목동고 2학기 기말대비 Final

수학2 : 함수의 그래프 ~ 정적분의 활용

다항함수의 그래프

1. 삼차함수 $f(x)=x^3-x^2-9x+1$에 대하여 함수 $g(x)$를

$$g(x)=\begin{cases} f(x) & (x \geq k) \\ f(2k-x) & (x < k) \end{cases} \quad (\text{단, } k\text{는 실수})$$

라 하자. 함수 $g(x)$가 실수 전체의 집합에서 미분가능할 때, 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은?

< 보 기 >

ㄱ. 함수 $g(x)$는 $f(k+x)=f(k-x)$을 만족시킨다.
ㄴ. 함수 $g(x)$는 k에 대하여 $g'(k)=0$이다.
ㄷ. 함수 $g(x)$는 $x=k$에서 극대 또는 극소를 가진다.

① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

2. 다음 물음에 답하시오.

(1) 곡선 $y=2x^3-x^2$과 직선 $y=4x+k$가 서로 다른 세 점에서 만나도록 하는 모든 정수 k의 값의 합을 구하시오.

(2) 곡선 $y=2x^3-x^2$과 직선 $y=4x+k$가 서로 다른 세 점에서 만날 때, 세 교점의 x좌표가 하나의 음수와 서로 다른 두 양수가 되도록 실수 k의 값의 범위를 정하시오.

3. 두 함수 $f(x)=3x^4-4x^3+8$, $g(x)=-x^2+4x-2a+1$가 임의의 두 실수 x_1, x_2에 대하여 $f(x_1) \geq g(x_2)$를 만족하도록 하는 실수 a의 최솟값은?

① -3 ② -2 ③ -1
④ 0 ⑤ 1

4. 함수 $f(x)=-3x^4+4(a-1)x^3+6ax^2$ $(a>0)$과 실수 t에서 $x \leq t$에서 $f(x)$의 최댓값을 $g(t)$라 하자. 함수 $g(t)$가 실수 전체 집합에서 미분가능 하도록 하는 a의 범위를 구하는 풀이과정과 답을 모두 쓰시오.

부정적분과 정적분 계산

5. 곡선 $y=f(x)$ 위의 임의의 점 $(x,\ f(x))$에서의 접선의 기울기가 $3x^2-4x$이고, 이 곡선이 점 $(1,\ 0)$을 지날 때, $f(x)$의 극댓값을 M, 극솟값을 m이라 할 때, $M+m$의 값을 구하면?

① $\frac{13}{27}$ ② $\frac{16}{27}$ ③ $\frac{20}{27}$
④ $\frac{22}{27}$ ⑤ $\frac{26}{27}$

6. 최고차항의 계수가 양수인 삼차함수 $y=f(x)$가 $f(-2)=-1$이고, 함수 $f(x)$는 $x=-1$에서 극댓값 3, $x=1$에서 극솟값 -1을 갖는다고 한다. 이때, $\int_{-2}^{1}|f'(x)|dx$의 값은?

① 0 ② 4 ③ 5
④ 6 ⑤ 8

7. 실수 전체의 집합에서 미분가능한 함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 모든 실수 x에 대하여 $1 \le f'(x) \le 3$이다.
(나) 모든 정수 n에 대하여 함수 $y=f(x)$의 그래프는 점 $(4n,\ 8n)$, 점 $(4n+1,\ 8n+2)$, 점 $(4n+2,\ 8n+5)$, 점 $(4n+3,\ 8n+7)$을 모두 지난다.
(다) 모든 정수 k에 대하여 닫힌 구간 $[2k,\ 2k+1]$에서 함수 $f(x)$의 그래프는 각각 이차함수의 그래프의 일부이다.

$\int_{2}^{5}f(x)dx=a$라고 할 때, $2a$의 값은?

① 30 ② 38 ③ 40
④ 45 ⑤ 67

정적분의 성질 (대칭성, 주기성)

8. 정수 a, b, c에 대하여 함수
$f(x)=x^4+ax^3+bx^2+cx+10$가 다음 조건을 만족한다. 다음 물음에 답하시오.

> (가) 모든 실수 α에 대하여
> $$\int_{-\alpha}^{\alpha} f(x)dx=2\int_{0}^{\alpha} f(x)dx$$
> (나) $-10<f'(1)<-6$

(1) a, b, c의 값을 각각 구하시오.

9. 연속함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) $f(-x)=f(x)$
> (나) $f(x+2)=f(x)$
> (다) $\int_{-1}^{1}(x+2)^2 f(x)dx=10$
> (라) $\int_{-1}^{1}x^2 f(x)dx=4$

$\int_{-3}^{3}x^2 f(x)dx$의 값은?

① 4　② 6　③ 12
④ 24　⑤ 48

10. 다음 <보기>를 이용하여 설명하였을 때, 옳은 문항을 모두 고르면? (단, $f(x)$는 다항함수이다.)

> < 보 기 >
>
> ㄱ. 임의의 실수 x에 대하여
> $\int_{2016}^{x} f(t)dt+\int_{2016}^{6-x} f(t)dt$의 값은 항상 일정하다.
> ㄴ. 임의의 실수 a, b에 대하여
> $\int_{a}^{b} f(x)dx+\int_{-a}^{-b} f(x)dx=0$이다.
> ㄷ. 임의의 실수 a, b에 대하여
> $\int_{a}^{b} f(x)dx=\int_{-a}^{b} f(x)dx$이다.
> ㄹ. 연속함수 $g(x)$가 임의의 실수 a, b에 대하여
> $\int_{a}^{b}\{g(x)-g(a)\}dx \le \frac{1}{2}(b-a)\{g(b)-g(a)\}$
> 이다.

① 함수 $f(x)=-|x-k|$가 ㄱ을 만족하면 $\int_{0}^{6} f(x)dx$가 최솟값을 가진다. (단, $0<k<6$)
② 함수 $f(x)$가 ㄴ을 만족하면 $\int_{-3}^{3} xf(x)dx=0$
③ 함수 $f(x)=x^3-(a+2)x^2+2ax$가 ㄷ을 만족하면 x축으로 둘러싸인 두 도형의 넓이는 서로 같다. (단, a는 상수)
④ 함수 $g(x)$가 $g'(x)\ge 0$일 때, ㄹ을 만족한다.
⑤ ㄱ, ㄴ을 동시에 만족하는 사차함수 $f(x)$는 극댓값과 극솟값을 반드시 갖는다.

정적분으로 정의된 함수

11. 함수 $f(x)=2^{10}x^{10}+2^9x^9+\cdots+2x+1$에 대하여 $\lim_{x\to 1}\frac{1}{x-1}\int_1^x (x-t)f'(t)dt$의 값은?

① 0　② 1　③ 2^4
④ 2^8-1　⑤ $2^{10}-1$

12. 정적분으로 정의된 함수 $F(x)=\int_{-1}^x (1-|t|)dt$에 대하여 <보기>에서 옳은 문항을 모두 고르면?

< 보 기 >

ㄱ. 도함수 $F'(x)=(1-|x|)$
ㄴ. 함수 $F(x)$는 실수 전체의 집합에서 미분가능하다.
ㄷ. 극댓값과 극솟값이 존재한다.
ㄹ. 서로 다른 세 실근을 갖는다.

① ㄱ, ㄴ　② ㄴ, ㄷ　③ ㄷ, ㄹ
④ ㄱ, ㄴ, ㄷ　⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ, ㄹ

13. 이차함수 $f(x)=x^2-ax+3$에 대하여 함수

$$F(x)=\int_2^x f(t)dt$$

가 역함수가 존재하도록 하는 정수 a의 최댓값은?

① -1　② 0　③ 1
④ 2　⑤ 3

14. 최고차항의 계수가 양수인 삼차함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 극댓값, $x=k$에서 극솟값을 가진다. (단, k는 상수이다.)
(나) 1보다 큰 모든 실수 t에 대하여
$\int_0^t |f'(x)|dx = f(t)+f(0)$이다.

<보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

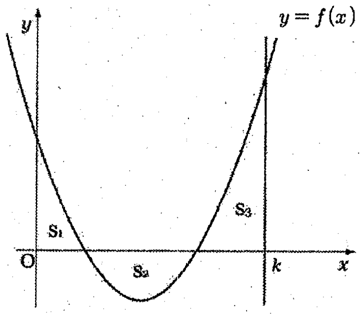
< 보 기 >

ㄱ. $\int_0^k f'(x)\,dx < 0$
ㄴ. $0<k\le 1$
ㄷ. 함수 $f(x)$의 극솟값은 0이다.

① ㄱ　② ㄷ　③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ　⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

넓이

15. 그림과 같이 곡선 $f(x)=x^2-4x+3$과 x축 및 y축으로 둘러싸인 부분의 넓이를 S_1, 곡선 $y=f(x)$와 x축으로 둘러싸인 부분의 넓이를 S_2, 곡선 $y=f(x)$와 x축 및 $x=k\,(k>3)$로 둘러싸인 부분의 넓이를 S_3이라 하자. $2S_2=S_1+S_3$일 때,



$\int_0^k f(x)dx$의 값은?

① $-\frac{4}{3}$ ② $\frac{4}{3}$ ③ $-\frac{5}{3}$
④ $\frac{5}{3}$ ⑤ -2

16. 함수 $y=g(x)$의 그래프는 함수 x^3-x^2+x의 역함수를 x축의 방향으로 a만큼, y축의 방향으로 b만큼 평행이동한 것이라고 하자.

$$g(2)=0,\ \int_0^a f(x)dx+\int_a^{2a}\{g(x)+a\}dx=1$$

이고 $a,\ b$는 실수일 때, 구하는 과정과 $a,\ b$의 값을 각각 구하시오.

17. 이차함수 $f(x)=px^2+qx+r$는 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $y=f(x)$ 그래프 위의 점 $(x,\ f(x))$에 접하는 기울기는 $-4x+8$이다. (나) $y=f(x)$의 그래프는 x축과 서로 다른 두 점에서 만난다.

(1) $p,\ q$의 값과 r의 범위를 구하시오.

(2) $y=f(x)$의 그래프가 x축과 만나는 두 점을 $\mathrm{A},\ \mathrm{B}$, y축과 만나는 점을 C라 하고, 삼각형 ABC의 면적을 T라 하자.
또, $y=f(x)$의 그래프와 x축으로 둘러싸인 도형의 면적을 S라 하자. $S=4T$가 되게 하는 r의 값을 모두 구하시오.

운동

18. 원점을 출발하여 수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 t에서의 위치 x가 $x=t^3-6t$일 때, 점 P가 운동방향을 바꿀 때의 시각을 구하시오. 또한 점 P가 다시 원점에 도착하였을 때의 속도와 가속도를 구하시오. (단, $t \geq 0$)

19. 어떤 전망대에 설치된 엘리베이터는 1층에서 출발하여 꼭대기 층까지 올라가는 동안 출발 후 처음 2초까지는 $3\mathrm{m}/$초^{2}의 가속도로 올라가고 2초 후부터 10초까지는 등속도로 올라가며 10초 후부터는 $-3\mathrm{m}/$초^{2}의 가속도로 올라가서 멈춘다. 이 엘리베이터가 출발하여 멈출 때까지 움직인 거리는 몇 m인지 구하면?

① 45　② 50　③ 55
④ 60　⑤ 65

20. 원점 O를 출발하여 수직선 위를 10초 동안 움직이는 점 P의 t초 후의 속도 $v(t)$가

$$v(t)=\begin{cases} t-2 & (0 \leq t<2) \\ -t^2+8t-12 & (2 \leq t<6) \\ -\frac{1}{2}t+3 & (6 \leq t \leq 10) \end{cases}$$

일 때, 선분 OP의 길이의 최댓값은?

① 2　② $\frac{14}{3}$　③ $\frac{18}{3}$
④ $\frac{26}{3}$　⑤ $\frac{32}{3}$

변별력

21. $x=-3$ 과 $x=a\ (a>-3)$ 에서 극값을 갖는 삼차함수 $f(x)$ 에 대하여 실수 전체의 집합에서 정의된 함수

$$g(x)=\begin{cases} f(x) & (x<-3) \\ \displaystyle\int_0^x |f'(t)|dt & (x\geq -3) \end{cases}$$

이 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $g(-3)=-16$, $g(a)=-8$
(나) 함수 $g(x)$ 는 실수 전체의 집합에서 연속이다.
(다) 함수 $g(x)$ 는 극솟값을 갖는다.

$\left|\displaystyle\int_a^4 \{f(x)+g(x)\}dx\right|$ 의 값을 구하시오.

22. 다항함수 $f(x)$ 가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x^4}=1$
(나) $f(1)=f'(1)=1$

$-1\leq n\leq 4$인 정수 n에 대하여 함수 $g(x)$ 를

$$g(x)=f(x-n)+n\ (n\leq x<n+1)$$

이라 하자. 함수 $g(x)$가 열린구간 $(-1,\ 5)$에서 미분가능할 때, $\displaystyle\int_0^4 g(x)dx=\frac{q}{p}$ 이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p, q는 서로소인 자연수이다.)

참, 거짓

23. 함수 $f(x)$가 모든 실수에서 미분가능할 때, 모든 실수 x에 대하여 다음 물음에 맞으면 ○, 틀리면 ×를 각 번호와 함께 답안지에 표시하시오.

(1) $f(x)$가 어떤 구간에서 증가하면 $f'(x)$도 그 구간에서 증가한다. (　　)

(2) $f'(x) \leq 0$이면 $f(x)$는 감소한다. (　　)

(3) $f'(a)=0$이면 $x=a$에서 극값을 가진다. (　　)

(4) $f'(x)>0$이면 $f(x)$는 증가한다. (　　)

(5) 임의의 실수 $a,\ b,\ c$에 대하여 $a<b<c$일 때,

$\int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx \neq \int_a^b f(x)dx$이다.

($f(x)$는 실수 전체에서 연속) (　　)

(6) $\int_{-1}^{1}(7x^7+3x^5-2x^2+5x-3)dx$

$=2\int_0^1(-2x^2-3)dx$ (　　)

24. 다음 설명이 맞으면 ○, 틀리면 ×를 하시오.

(1) 계수가 실수인 삼차함수 $y=f(x)$에서 $f'(x)=0$이 허근을 가지면 $f(x)=0$도 반드시 허근을 가진다.
(단, $f'(x)$는 도함수) (　　)

(2) 연속함수 $y=f(x)$가 $x=a$에서 극값이 존재하면 $f'(a)=0$이다. (단, $f'(a)$는 미분계수) (　　)

(3) 곡선 $y=2x-x^2$과 x축 및 직선 $x=3$으로 둘러싸인 도형의 넓이는 $\int_0^3(2x-x^2)dx=0$이다. (　　)

(4) $\int\left\{\frac{d}{dx}f(x)\right\}dx=f(x)$ (　　)

(5) 삼차함수 $f(x)$가 $f(1-x)=-f(1+x)$를 만족하면 $\int_0^2 f(x)dx=0$이다. (　　)

빠른 정답

1. ⑤
2. (1) -2 (2) $-3<k<0$
3. ③
4. $0<a\leq 1$
5. ④
6. ⑤
7. ④
8. (1) $a=0$, $b=-6$, $c=0$ (2) 1
9. ④
10. ②, ③
11. ①
12. ④
13. ⑤
14. ⑤
15. ②
16. $a=1$, $b=-1$
17. (1) $r>-8$ (2) $r=-2$, $r=4$
18. $v=12, a=6\sqrt{6}$
19. ④
20. ④
21. 80
22. 137
23. (1) O, (2) X, (3) X, (4) X, (5) O
24. (1) X, (2) X, (3) X, (4) O, (5) X, (6) O

정답 및 해설

1. ⑤

ㄱ. 함수 $g(x)$는 직선 $x=k$에 대해 대칭이므로
$g(k+x)=g(k-x)$을 만족시킨다. (참)

ㄴ. $g(x)$가 실수 전체의 집합에서 미분가능하므로 $x=k$에서
미분가능해야 한다.
$\therefore f'(k)=-f'(k),\ f'(k)=0$
$f'(k)=0$이므로 $g'(k)$의 값 또한 0이다. (참)

ㄷ. k의 값으로 가능한 것은 $f'(x)=3x^2-2x-9=0$을 만족하는 두 수이다.
두 수를 $\alpha,\ \beta\ (\alpha<\beta)$라 했을 때 $k=\alpha$이면 $g(x)$는 $x=k$에서 극대를 가지고, $k=\beta$이면 $g(x)$는 $x=k$에서 극소를 갖는다. (참)

2. (1) -2 (2) $-3<k<0$

(1)
곡선 $y=2x^3-x^2$에 접하면서 기울기가 4인 접선의 접점의 x좌표를 t라 하면
$6t^2-2t=4$를 만족한다.
$\therefore t=-\dfrac{2}{3}$ 또는 $t=1$
기울기가 4인 접선의 방정식은 $y=4\left(x+\dfrac{2}{3}\right)-\dfrac{28}{27}$, $y=4x+\dfrac{44}{27}$
$y=4(x-1)+1$, $y=4x-3$
따라서 기울기가 4인 직선이 곡선 $y=2x^3-x^2$과 서로 다른 세 점에서 만나기 위한 k의 범위는 $-3<k<\dfrac{44}{27}$이다.
따라서 모든 정수 k의 값의 합은 $-2-1+0+1=-2$이다.

(2)
방정식 $2x^3-x^2-4x=k$의 세 실근 중 두 개가 양수, 하나가 음수이면 된다.
$2x^3-x^2-4x=f(x)$라 하면
$f'(x)=6x^2-2x-4=(2x-2)(3x+2)$
함수 $f(x)$는 $x=-\dfrac{2}{3}$에서 극댓값을 갖고, $x=1$에서 극솟값 -3을 가지며 원점을 지나는 삼차함수이다.
방정식 $f(x)=k$가 하나의 음의 실근과 서로 다른 두 양의 실근을 갖기 위한 k값의 범위는 $-3<k<0$이다.

3. ③

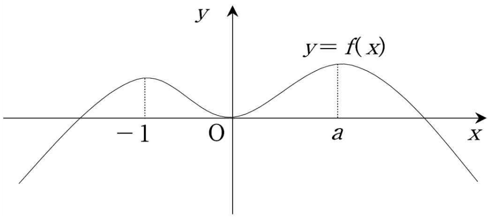
$f'(x)=12x^3-12x^2=12x^2(x-1)$
함수 $f(x)$는 구간 $(-\infty,\ 1)$에서 감소하고, $(1,\ \infty)$에서 증가하는 함수이므로 $x=1$에서 $f(x)$가 최솟값을 갖는다.
$\therefore f(x)\ \geq\ f(1)=7$
$g(x)=-(x-2)^2+5-2a$
함수 $g(x)$는 $x=2$에서 최댓값 $5-2a$를 갖는다.
임의의 실수 $x_1,\ x_2$에 대하여 $f(x_1)\ \geq\ g(x_2)$를 만족하려면
함수 $f(x)$의 최솟값이 함수 $g(x)$의 최댓값보다 크거나 같아야 한다.
$\therefore 5-2a\ \leq 7,\ a\ \geq -1$

4. $0<a\leq 1$

$$f'(x)=-12x^3+12(a-1)x^2+12ax$$
$$=-12x\{x^2-(a-1)x-a\}$$
$$=-12x(x+1)(x-a)$$
$f'(x)=0$에서 $x=-1,\ 0,\ a$

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	0	$\cdots$	a	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	↗	극대	↘	극소	↗	극대	↘

함수 $y=f(x)$의 그래프는 다음과 같다.



i) $f(-1)\ \geq\ f(a)$인 경우

$$g(t)=\begin{cases}-3t^4+4(a-1)t^3+6at^2 & (t<-1)\\ 2a+1 & (t\geq -1)\end{cases}$$

$$g'(t)=\begin{cases}-12t^3+12(a-1)t^2+12at & (t<-1)\\ 0 & (t>-1)\end{cases}$$

$f(t),\ f(-1)$은 다항함수이므로 함수 $g(t)$는 $t\neq -1$인 실수 전체의 집합에서 미분가능하다. $t=-1$일 때 미분가능성을 조사해보면

$\displaystyle\lim_{x\to -1-}g'(t)=\lim_{x\to -1-}\{-12t^3+12(a-1)t^2+12at\}=0$

$\displaystyle\lim_{x\to -1+}g'(t)=\lim_{x\to -1-}0=0$이므로 함수 $g(t)$는 실수 전체 집합에서 미분가능하다.

ii) $f(-1)<f(a)$인 경우

$f(x)=f(-1)$의 세 근을 $-1,\ \alpha,\ \beta\ (-1<\alpha<\beta)$이라 하면

$$g(t)=\begin{cases}-3t^4+4(a-1t^3+6at^2 & (t<-1)\\ 2a+1 & (-1\leq t<\alpha)\\ -3t^4+4(a-1)t^3+6at^2 & (\alpha\leq t<a)\\ a^4+2a^3 & (a\leq t)\end{cases}$$

이때, $\displaystyle\lim_{x\to\alpha-}g'(t)=\lim_{x\to\alpha-}(2a+1)'=0$

$\displaystyle\lim_{x\to\alpha-}g'(t)=\lim_{x\to\alpha+}f'(t)=-12\alpha(\alpha-a)(\alpha+1)>0$

$(\because\ 0<\alpha<a)$이므로
함수 $g(t)$는 $x=\alpha$에서 미분가능하지 않다.
즉, 함수 $g(t)$가 실수 전체에서 미분가능하려면
$f(-1)\ \geq\ f(a)$이어야 하고
$f(-1)=2a+1,\ f(a)=a^4+2a^3$이고
$f(a)-f(-1)=a^4+2a^3-2a-1$
$\qquad=(a+1)^3(a-1)\ \leq\ 0$이어야 하므로
$\therefore\ 0<a\leq 1\ (\because\ a>0)$

5. ④

$f'(x)=3x^2-4x$
$f(x)=\displaystyle\int(3x^2-4x)\,dx=x^3-2x^2+C$

$f(1)=0$이므로 $C=1$

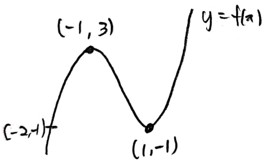
함수 $f(x)$는 $x=0$에서 극댓값 1을 갖고, $x=\frac{4}{3}$에서 극솟값

$\left(\frac{4}{3}\right)^3-2\cdot\left(\frac{4}{3}\right)^2+1=-\frac{5}{27}$을 갖는다.

$\therefore M+m=\frac{22}{27}$

6. ⑤

$f(x)$의 그래프의 일부분을 그려보면 다음과 같다.



$\int_a^b f'(x)dx=f(b)-f(a)$이므로

$\int_{-2}^{-1} f'(x)dx=4$

$\int_{-1}^{1} f'(x)dx=-4$

$\therefore \int_{-2}^{1}|f'(x)|dx=\int_{-2}^{-1}f'(x)dx-\int_{-1}^{1}f'(x)dx=8$

7. ④

8. (1) $a=0,\ b=-6,\ c=0$ (2) 1

(1)

(가) 조건에서 함수 $f(x)$가 우함수임을 알 수 있으므로

$a=c=0$

$f'(x)=4x^3+2bx$이므로 $f'(1)=2b+4$

$-10<2b+4<-6$이므로 $-7<b<-5$

b는 정수이므로 $b=-6$이다.

$\therefore a=0,\ b=-6,\ c=0$

(2)

$f(x)=x^4-6x^2+10$

$f'(x)=4x^3-12x=4x(x-\sqrt{3})(x+\sqrt{3})$

함수 $f(x)$는 $x=\pm\sqrt{3}$에서 극솟값 1을 갖는다.

9. ④

함수 $f(x)$가 우함수이므로 $\int_{-1}^{1}(x+2)^2f(x)dx=10$일 때

$\int_{-1}^{1}x^2f(x)dx+4\int_{-1}^{1}f(x)dx=10$

(라) 조건에 의해 $\int_{-1}^{1}f(x)dx=\frac{3}{2}$

$\int_{-3}^{3}x^2f(x)dx$

$=\int_{-3}^{-1}x^2f(x)dx+\int_{-1}^{1}x^2f(x)dx+\int_{1}^{3}x^2f(x)dx$

$=\int_{-1}^{1}(t+2)^2f(t)dt+4+\int_{-1}^{1}(u-2)^2f(u)du$

$=10+4+10=24$

10. ②, ③

ㄱ. $\int_{2016}^{x}f(t)dt+\int_{2016}^{6-x}f(t)dt=k$ (k는 상수)

양변의 x에 관하여 미분하면

$f(x)-f(6-x)=0,\ f(x)=f(6-x)$이 된다.

이 식에 x대신에 $3-x$를 대입하면 (조건에서 임의의 실수에 대하여 성립한다고 하였으므로)

$f(3-x)=f(3+x)$

즉, $x=3$에 관하여 대칭인 함수이다.

함수 $f(x)=-|x-k|$가 ㄱ을 만족하면 $g(k)=\int_0^6 f(x)dx$가

최댓값을 가진다. (단, $0<k<6$)

② ㄴ. $\int_a^b f(x)dt+\int_{-a}^{-b}f(x)dt=0$

$\int_a^b f(x)dt-\int_{-b}^{-a}f(x)dt=0,\ \int_a^b f(x)dt=\int_{-b}^{-a}f(x)dt$

$\therefore f(x)$는 우함수

ㄴ을 만족하는 함수 $f(x)$에 대하여 $\int_{-3}^{3}xf(x)=0$

③ ㄷ. $\int_a^b f(x)dx=\int_{-a}^{b}f(x)dx$

$\int_a^b f(x)dx=\int_{-a}^{a}f(x)dx+\int_a^b f(x)dx$

$\int_{-a}^{a}f(x)dx=0\ \therefore f(x)$는 기함수

$f(x)=x^3-(a+2)x^2+2ax$

$f(x)=x(x-a)(x-2)$

$\therefore a=-2$

④ 함수 $g(x)$가 $g'(x)\geq 0$일 때, ㄹ을 만족한다.

ㄹ. 반례 $g(x)=x^3(x\leq 0)$

11. ①

$\lim_{x\to1}\frac{1}{x-1}\int_1^x(x-t)f'(t)dt$

$=\lim_{x\to1}\frac{1}{x-1}\int_1^x(x-1-t+1)f'(t)dt$

$=\lim_{x\to1}\frac{1}{x-1}\left\{(x-1)\int_1^x f'(t)dt-\int_1^x(t-1)f'(t)dt\right\}$

$=\lim_{x\to1}\int_1^x f'(t)dt-\lim_{x\to1}\frac{1}{x-1}\int_1^x(t-1)f'(t)dt$

$\cdots\cdots$ ㉠

여기서 $\int(t-1)f'(t)dt=F(t)$라 하면

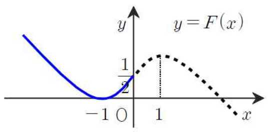
㉠$=\left[f(x)\right]_1^1-\lim_{x\to1}\frac{F(x)-F(1)}{x-1}$

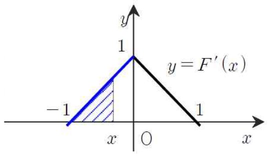
$=f(1)-f(1)-F'(1)=0-(1-1)f'(0)=0$

12. ④

$$F(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}(x+1)^2 & (x<0)\\ -\frac{1}{2}(x-1)^2+1 & (x\ge 0)\end{cases}$$

$$F'(x)=\frac{d}{dx}\int_{-1}^{x}(1-|t|)dt$$
$$=1-|x|$$





함수 $y=F(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같고 실수 전체의 집합에서 미분가능하다.

$x=-1$, $x=1$에서 각각 극솟값, 극댓값을 가진다.

서로 다른 두 실근을 갖는다.

13. ⑤

$F'(x)=f(x)=x^2-ax+3$

함수 $F(x)$의 역함수가 존재하려면 $f(x)$가 x의 값에 관계없이 양의 값을 가져야 한다.

$\therefore D=a^2-12\le 0$

$-2\sqrt{3}\le a\le 2\sqrt{3}$

따라서 정수 a의 최댓값은 3이다.

14. ⑤

ㄱ. 조건 (가)에서

$f'(x)=ax(x-k)\quad (a>0)$

라 하면 구간 $[0,k]$에서 $f'(x)\le 0$이므로

$\int_0^k f'(x)\,dx<0$ (참)

ㄴ. 조건 (나)에서

$\int_0^t |f'(x)|\,dx=f(t)+f(0)$

의 양변을 t에 대하여 미분하면

$|f'(t)|=f'(t)$ …… ㉠

이때, ㉠은 $t>1$인 모든 실수 t에 대하여 성립하므로

$f'(t)\ge 0\quad (t>1)$

따라서 조건 (가)에서

함수 $f(x)$는 $x=0$에서 극댓값,

$x=k$에서 극솟값을 가지므로

$0<k\le 1$ 이다. (참)

ㄷ. $\int_0^t |f'(x)|\,dx$

$=-\int_0^k f'(x)\,dx+\int_k^t f'(x)\,dx$

$=f(t)+f(0)-2f(k)$

$=f(t)+f(0)$

이므로 $f(k)=0$여야 한다.

이 때 $f(k)$는 극솟값이므로 극솟값=0

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ 이다.

15. ②

$\int_0^k f(x)dx=S_1-S_2+S_3=S_2$

$S_2=-\int_1^3(x^2-4x+3)dx$

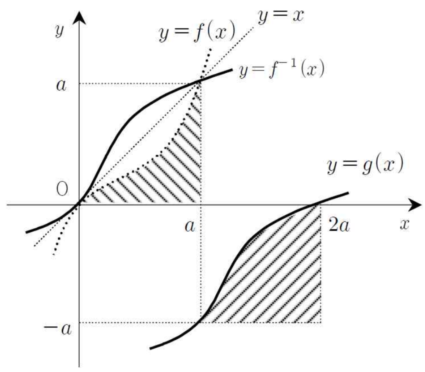
$=-\left[\frac{1}{3}x^3-2x^2+3x\right]_1^3=\frac{4}{3}$

16. $a=1$, $b=-1$

(1)

정적분을 도형의 넓이와 관련지어 생각하면 좋을 것 같다.

함수 $g(x)$의 그래프는 함수 $f(x)$의 역함수의 그래프를 x축의 방향으로 a만큼, y축의 방향으로 b만큼 평행이동한 것이니까, $a>0$인 경우 그림에서 빗금친 두 부분의 넓이의 합이 1이므로



(2) $a=1$

(3) $b=-1$

17. (1) $r>-8$ (2) $r=-2$, $r=4$

(1)

(가) 조건에서 $f'(x)=8-4x$이다.

$\therefore f(x)=-2x^2+8x+r$

$p=-2,\ q=8$

$-2x^2+8x+r=0$이 서로 다른 두 실근을 가져야 하므로

$\frac{D}{4}=16+2r>0,\ r>-8$

(2)

두 점 A, B의 좌표를 α, β라 하자. ($\alpha<\beta$라 가정)

$T=\frac{1}{2}(\beta-\alpha)|r|$

$S=\int_\alpha^\beta f(x)\,dx=\frac{2}{6}(\beta-\alpha)^3$

$S=4T$이므로 $2(\beta-\alpha)|r|=\frac{1}{3}(\beta-\alpha)^3$

$6|r|=(\beta-\alpha)^2$

α, β는 $-2x^2+8x+r=0$의 두 실근이므로 $\alpha+\beta=4$,

$\alpha\beta=-\frac{1}{2}r$

$(\beta-\alpha)^2=(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta=16+2r$

i) $r\ge 0$

$6r=16+2r,\ r=4$

ii) $r<0$

$-6r=16+2r,\ r=-2$

따라서 $S=4T$가 되게 하는 r의 값은 -2 또는 4이다.

18. 풀이 참조

t초 후의 속력을 v라고 하면

$v=\dfrac{dx}{dt}=3t^2-6=3(t^2-2)=3(t+\sqrt{2})(t-\sqrt{2})$에서

운동방향을 바꾸는 순간의 속도는 0이므로

$3(t+\sqrt{2})(t-\sqrt{2})=0$

$t\geq 0$이므로 $t=\sqrt{2}$

점 P가 원점에 다시 도착했을 때의

$x=t^3-6t=t(t^2-6)=t(t+\sqrt{6})(t-\sqrt{6})=0$에서

$t>0$이므로 $t=\sqrt{6}$

따라서 $t=\sqrt{6}$에서의 속도 $v=3\times4=12$

t초 후의 가속도를 a라고 하면 $a=\dfrac{dv}{dt}=6t$이므로

$t=\sqrt{6}$에서의 기속도 $a=6\sqrt{6}$이다.

19. ④

t초 후 엘리베이터의 속도를 $v(t)$라 하면

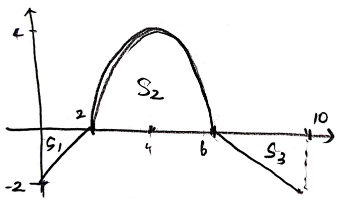
$$v(t)=\begin{cases}3t & (0\leq t<2)\\ 6 & (2\leq t<10)\\ -3t+36 & (10\leq t\leq 12)\end{cases}$$

따라서 엘리베이터가 출발하여 멈출 때까지 움직인 거리는

$$\int_0^{12}|v(t)|\,dt=\int_0^{12}v(t)\,dt=60\,(\mathrm{m})$$

20. ④

$v(t)$의 그래프를 그려보면 다음과 같다.



$\therefore\ S_1=2,\ S_3=4,\ S_2=\dfrac{(6-2)^3}{6}=\dfrac{32}{3}$

$\therefore\ \overline{\mathrm{OP}}$의 길이의 최댓값 $=-S_1+S_2=\dfrac{26}{3}$

21. 80

모든 실수 t에 대해서 $|f'(t)|\geq 0$이고,

$g(a)=\displaystyle\int_0^a|f'(t)|\,dt=-8<0$이므로 $a<0$

$x\geq -3$에서 $|f'(x)|\geq 0$이므로

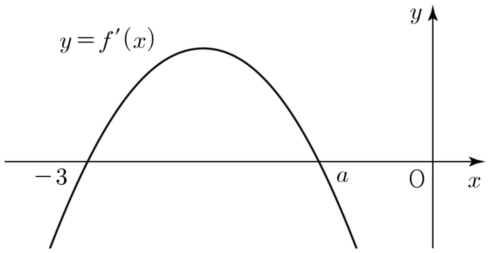
함수 $g(x)=\displaystyle\int_0^x|f'(t)|\,dt$는 증가한다.

삼차함수 $f(x)$는

$x=-3$과 $x=a\ (a>-3)$에서 극값을 가지므로 $f(x)$의 최고차항의 계수가 양수이면 $x<-3$에서 $f(x)$는 증가한다.

이때, 함수 $g(x)$는 실수 전체의 집합에서 증가하므로 극솟값을 갖지 않는다.

따라서 삼차함수 $f(x)$의 최고차항의 계수는 음수이다.



(i) $x<-3$일 때, $g(x)=f(x)$

(ii) $-3\leq x<a$일 때,

$g(x)=\displaystyle\int_0^a\{-f'(t)\}dt+\int_a^x f'(t)dt$

$=f(x)+f(0)-2f(a)$

(iii) $x\geq a$일 때,

$g(x)=\displaystyle\int_0^x\{-f'(t)\}dt=-f(x)+f(0)$

함수 $g(x)$는 $x=-3$에서 연속이므로

$\displaystyle\lim_{x\to-3-}g(x)=\lim_{x\to-3-}f(x)=f(-3)$

$\displaystyle\lim_{x\to-3+}g(x)=\lim_{x\to-3+}\{f(x)+f(0)-2f(a)\}$

$=f(-3)+f(0)-2f(a)$

$f(-3)=f(-3)+f(0)-2f(a)$

$f(0)=2f(a)\quad\cdots\cdots$ ㉠

$g(a)=-f(a)+f(0)=-8\quad\cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡을 연립하면 $f(0)=-16,\ f(a)=-8$

$f'(x)=k(x+3)(x-a)$

$=k\{x^2+(3-a)x-3a\}\ (k<0)$이라 하면

$f(x)=k\left(\dfrac{1}{3}x^3+\dfrac{3-a}{2}x^2-3ax\right)-16$

$g(-3)=f(-3)=\dfrac{9}{2}k(a+1)-16=-16$

$k\neq0$이므로 $a=-1$

$$g(x)=\begin{cases}f(x) & (x<-1)\\ -f(x)-16 & (x\geq -1)\end{cases}$$

$\displaystyle\int_a^4\{f(x)+g(x)\}dx$

$=\displaystyle\int_{-1}^4\{f(x)+(-f(x)-16)\}dx$

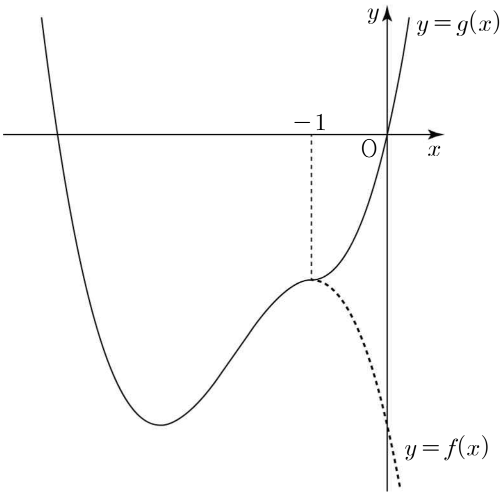
$=\displaystyle\int_{-1}^4(-16)\,dx=-16\times5=-80$

따라서 $\left|\displaystyle\int_a^4\{f(x)+g(x)\}dx\right|=80$

(참고)

$f(x)=-2x^3-12x^2-18x-16$

함수 $g(x)$의 그래프의 개형



22. 137

함수 $g(x)$ 는

$$g(x)=\begin{cases} f(x+1)-1 & (-1\le x<0) \\ f(x) & (0\le x<1) \\ f(x-1)+1 & (1\le x<2) \\ \vdots & \\ f(x-4)+4 & (4\le x<5) \end{cases}$$

이다. 함수 $g(x)$ 가 $x=1$ 에서 연속이므로

$g(1)=\lim_{x\to1-}g(x)$ 이다.

$g(1)=f(0)+1$ 이고

$\lim_{x\to1-}g(x)=\lim_{x\to1-}f(x)=f(1)=1$이므로

$f(0)+1=1$에서 $f(0)=0$ ...... ㉠

함수 $g(x)$ 가 $x=1$ 에서 미분가능하므로

$\lim_{x\to1+}\frac{g(x)-g(1)}{x-1}=\lim_{x\to1-}\frac{g(x)-g(1)}{x-1}$ 이다.

$\lim_{x\to1+}\frac{g(x)-g(1)}{x-1}=\lim_{x\to1+}\frac{f(x-1)+1-g(1)}{x-1}$

$=\lim_{x\to1+}\frac{f(x-1)}{x-1}=\lim_{x\to0+}\frac{f(x)}{x}=f'(0)$ 이고

$\lim_{x\to1-}\frac{g(x)-g(1)}{x-1}=\lim_{x\to1-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=f'(1)=1$

이므로 $f'(0)=1$ ...... ㉡

$f(x)$ 는 최고차항의 계수가 1 인 사차함수이므로

$f(x)=x^4+ax^3+bx^2+cx+d$ 라 하자.

㉠, ㉡에 의하여 $c=1$, $d=0$

조건 (나)에 의하여

$f(1)=1+a+b+1=1$ ...... ㉢

$f'(1)=4+3a+2b+1=1$ ...... ㉣

㉢, ㉣에 의하여 $a=-2$, $b=1$

$f(x)=x^4-2x^3+x^2+x$

$\int_0^4 g(x)dx=\int_0^1 g(x)dx+\int_1^2 g(x)dx$

$+\int_2^3 g(x)dx+\int_3^4 g(x)dx$

$=\frac{8}{15}+\left(\frac{8}{15}+1\right)+\left(\frac{8}{15}+2\right)+\left(\frac{8}{15}+3\right)=\frac{122}{15}$

그러므로 $p=15$, $q=122$

따라서 $p+q=137$

<서술형>

23. 풀이 참조

(1) $f'(x)\ge 0$이라고 해서 $f'(x)$가 그 구간에서 항상 증가하지는 않는다. (거짓)

(2) 반례) $f(x)=c$ (상수함수)

(3) 반례) $f(x)=x^3$에서 $f'(0)=0$이지만 $f(x)$는 극값을 갖지 않는다.

(4) $f'(x)>0$일 때 $f(x)$는 증가함수이다. (참)

(5) $\int_a^c f(x)\,dx+\int_c^b f(x)\,dx=\int_a^b f(x)\,dx$ (거짓)

(6) $\int_{-1}^1\left(7x^7+3x^5-2x^2+5x-3\right)dx$

$=\int_{-1}^1\left(-2x^2-3\right)dx$

$=2\int_0^1\left(-2x^2-3\right)dx$ (참)

<서술형>

1. (1) O, (2) X, (3) X, (4) X, (5) O

(1) $f'(x)=0$이 허근을 가지면 $f(x)$는 모든 실수 x에서 증가하거나 감소하는 삼차함수이므로 $f(x)=0$도 반드시 허근을 가진다. (참)

(2) $f(x)$가 $x=a$에서 첨점을 가질 수 있다. (거짓)

(3) $y=2x-x^2$과 x축 및 $x=3$으로 둘러싸인 도형의 넓이는 $\int_0^3|2x-x^2|dx=\frac{8}{3}$ 이다. (거짓)

(4) $\int\left\{\frac{d}{dx}f(x)\right\}dx=f(x)+C$ (거짓)

(5) $f(x)$가 점 $(1,\ 0)$에 대해 대칭이므로 $\int_0^2 f(x)dx=0$ (참)

목동고 2학기 기말대비 Final

확률과 통계 : 정규분포 ~ 통계적 추정

정규분포

1. 어느 도시의 고등학교 2학년 학생 중 1200명이 참가한 수학경시대회의 성적은 평균이 65점이고 표준편차가 12점인 정규분포를 따른다고 한다. 이 수학경시대회에서는 성적이 높은 순으로 1등부터 24등까지는 우수상을, 25등부터 60등까지는 장려상을 수여하기로 하였다. 우수상을 수상하기 위한 최소점수를 a, 장려상을 수상하기 위한 최소점수를 b라 할 때, $a-b$의 값을 아래의 표준정규분포표를 이용하여 구한 것은?

z	$\mathrm{P}(0 \le Z \le z)$
1.65	0.45
1.75	0.46
1.88	0.47
2.05	0.48

① 4.6 ② 4.8 ③ 5
④ 5.2 ⑤ 5.4

2. 확률변수 X가 평균이 m, 표준편차가 σ인 정규분포를 따를 때, 실수 전체의 집합에서 정의된 함수 $f(t)$는

$$f(t)=\mathrm{P}(t \le X \le t+2)$$

이다. 함수 $f(t)$는 $t=4$에서 최댓값을 갖고, $f(m)=0.3413$이다. 아래의 표준정규분포표를 이용하여 $f(7)$의 값을 구한 것은?

z	$\mathrm{P}(0 \le Z \le z)$
1.0	0.3413
1.5	0.4332
2.0	0.4772
2.5	0.4938

① 0.1359 ② 0.0919 ③ 0.0606
④ 0.0440 ⑤ 0.0166

3. 확률변수 X는 평균이 m, 표준편차가 5인 정규분포를 따르고, 확률변수 X의 확률밀도함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $f(10) > f(20)$
(나) $f(4) < f(22)$

m이 자연수일 때, $\mathrm{P}(17 \le X \le 18)$의 값을 오른쪽 표준정규분포표를 이용하여 구한 것은?

z	$\mathrm{P}(0 \le Z \le z)$
0.6	0.226
0.8	0.288
1.0	0.341
1.2	0.385
1.4	0.419

① 0.044 ② 0.053 ③ 0.062
④ 0.078 ⑤ 0.097

이항분포의 정규분포로의 근사

4. 수직선 위의 원점에 있는 점 P를 한 개의 주사위를 던져서 나온 수의 양의 약수의 개수가 홀수이면 양의 방향으로 1만큼 이동시키고, 나온 수의 양의 약수의 개수가 짝수이면 음의 방향으로 1만큼 이동시킨다. 이 규칙에 따라 한 개의 주사위를 던지는 시행을 72번 반복할 때, 점 P의 좌표가 -16 이상, -12 이하일 확률을 주어진 정규분포표를 이용하여 구한 것은?

z	$\mathrm{P}(0 \leq Z \leq z)$
0.5	0.1915
1.0	0.3413
1.5	0.4332
2.0	0.4772

① 0.0440 ② 0.0919 ③ 0.1498
④ 0.1915 ⑤ 0.3413

5. H 대학교 D 학과에서는 수시 논술시험을 통해 신입생 64명을 선발한다. 올해 이 학과의 수시 논술시험에 500명이 응시하였고, 논술시험의 점수는 평균이 60점, 표준편차가 10점인 정규분포를 따른다고 한다. 논술시험의 성적순으로 합격자를 발표하고 합격자 중 등록을 포기한 사람이 생기면 그 수만큼 1차 추가 합격자를 논술시험의 성적순으로 발표하는데, 이 학과의 최초 합격자가 등록을 포기할 확률이 0.5라 한다. 이 학과의 수시 논술시험에 응시한 A 학생이 68.3점을 받았을 때, A가 1차 추가합격자가 될 확률을 표준정규분포표를 이용하여 구한 값이 p이다. $10^4 \times p$의 각 자릿수의 합은? (단, 합격자 결정은 논술시험 성적에 의해서만 하며, 논술시험 점수의 동점자는 없고, 1차 추가합격자는 등록을 포기하지 않는다.)

z	$\mathrm{P}(0 \leq Z \leq z)$
0.83	0.2967
1.00	0.3413
1.17	0.3790
1.50	0.4332
1.66	0.4515

① 17 ② 18 ③ 19
④ 20 ⑤ 21

상대비교

6. 다음 표는 영희의 국어, 수학, 영어, 과학 과목의 점수와 전체 학생들 성적의 평균과 표준편차를 나타낸 것이다. 전체 학생들의 각 과목의 성적은 정규분포를 따른다고 한다. 전체 학생들의 성적과 비교할 때, 영희가 상대적으로 우수한 성적을 받은 과목부터 차례대로 나열한 것은?

과목	점수	평균	표준편차
국어	76	70	5
수학	85	82	2
영어	82	79	6
과학	78	70	4

① 과학, 수학, 국어, 영어　② 수학, 국어, 영어, 과학
③ 국어, 수학, 영어, 과학　④ 영어, 수학, 과학, 국어
⑤ 수학, 과학, 영어, 과학

7. 세 확률변수 $X,\ Y,\ W$ 는 각각 다음과 같다.

> X 는 이항분포 $\mathrm{B}\left(100,\ \frac{1}{5}\right)$ 을 따른다.
>
> Y 는 이항분포 $\mathrm{B}\left(225,\ \frac{1}{5}\right)$ 을 따른다.
>
> W 는 이항분포 $\mathrm{B}\left(400,\ \frac{1}{5}\right)$ 을 따른다.

<보기>에서 옳은 것을 모두 고른 것은?

< 보 기 >

ㄱ. $\mathrm{P}\left(\left|\frac{\mathrm{X}}{100}-\frac{1}{5}\right|<\frac{1}{10}\right)<\mathrm{P}\left(\left|\frac{\mathrm{W}}{400}-\frac{1}{5}\right|<\frac{1}{10}\right)$

ㄴ. $\mathrm{P}\left(\left|\frac{\mathrm{X}}{100}-\frac{1}{5}\right|<\frac{1}{10}\right)<\mathrm{P}\left(\left|\frac{\mathrm{Y}}{225}-\frac{1}{5}\right|<\frac{1}{25}\right)$

ㄷ. $\mathrm{P}\left(\left|\frac{\mathrm{Y}}{225}-\frac{1}{5}\right|<\frac{1}{25}\right)<\mathrm{P}\left(\left|\frac{\mathrm{W}}{400}-\frac{1}{5}\right|<\frac{1}{25}\right)$

① ㄱ　② ㄴ　③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ　⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

모평균의 추정

8. 어느 모집단의 확률분포를 표로 나타내면 아래와 같다. 이 모집단에서 크기가 3인 표본을 임의 추출하여 구한 표본평균 $\overline{X}$에 대하여 $\mathrm{P}(\overline{X} \geq 1)$의 값은?

X	-1	0	1	계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{2}{5}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{1}{5}$	1

① $\frac{1}{5}$　② $\frac{3}{5}$　③ $\frac{1}{25}$
④ $\frac{3}{25}$　⑤ $\frac{1}{125}$

9. 정규분포를 따르는 모집단에서 임의추출한 크기 10인 표본 $x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_{10}$이 다음 조건을 만족한다.

(가) $x_1+x_2+\cdots+x_{10}=90$
(나) $x_1^{\ 2}+x_2^{\ 2}+x_3^{\ 2}+\cdots+x_{10}^{\ 2}=820$

표본평균 $(\overline{X})$, 표본분산 (S^2)을 바르게 구한 것은?

① $\overline{X}=9,\ S^2=\frac{91}{9}$　② $\overline{X}=9,\ S^2=1$
③ $\overline{X}=9,\ S^2=\frac{10}{9}$　④ $\overline{X}=10,\ S^2=1$
⑤ $\overline{X}=10,\ S^2=\frac{10}{9}$

10. 어느 식품회사에서 새로 개발한 삼각김밥 한 개의 무게는 평균이 $200\mathrm{g}$, 표준편차가 $20\mathrm{g}$인 정규분포를 따른다고 한다. 이 식품회사에서 판매하는 삼각김밥 한 상자에는 임의추출한 100개의 삼각김밥이 들어 있고, 삼각김밥 한 상자의 무게가 $19680\mathrm{g}$ 미만인 것은 불량품으로 판정한다고 한다. 이 식품회사에서 판매하는 삼각김밥 한 상자를 임의로 선택할 때, 선택한 삼각김밥 한 상자가 불량품으로 판정될 확률을 오른쪽 표준정규분포표를 이용하여 구한 것은?
(단, 상자의 무게는 고려하지 않는다.)

z	$\mathrm{P}(0 \leq Z \leq z)$
1.2	0.3849
1.4	0.4192
1.6	0.4452
1.8	0.4641
2.0	0.4772

① 0.0228　② 0.0359　③ 0.0548
④ 0.0808　⑤ 0.1151

11. 모평균이 m, 모표준편차가 σ인 모집단의 확률변수를 X라고 한다. 이 모집단에서 크기가 n인 표본을 임의추출하여 그 표본평균 $\overline{X}$를 구할 때, 다음 <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

< 보 기 >

ㄱ. X가 정규분포를 따르지 않아도 n이 충분히 크면 $\overline{X}$는 근사적으로 정규분포를 따른다.
ㄴ. 표본평균 $\overline{X}$는 모평균과 일치한다.
ㄷ. n이 커질수록 표본평균 $\overline{X}$의 표준편차는 1에 가까워진다.

① ㄱ　② ㄴ　③ ㄱ, ㄴ
④ ㄱ, ㄷ　⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

신뢰도와 신뢰구간

12. 모평균이 m_1, 모표준편차가 5인 정규분포를 따르는 모집단 A에서 크기가 25인 표본 $x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_{25}$를 임의추출한 결과를 이용하여 구한 모집단 A의 모평균 m_1에 대한 신뢰도 95%의 신뢰구간이 $49.04 \le m_1 \le 52.96$이었다. 모평균이 m_2, 모표준편차가 5인 정규분포를 따르는 모집단 B에서 크기가 25인 표본 $y_1,\ y_2,\ \cdots,\ y_{25}$를 임의추출한 결과 $0.9\sum_{k=1}^{25} x_k = \sum_{k=1}^{25} y_k$가 성립할 때 이를 이용하여 구한 모집단 B의 모평균 m_2에 대한 신뢰도 99%의 신뢰구간은?
(단, Z가 표준정규분포를 따르는 확률변수일 때, $\mathrm{P}(|Z| \le 1.96) = 0.95$, $\mathrm{P}(|Z| \le 2.58) = 0.99$로 계산한다.)

① $43.32 \le m_2 \le 48.48$
② $43.28 \le m_2 \le 48.44$
③ $43.24 \le m_2 \le 48.4$
④ $43.2 \le m_2 \le 48.36$
⑤ $43.16 \le m_2 \le 48.32$

13. 분산이 σ^2인 정규분포를 따르는 모집단에서 크기 n인 표본을 임의추출하여 모평균 m을 추정한 후 신뢰구간의 길이를 구하고자 한다. 아래 표준정규분포표를 이용하여 구한 모평균 m에 대한 신뢰도 79.6%의 신뢰구간의 길이가 l이고, 모평균 m에 대한 신뢰도 $\alpha\%$의 신뢰구간의 길이는 $2l$이다. 이때, α의 값은?

z	$\mathrm{P}(0 \le Z \le z)$
1.27	0.3980
1.69	0.4545
1.96	0.4750
2.54	0.4945
3.29	0.4995

① 87.3 ② 90.9 ③ 95.0
④ 98.9 ⑤ 99.9

빠른 정답

1. ②
2. ①
3. ③
4. ②
5. ④
6. ①
7. ③
8. ⑤
9. ③
10. ③
11. ①
12. ①
13. ④

정답 및 해설

1. ②

수학경시대회 성적을 확률변수 X라 하면 $X \sim \mathrm{N}(65,\ 12^2)$이고

$Z = \dfrac{X-65}{12}$ 이다. 우수상에 대하여 $\mathrm{P}(X \geq a) = \dfrac{24}{1200} = 0.02$

$\mathrm{P}\left(Z \geq \dfrac{a-65}{12}\right) = 0.02,\ \mathrm{P}\left(0 \leq Z \leq \dfrac{a-65}{12}\right) = 0.48$

$\dfrac{a-65}{12} = 2.05,\ a-65 = 24.6 \qquad \therefore\ a = 89.6$

또, 장려상에 대하여 $\mathrm{P}(X \geq b) = \dfrac{60}{12000} = 0.05$

$\mathrm{P}\left(Z \geq \dfrac{b-65}{12}\right) = 0.05,\ \mathrm{P}\left(0 \leq Z \leq \dfrac{b-65}{12}\right) = 0.45$

$\dfrac{b-65}{12} = 1.65,\ b-65 = 19.8 \qquad \therefore\ b = 84.8$

$\therefore\ a-b = 89.6-84.8 = 4.8$

2. ①

함수 $f(t)$ 는 $t=4$ 에서 최댓값을 가지므로

$f(4) = \mathrm{P}(4 \leq X \leq 6)$ 에서 확률변수 X의 평균 m 은 5 이다.

$f(5) = \mathrm{P}(5 \leq X \leq 7)$

$= \mathrm{P}\left(0 \leq Z \leq \dfrac{7-5}{\sigma}\right)$

$= 0.3413$

$\dfrac{7-5}{\sigma} = 1$ 에서 $\sigma = 2$

$f(7) = \mathrm{P}(7 \leq X \leq 9)$

$= \mathrm{P}\left(\dfrac{7-5}{2} \leq Z \leq \dfrac{9-5}{2}\right)$

$= \mathrm{P}(1 \leq Z \leq 2)$

$= \mathrm{P}(0 \leq Z \leq 2) - \mathrm{P}(0 \leq Z \leq 1)$

$= 0.1359$

3. ③

조건 (가)에서 $f(10) > f(20)$ 이므로 $m < 15$이어야 한다.

조건 (나)에서 $f(4) < f(22)$ 이므로 $m > 13$이어야 한다.

$13 < m < 15$에서 $m = 14$

$\mathrm{P}(17 \leq X \leq 18)$

$= \mathrm{P}\left(\dfrac{17-14}{5} \leq Z \leq \dfrac{18-14}{5}\right)$

$= \mathrm{P}(0.6 \leq Z \leq 0.8)$

$= 0.288 - 0.226 = 0.062$

4. ②

주사위 수 중에서 양의 약수의 개수가 홀수인 수는 1, 4이며, 양의 약수가 짝수인 수는 2, 3, 5, 6이다.

72회의 시행 중에서 주사위를 던져서 나온 수의 양의 약수의 개수가 홀수인 경우가 X_1번이고, 나온 수의 양의 약수의 개수가 짝수인 경우가 X_2이라고 하면 $X_1 + X_2 = 72$ 이다.

또한 확률 변수 X_1은 이항분포 $\mathrm{B}\left(72, \dfrac{1}{3}\right)$를 따르므로

$\mathrm{P}(X_1) = \dfrac{1}{3},\ \mathrm{E}(X_1) = 24$이다.

이때, 72회 시행 후의 점 P의 위치는 $X_1 - X_2$이므로

$\mathrm{P}(-16 \leq X_1 - X_2 \leq -12)$

$= \mathrm{P}(-16 \leq 2X_1 - 72 \leq -12)$

$= \mathrm{P}(28 \leq X_1 \leq 30)$

$= \mathrm{P}\left(\dfrac{28-24}{4} \leq \dfrac{X_1 - 24}{4} \leq \dfrac{30-24}{4}\right)$

$= \mathrm{P}(1 \leq z \leq 1.5) = 0.0919$

5. ④

논술시험의 점수를 X라 하고, 최초 합격 가능점수를 k라 하면,

$\mathrm{P}(X \geq k) = \dfrac{64}{500} = 0.128$ 이다.

이 때, 확률변수 X은 정규분포 $\mathrm{N}(60,\ 10^2)$을 따를 때, A학생의 점수 68.3점은

$\mathrm{P}(X \geq 68.3) = \mathrm{P}\left(z \geq \dfrac{68.3-60}{10}\right) = \mathrm{P}(z \geq 0.83)$

$= 0.2033$

이므로 상위 20.33%이다.

$0.2033 - 0.128 = 0.0753$ 이고,

$500 \times 0.0753 = 37.65$으므로

38명 이상이 포기하면 A학생은 합격한다.

한편 최초합격자 중 등록포기하는 학생의 수를 Y라 하면, 확률변수 Y는 $\mathrm{N}\left(64,\ \dfrac{1}{2}\right)$를 만족하며, 이는 이항분포 $\mathrm{B}(32,\ 4^2)$에 근사한다.

$P(Y \geq 38) = \mathrm{P}\left(Z \geq \dfrac{38-32}{4}\right) = \mathrm{P}(z \geq 1.5) = 0.0668$

따라서 $p = 0.0668$ 이고,

$10^4 \times p = 668$이므로 각 자릿수 합은 20이다.

6. ①

영희가 받은 과목의 점수를 X, 평균을 m, 표준편차를 σ라 하면

각 과목에 대해 $\dfrac{X-m}{\sigma}$의 값을 비교하면 된다.

이 때 영희가 상대적으로 우수한 성적을 받은 과목부터 차례로 나열하면 과학, 수학, 국어, 영어 순이 된다.

7. ③

세 확률변수 $X,\ Y,\ W$는 각각 정규분포 $\mathrm{N}(20,\ 4^2)$, $\mathrm{N}(45,\ 6^2)$, $\mathrm{N}(80,\ 8^2)$을 따른다. 또, 확률변수 Z가 표준정규분포를 따른다고 하자.

ㄱ. $\mathrm{P}\left(\left|\dfrac{\mathrm{X}-20}{100}\right| < \dfrac{1}{10}\right) = \mathrm{P}\left(\left|\dfrac{\mathrm{X}-20}{4}\right| < \dfrac{25}{10}\right) = \mathrm{P}(|\mathrm{Z}| < 2.5)$

$\mathrm{P}\left(\left|\dfrac{\mathrm{W}-80}{400}\right| < \dfrac{1}{10}\right) = \mathrm{P}\left(\left|\dfrac{\mathrm{W}-80}{8}\right| < \dfrac{50}{10}\right) = \mathrm{P}(|\mathrm{Z}| < 5)$

$\therefore\ \mathrm{P}\left(\left|\dfrac{\mathrm{X}-20}{100}\right| < \dfrac{1}{10}\right) < \mathrm{P}\left(\left|\dfrac{\mathrm{W}-80}{400}\right| < \dfrac{1}{10}\right)$ (참)

ㄴ. $\mathrm{P}\left(\left|\frac{\mathrm{Y}-40}{225}\right|<\frac{1}{25}\right)=\mathrm{P}\left(\left|\frac{\mathrm{Y}-40}{6}\right|<\frac{225}{6\cdot 25}\right)=\mathrm{P}(|\mathrm{Z}|<1.5)$

$\therefore \mathrm{P}\left(\left|\frac{\mathrm{X}-20}{100}\right|<\frac{1}{10}\right)>\mathrm{P}\left(\left|\frac{\mathrm{Y}-40}{225}\right|<\frac{1}{25}\right)$

(거짓)

ㄷ. $\mathrm{P}\left(\left|\frac{\mathrm{W}-80}{400}\right|<\frac{1}{25}\right)=\mathrm{P}\left(\left|\frac{\mathrm{W}-80}{8}\right|<\frac{50}{25}\right)=\mathrm{P}(|\mathrm{Z}|<2)$

$\therefore \mathrm{P}\left(\left|\frac{\mathrm{Y}-40}{225}\right|<\frac{1}{25}\right)<\mathrm{P}\left(\left|\frac{\mathrm{W}-80}{8}\right|<\frac{50}{25}\right)$ (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

8. ⑤

$\mathrm{P}(\overline{X}\geq 1)=\mathrm{P}(\overline{X}=1)=\frac{1}{125}$

9. ③

$\overline{X}=\frac{x_1+x_2+\cdots+x_{10}}{10}=9$

$S^2=\frac{1}{10-1}\left\{(x_1-9)^2+(x_2-9)^2+\cdots+(x_{10}-9)^2\right\}$

$=\frac{1}{9}(820-18\times 90+810)=\frac{10}{9}$

10. ③

한 상자에 담긴 삼각김밥 100개의 무게의 표본평균을 $\overline{X}$라 하면

$\mathrm{E}(\overline{X})=200,\ \sigma(\overline{X})=\frac{20}{\sqrt{100}}=2$

$\overline{X}$는 정규분포 $\mathrm{N}(200,\ 2^2)$을 따른다.

따라서 이 식품회사에서 판매하는 삼각김밥 한 상자가 불량품으로 판정될 확률은

$\mathrm{P}(100\overline{X}<19680)=\mathrm{P}(\overline{X}<196.8)$

$=\mathrm{P}\left(Z<\frac{196.8-200}{2}\right)$

$=\mathrm{P}(Z<-1.6)$

$=0.5-\mathrm{P}(-1.6\leq Z\leq 0)$

$=0.5-\mathrm{P}(0\leq Z\leq 1.6)$

$=0.5-0.4452$

$=0.0548$

11. ①

ㄱ. 보통 $n\geq 30$이면 X가 어떤 분포든 $\overline{X}$는 근사적으로 정규분포를 따른다.

ㄴ. $\overline{X}$가 아니라 $\mathrm{E}(\overline{X})$가 모평균과 일치한다.
$\overline{X}$는 표본에 따라 달라질 수 있다.

ㄷ. $\sigma(\overline{X})=\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$이므로 n이 커질수록 $\sigma(\overline{X})$는 0에 가까워진다.

12. ①

$\overline{x}=\frac{x_1+x_2+\cdots+x_{25}}{25}=\frac{\sum_{k=1}^{25}x_k}{25}$

이므로 이 결과를 이용하여 구한 모집단 A의 모평균 m_1 에대한 신뢰도 95 %의 신뢰구간은

$\overline{x}-1.96\times\frac{5}{\sqrt{25}}\leq m_1\leq\overline{x}+1.96\times\frac{5}{\sqrt{25}}$

$\overline{x}-1.96\leq m_1\leq\overline{x}+1.96$

즉, $49.04\leq m_1\leq 52.96$에서

$\overline{x}-1.96=49.04,\ \overline{x}+1.96=52.96$

이므로 $\overline{x}=51$

또한,

$\frac{\sum_{k=1}^{25}y_k}{25}=0.9\times\frac{\sum_{k=1}^{25}x_k}{25}$

$=0.9\overline{x}=45.9$

이므로 이 결과를 이용하여 구한 모집단 B의 모평균 m_2 에 대한 신뢰도 99 %의 신뢰구간은

$45.9-2.58\times\frac{5}{\sqrt{25}}\leq m_2\leq 45.9+2.58\times\frac{5}{\sqrt{25}}$

$45.9-2.58\leq m_2\leq 45.9+2.58$

$43.32\leq m_2\leq 48.48$

13. ④

$\mathrm{P}(-z\leq Z\leq z)=0.796$인 z의 값은 1.27이므로

$l=2\times 1.27\times\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$

따라서 신뢰구간의 길이가 $2l$이면

$2l=2\times 2.54\times\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$

$\therefore\ \mathrm{P}(-2.54\leq Z\leq 2.54)=2\mathrm{P}(0\leq Z\leq 2.54)$

$=2\times 0.4945=0.989$