^{2k}\left(kx - \frac{1}{2}x^2\right)dx + \int_{2k}^{2}\left(kx - \frac{1}{2}x^2\right)dx = 0$$

$$\int_0^{2}\left(kx - \frac{1}{2}x^2\right)dx = 0$$

$$\left[\frac{k}{2}x^2 - \frac{1}{6}x^3\right]_0^2 = 2k - \frac{4}{3} = 0$$

따라서 $k = \frac{2}{3}$이고 $30k = 20$

15. ③



(i) $x < 0$ 일 때, $y = x^2 - \frac{1}{2}k^2$ 의 그래프와

직선 $y = \frac{1}{2}k^2$의 교점의 x 좌표는 $-k$

$$(A\text{의 넓이}) = \int_{-k}^{0}\left\{\frac{1}{2}k^2 - \left(x^2 - \frac{1}{2}k^2\right)\right\}dx$$

$$= \left[-\frac{1}{3}x^3 + k^2x\right]_{-k}^{0} = \frac{2}{3}k^3$$

(ii) $x \ge 0$ 일 때, 직선 $y = x - \frac{1}{2}k^2$ 과

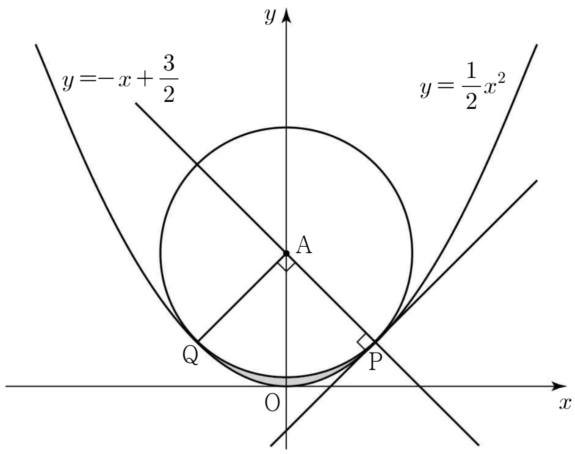
직선 $y = \frac{1}{2}k^2$의 교점의 x 좌표는 k^2

$(B\text{의 넓이}) = \frac{1}{2} \times k^2 \times k^2 = \frac{1}{2}k^4$

A와 B의 넓이가 같으므로 $\frac{2}{3}k^3 = \frac{1}{2}k^4$

따라서 $k = \frac{4}{3}$

16. 140



두

곡선의 교점의 좌표를 각각

$\mathrm{P}\left(\alpha, \frac{1}{2}\alpha^2\right)$, $\mathrm{Q}\left(-\alpha, \frac{1}{2}\alpha^2\right)$이라 하자. $(\alpha > 0)$

함수 $y = \frac{1}{2}x^2$ 의 그래프의 접점 P에서 접선의 기울기는 α 이고 이 접선은 직선 AP와 수직이다.

즉, $\dfrac{\frac{1}{2}\alpha^2 - \frac{3}{2}}{\alpha - 0} = -\frac{1}{\alpha}$

$\alpha^2 = 1$ 이므로 $\mathrm{P}\left(1, \frac{1}{2}\right)$, $\mathrm{Q}\left(-1, \frac{1}{2}\right)$

직선 AP는 $y = -x + \frac{3}{2}$

$\angle\mathrm{PAQ} = 90^\circ$, 원의 반지름은 $\sqrt{2}$

구하는 넓이를 S라 하면

$$S = 2\left\{\int_0^1 \left(-x + \frac{3}{2} - \frac{1}{2}x^2\right)dx - \frac{\pi}{4}\right\}$$
$$= 2\left\{\left[-\frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{2}x\right]_0^1 - \frac{\pi}{4}\right\}$$
$$= \frac{5}{3} - \frac{\pi}{2}$$

$a = \frac{5}{3}$, $b = -\frac{1}{2}$ 이므로

$120(a+b) = 140$

17. ③

두 점 P, Q의 시각 t에서의 위치를 각각

$x_1(t)$, $x_2(t)$라 하면

$$x_1(t) = \int_0^t v_1(t)dt = \frac{1}{6}t^3 - \frac{3}{2}t^2$$

$$x_2(t) = \int_0^t v_2(t)dt = \boxed{-\frac{1}{6}t^3 + \frac{1}{2}t^2}$$

출발 후 처음으로 두 점 P, Q가 만나는 시각은

$t = 6$이다.

$0 < t \le 6$에서 두 점 P, Q 사이의 거리를

$l(t)$라 하면

$$l(t) = \left|\frac{1}{6}t^3 - \frac{3}{2}t^2 - \left(-\frac{1}{6}t^3 + \frac{1}{2}t^2\right)\right| = \left|\frac{1}{3}t^3 - 2t^2\right|$$

$g(t) = \frac{1}{3}t^3 - 2t^2$이라 하면

$g'(t) = 0$에서 $t = 0, 4$

따라서 $l(t)$는 $t = \boxed{4}$일 때 극대이면서 최대이므로

$l(t)$의 최댓값은 $\boxed{\frac{32}{3}}$이다.

(가)에 알맞은 식은 $f(t) = -\frac{1}{6}t^3 + \frac{1}{2}t^2$

(나), (다)에 알맞은 수는 각각 $a = 4$, $b = \frac{32}{3}$

$\therefore \dfrac{a \times b}{f(2)} = 64$

18. ⑤

ㄱ. $f(t) = t(t-1)$이므로 $t = 1$에서 점 P는 운동방향을 1번 바꾼다. (참)

ㄴ. 시각 t에서 두 점 P, Q의 가속도는 각각 $f'(t) = 2t - 1$,

$g'(t) = -6t + 6$이다.

$p = f'(2) = 3$, $q = g'(2) = -6$ 이므로

$pq < 0$이다. (참)

ㄷ. $t = 0$ 부터 $t = 3$ 까지 점 Q가 움직인 거리는

$$\int_0^3 |g(t)|dt = \int_0^2 g(t)dt - \int_2^3 g(t)dt$$
$$= \int_0^2 (-3t^2 + 6t)dt - \int_2^3 (-3t^2 + 6t)dt$$
$$= 4 + 4 = 8 \text{ (참)}$$

따라서 <보기>에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ

19. ③

점 P가 시각 $t = 0$에서 시각 $t = 7$까지 움직인 거리는

$$\int_0^7 |v(t)|dt$$
$$= \int_0^3 (6t - 2t^2)dt + \int_3^7 \left(\frac{1}{2}t - \frac{3}{2}\right)dt$$
$$= \left[3t^2 - \frac{2}{3}t^3\right]_0^3 + \left[\frac{1}{4}t^2 - \frac{3}{2}t\right]_3^7$$
$$= 9 + 4 = 13$$