백 인 대 장

고2 강서
수학2 기말대비

3차 함수의 극댓값-극솟값, 극댓값+ 극솟값

변 4.5 [강서고 2019-2-2 중간]

1. 함수 $f(x)= x^3+ax^2+bx+c$는 $x=1$에서 극댓값, $x=3$에서 극솟값을 갖는다고 한다. 이 함수의 극댓점과 극솟점을 연결한 직선의 방정식의 y절편이 10일 때, $a^2+b^2+c^2$의 값을 구하시오. (단, $a,\ b,\ c$는 상수이다.)

[10점]

2. 최고차항의 계수가 -1인 삼차함수 $f(x)$는 $x=p,\ x=q\ (p<q)$에서 극값을 갖는다. 이 때, 두 점 $(p,\ f(p)),\ (q,\ f(q))$이 모두 직선 $y=3x$위에 있을 때, 함수 $f(x)$의 극댓값과 극솟값의 차를 구하시오. [8점]

4-3-3 [강서고 2015-2-1(자) 중간]

3. 함수 $f(x)=2x^3-(a+3)x^2+2ax-2$의 극댓값과 극솟값의 차가 1이 되게 하는 모든 실수 a의 합은? [4.2점]

① -6 ② 0 ③ 6
④ 8 ⑤ 10

4-3-3[강서고 2017-2-1(자) 중간]

4. 함수 $f(x)=x^3-9x^2+3(a-1)x+5a$의 극댓값과 극솟값의 합이 -14일 때, 실수 a의 값은? [3.7점]

① 3 ② 4 ③ 5
④ 6 ⑤ 7

4.2.3 [강서고 2018-2-1(자) 기말]

5. $0 \le x \le 3$에서 함수
$f(x) = 2x^3 - 3(a+1)x^2 + 6ax + 1$의 최댓값은 12이다.
$f(x)$의 최솟값을 m이라 할 때, $m+a$의 최솟값은? [3.1점]

① $-\dfrac{25}{9}$ ② $\dfrac{25}{9}$ ③ $-\dfrac{11}{3}$
④ -4 ⑤ -5

4.5 [강서고 2018-2-2(인) 중간]

6. 삼차함수 $f(x)=2x^3-(k+3)x^2+2kx$가 $x \geq 1$에서 증가하도록 하는 상수 k값의 범위는? [3점]

① $k \leq 3$ ② $k \geq 3$ ③ $k \geq 4$
④ $k \leq 4$ ⑤ $k \leq 7$

4.2.3 [강서고 2018-2-1(자) 중간]

7. 구간 $[1,\ \infty)$에서 함수 $f(x)=x^3-\dfrac{a}{2}x^2+12$의 최솟값이 $g(a)$라 할 때, $2g(1)+g(6)$의 값을 구하시오. (단, a는 양수) [10점]

4.5 [강서고 2019-2-2 중간]

8. 함수 $y=x^3+3(a-1)x^2-3(a-3)x+5$가 $x \leq 0$에서 극값을 갖지 않기 위한 a의 범위는? [3.5점]

① $-1 \leq a \leq 2$ ② $-1 \leq a \leq 1$ ③ $a>1$
④ $a \geq 2$ ⑤ $a \leq 2$

변 4.5 [강서고 2019-2-2 중간]

9. 사차함수 $f(x)$와 이차함수 $g(x)$에 대하여, $h(x)=f(x)-g(x)$가 다음 조건을 만족한다. [3.8점]

> (가) $h(x)$의 최고차항의 계수는 1이다.
> (나) 두 곡선 $y=f(x)$와 $y=g(x)$는 $x=-4$에서 접한다.
> (다) $g'(0)-f'(0)=32$
> (라) $h(x)$는 $x=-4$에서 극값을 갖지 않는다.

함수 $h(x)$의 극소점이 $(\alpha,\ \beta)$일 때, $-\dfrac{k\beta}{\alpha}$가 자연수가 되게 하는 자연수 k의 최솟값은?

① 4　② 8　③ 16　④ 32　⑤ 64

4.5 [강서고 2018-2-2(인) 중간]

10. 함수 $f(x)=2x^3+ax^2+bx+c$에 대하여 $0<a<3$이고, 방정식 $f'(x)=0$의 두 근을 $\alpha,\ \beta$라 할 때, $\alpha\beta=0$이다. 닫힌 구간 $[-1,\ 3]$에서 함수 $f(x)$의 최댓값과 최솟값의 차가 76일 때, $a+b=\frac{f}{g}$라 하자. $f+g$의 값은? (단, $a,\ b,\ c$는 상수이고, $f,\ g$는 서로소인 자연수이다.) [3.4점]

① 25　② 27　③ 29　④ 31　⑤ 33

변 4.5 [강서고 2019-2-2 중간]

11. 삼차함수 $f(x)=x^3-5x^2+4x$의 그래프 위의 점 $\mathrm{A}(3,\ -6)$에서의 접선 $y=g(x)$와 곡선 $y=f(x)$가 접점 이외의 점 $\mathrm{B}(p,\ q)$에서 만난다. $p<x<3$일 때, 삼차함수 $h(x)=f(x)-g(x)$가 $x=a$에서 최댓값을 가진다. $h\left(\frac{a+1}{2}+1\right)=\frac{s}{t}$($t,\ s$는 서로소인 자연수)일 때, $t+s$의 값은? [3.6점]

① 155　② 156　③ 157　④ 158　⑤ 159

12. 사차함수 $f(x)=x^4-6x^3+13x^2-11x$에 대하여 [보기]가 항상 참이 되게 하는 상수 $k,\ m,\ n,\ q$에 대하여 $k-m+n+q$의 값은? [3.9점]

〈 보 기 〉

ㄱ. $y=f(x)$의 그래프와 $y=x-4$의 그래프의 서로 다른 교점의 개수는 k개다.

ㄴ. 모든 실수 x에 대하여 $f(3-x)-f(x)=mx+n$를 만족한다.

ㄷ. $y=f(x)$ 그래프와 $y=x+p$의 그래프가 서로 다른 네 점에서 만나고 네 점의 x좌표를 각각 $\alpha,\ \beta,\ \gamma,\ \delta\ (\alpha<\beta<\gamma<\delta)$라 할 때, $f'(\alpha)+f'(\delta)=q$이다.

① 3 ② 5 ③ 7 ④ 9 ⑤ 11

절대값 함수

13. 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 함수 $f(x)$는 $x=2$에서 극솟값을 갖는다.
(나) $y=|f(x)-1|$은 미분불가능한 점은 1개만 존재하며 미분불가능한 점의 x좌표는 음수이다.
(다) $y=f(|x|)$은 모든 실수에서 미분가능하다.

$f(1)$의 값은? [3.4점]

① -1 ② 1 ③ 3
④ 5 ⑤ 7

4-3-3-변 [강서고 2016-2-1(자) 중간]

14. 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$에 대하여 함수 $g(x)=|f(x)-f(1)|$이라 하자. 함수 $g(x)$가 다음을 만족시킬 때, 구간 $[-1,\ a]$에서 함수 $g(x)$의 최댓값은? [4.5점]

(가) 함수 $g(x)$는 $x=a\ (a>1)$에서만 미분가능하지 않다. (나) 곡선 $y=g(x)$와 직선 $y=4$가 서로 다른 세 점에서 만난다.

① 14 ② 16 ③ 18
④ 20 ⑤ 22

변 4.2.3 [강서고 2018-2-1(자) 중간]

15. 함수 $f(x)=-x^3-3x^2+9x+5$에 대하여 $g(x)=f(|x|+a)$로 정의되는 함수 $g(x)$는 다음 조건을 만족할 때, $a-b$의 값은? [3.7점]

(가) 함수 $g(x)$는 $x=0$에서 미분가능하다. (나) 함수 $g(x)$는 극솟값 b를 갖는다.

① 13 ② 15 ③ 17
④ 19 ⑤ 21

16. 함수 $f(x)$는 $x=a$에서 극댓값 3을, $x=b$에서 극솟값 -1을 갖는 삼차함수이다. 자연수 n에 대하여 $g(x)=|f(x)-n|$의 모든 극댓값들의 합은 a_n, 모든 극솟값들의 합은 b_n이 된다. 예를 들어, $a_1=2+2=4$, $b_1=0$이다. $\sum_{k=1}^{11} a_k+\sum_{k=1}^{22}(a_k+b_k)$의 값을 구하면? (단, $a<b$) [3.2점]

① 508　② 528　③ 548
④ 568　⑤ 588

17. 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족한다.

(가) 함수 $y=|f(x)|$가 미분가능하지 않은 x의 값의 개수는 1이다.
(나) 함수 $y=|xf(x)|$는 실수 전체의 집합에서 미분가능하고, 함수 $y=|xf(x)|$의 그래프는 x축과 서로 다른 두 점에서 만난다.

함수 $f(x)$의 극댓값이 $\frac{1}{2}$일 때, $f(3)$의 값은? [3.2점]

① $\frac{9}{4}$　② $\frac{9}{8}$　③ $\frac{27}{4}$
④ $\frac{27}{8}$　⑤ $\frac{27}{16}$

18. 함수 $f(x)=x^3-6x^2+9x+k$에 대하여 $g(x)=|f(x)|$라 하자. 다음에 제시된 조건을 만족하는 $m,\ n$에 대하여 $m+n$의 값은? [3.3점]

> (가) $y=g(x)$가 두 개의 극솟값과 한 개의 극댓값을 갖는다. $x=\alpha$, $x=\beta$에서 극솟값을 가질 때, $|g(\alpha)-g(\beta)|<8$을 만족시키는 정수 k의 개수를 m이라고 하자. (단, $\alpha \neq \beta$)
>
> (나) $y=g(x)$가 두 개의 극댓값과 세 개의 극솟값을 갖는다. $x=a,\ x=b$에서 극댓값을 가질 때, $|g(a)-g(b)|<8$을 만족시키는 정수 k의 개수를 n이라고 하자. (단, $a \neq b$)

① 11　② 13　③ 15　④ 17　⑤ 19

19. 삼차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$에 대하여 함수 $y=|f(x)|$는 $x=-3,\ x=\dfrac{3-\sqrt{21}}{2},\ x=\dfrac{3+\sqrt{21}}{2}$에서 극솟값을 갖는다. 함수 $y=|f(x)|$의 모든 극댓값의 합은? [3.8점]

① 24　② 26　③ 28　④ 30　⑤ 32

[강서고 2017-2-1(자) 기말]

20. 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 모든 실수 x에 대하여 $f(-x)=-f(x)$이다. (나) 방정식 $\lvert f(x)\rvert = p$가 서로 다른 6개의 실근을 갖도록 하는 정수 p의 개수는 53이다.

방정식 $f(x)=k$가 자연수인 중근 α와 음의 실근 β를 가질 때, $\lvert \alpha+\beta+k \rvert + 4\int_0^1 f(x)dx$의 값은? [4.4점]

① 2　② 4　③ 6　④ 8　⑤ 10

새로운 함수의 정의

21. 최고차항의 계수가 -1인 사차함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여 $f(1-x)=f(1+x)$를 만족한다. 임의의 실수 t에 대하여 닫힌구간 $[t-2,\ t]$에서 $f(x)$의 최댓값을 $g(t)$라고 할 때, $5 \le t \le 7$에서 $g(t)$는 상수함수이다. 이때, $\dfrac{g'(0)}{f'(3)}$의 값은? [4.3점]

① $-\dfrac{4}{5}$ ② $-\dfrac{5}{6}$ ③ $-\dfrac{6}{7}$

④ $-\dfrac{7}{8}$ ⑤ $-\dfrac{8}{9}$

[강서고 2017-2-1(자) 기말]

22. 실수 t에 대하여 $f(x)=x^2+2tx+1$이라 하자. $0 \le x \le 1$에서 함수 $f(x)$의 최댓값을 $g(t)$, 최솟값을 $h(t)$라 할 때, $\int_{-2}^{2}\{g(t)-h(t)\}dt$의 값은 $\frac{q}{p}$이다. 이때, $p+q$의 값은? (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4.3점]

① 115　② 116　③ 117
④ 118　⑤ 119

4-3-3-변 [강서고 2016-2-1(자) 중간]

23. 함수 $f(x)=3x^4+4(a-1)x^3-6ax^2\ (a>0)$과 실수 t에 대하여 $x \le t$에서 $f(x)$의 최솟값을 $g(t)$라 하자. 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은? [4.6점]

〈 보 기 〉

ㄱ. $a=\frac{1}{2}$일 때, 함수 $g(t)$는 오직 한 점에서만 미분 불가능이다.
ㄴ. 모든 실수 t에서 함수 $g(t)$가 미분 가능하도록 하는 실수 a의 최솟값은 1이다.
ㄷ. 함수 $g(t)$가 서로 다른 두 점에서 미분 불가능이 되도록 하는 실수 a가 적어도 하나 존재한다.

① ㄱ　② ㄷ　③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ　⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

4-4-2 [강서고 2015-2-1(자) 기말]

24. 삼차함수 $f(x)=x^3-3x-2$이 있다. 실수 $t(t\geq-1)$에 대하여 $-1\leq x\leq t$ 에서 $|f(x)|$의 최댓값을 $g(t)$라 하자. $\int_{-1}^{2}g(t)dt$의 값은?

① 4 ② 6 ③ 8
④ 10 ⑤ 12

25. 함수
$f(x)=-3x^4+4(a-1)x^3+6ax^2\ (a>0)$과 실수 t에서 $x\leq t$에서 $f(x)$의 최댓값을 $g(t)$라 하자. 함수 $g(t)$가 실수 전체 집합에서 미분가능 하도록 하는 a의 값의 범위를 구하시오.

도함수의 활용 - 최대 최소

변 4.5 [강서고 2018-2-2(인) 기말]

26. 실수 $x,\ y$가 $x \geq 0,\ y \geq 0$에서 $x^2+y^2=2$를 만족할 때, x^3+y^3이 취하는 값의 범위는 $\alpha \leq x^3+y^3 \leq \beta$이다. $(\alpha\beta)^2$의 값은? [2.7점]

① 32　② 34　③ 36
④ 40　⑤ 42

4-3-3 [강서고 2015-2-1(자) 중간]

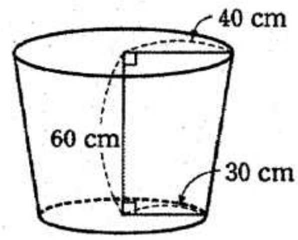
27. $2x^2+3y^2=18$을 만족하는 실수 $x,\ y$에 대하여 x^2+2xy^2의 최댓값과 최솟값을 각각 구하시오. [10점]

28. $x+y+z=6,\ x^2+y^2+z^2=18$을 만족하는 실수 $x,\ y,\ z$에 대하여 xyz의 값의 범위를 $\alpha \le xyz \le \beta$라 할 때, $\alpha+\beta$의 값은?

① 1　　② 2　　③ 3
④ 4　　⑤ 5

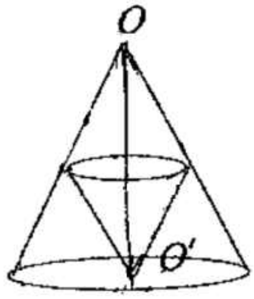
4-4-4 [강서고 2016-2-1(자) 기말]

29. 그림과 같이 아랫면과 윗면의 반지름의 길이가 각각 $30\,\mathrm{cm}$, $40\,\mathrm{cm}$이고 높이가 $60\,\mathrm{cm}$인 원뿔대 모양의 빈 그릇이 있다. 이 그릇에 수면의 높이가 매초 $\frac{1}{2}\,\mathrm{cm}$씩 증가하도록 물을 넣을 때, t초 후의 부피를 식으로 나타내고 수면의 높이가 $6\,\mathrm{cm}$가 되는 순간의 부피의 변화율을 구하시오.
(단, 그릇의 두께는 고려하지 않는다.) [10점]



4-3-3 [강서고 2015-2-1(자) 기말]

30. 밑면이 반지름의 길이가 2, 높이가 3인 직원뿔 O에 내접하는 직원뿔 O'이 있다. 이 직원뿔 O'의 부피가 최대가 되도록 하는 직원뿔 O'의 반지름의 값과 부피의 최댓값을 구하시오.



넓이 공식

4.3.3 [강서고 2018-2-1(자) 기말]

31. 곡선 $y=x^3-x^2+ax+b$와 직선 $y=2x-1$이 점 $(1,\ 1)$에서 접한다. 이때, a의 값은 α, b의 값은 β가 되고, 위에서 주어진 곡선과 직선으로 둘러싸인 부분의 넓이는 S가 된다. $7\alpha+5\beta+12S$의 값은? [3.1점]

① 21 ② 23 ③ 25
④ 27 ⑤ 29

[강서고 2017-2-1(자) 기말]

32. 최고차항이 모두 양수인 삼차함수 $y=f(x)$와 이차함수 $y=g(x)$가 $x=-3,\ -1,\ 0$에서 만나며 $y=f(x)$, $y=g(x)$로 둘러싸인 부분의 넓이가 $\dfrac{37}{24}$이다. 자연수 n에 대하여 $f(n)-g(n)=a_n$이라고 할 때, $\displaystyle\sum_{k=1}^{10} a_k$의 값은? [4점]

① 473 ② 946 ③ 1419
④ 2365 ⑤ 4730

4-4-3-변 [강서고 2016-2-1(자) 기말]

33. 직선 $l: y=x-2$, 이차함수 $C: y=x^2$이 주어져 있다. 직선 l 위의 임의의 점 P에서 곡선 C에 그은 두 접선의 접점을 $\mathrm{Q}(\alpha,\ \alpha^2)$, $\mathrm{R}(\beta,\ \beta^2)$ $(\alpha<\beta)$라 하자. 곡선 C와 두 선분 PQ, PR로 둘러싸인 도형의 넓이를 S라 하고, $\dfrac{S}{\beta-\alpha}$의 최솟값을 m이라 할 때, $36m$의 값을 구하면? [4.4점]

① 15 ② 18 ③ 21
④ 24 ⑤ 27

4.3.3 [영일고 2018-2-1(자) 기말]

34. 곡선 $y=-x^2+1$에 대하여 다음에 답하시오.

(1) 점 $(0,\ 2)$에서 곡선 $y=-x^2+1$에 그은 두 접선의 방정식을 구하시오. [3점]

(2) 곡선 $y=-x^2+1$과 (1)의 두 접선으로 둘러싸인 부분의 넓이를 구하시오. [3점]

4-4-3 [강서고 2015-2-1(자) 기말]

35. 곡선 $C: y=x^2-2ax+a^2-3$과 직선 $y=\frac{1}{2}x$가 서로 다른 두 점 $\mathrm{A},\ \mathrm{B}$에서 만난다. 점 A를 지나고 곡선 C에 접하는 직선과 직선 $y=\frac{1}{2}x$이 서로 수직할 때, 곡선 C와 직선 $y=\frac{1}{2}x$로 둘러싸인 도형의 넓이가 $\frac{p}{q}$일 때, $p+q$의 값은?

① 89 ② 97 ③ 113 ④ 126 ⑤ 173

역함수와 원함수의 넓이

4.3.3 [강서고 2018-2-1(자) 기말]

36. $f(x) = x^3 + 2x - 1$의 역함수를 $g(x)$라 할 때, $\int_{2}^{32} g(x)dx$의 값은? [2.6점]

① 58 ② 68 ③ 78
④ 88 ⑤ 98

4-4-3 [강서고 2016-2-1(자) 기말]

37. 점 $(2,\ 0)$을 지나고 기울기가 음수인 직선 l에 대하여 곡선 $y = \sqrt{2x}$ 와 두 직선 $x = 2,\ l$로 둘러싸인 부분을 A, 이 곡선과 y축 및 직선 l로 둘러싸인 부분을 B라 하자. 두 부분 $A,\ B$의 넓이가 같을 때, 직선 l의 기울기는? [3.8점]

① $-\dfrac{4}{3}$ ② $-\dfrac{5}{4}$ ③ -1
④ $-\dfrac{3}{4}$ ⑤ $-\dfrac{2}{3}$

대칭성 적분

38. 다항함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족한다.

(가) $\displaystyle\int_{1}^{2} f(x)\,dx = \frac{3}{8}$

(나) $\displaystyle\int_{-2}^{1} \{f(x) - f(-x)\}dx = \frac{3}{4}$

이때, $\displaystyle\int_{1}^{2} \{f(x) + f(-x)\}dx$의 값은? [3.2점]

① $\frac{3}{16}$ ② $\frac{3}{8}$ ③ $\frac{3}{4}$

④ $\frac{3}{2}$ ⑤ 3

39. 삼차함수 $f(x)$는 다음 조건을 모두 만족한다.

> (가) 임의의 실수 p에 대하여
> $\int_{3-p}^{3+p} f(x)dx = 2p \times f(3)$가 성립한다.
> (나) $f(0)=1$, $f(6)=7$, $f'(0)=19$

<보기>가 항상 참이 되게 하는 상수 $a,\ b,\ c$가 존재할 때, $a+b+c$의 값은? [3.7점]

< 보 기 >

ㄱ. $y=f(x)$의 그래프는 점 $(a,\ b)$에 대한 점대칭이다.
ㄴ. $\int_{3}^{5} f(x)dx = c$

① 3 ② 5 ③ 7 ④ 9 ⑤ 11

40. 연속함수 $f(x)$가 임의의 실수 x에 대하여 $f(x)=f(4-x)$를 만족시킨다. $\int_{-1}^{2} f(x)dx = 4$, $\int_{4}^{5} f(x)dx = 1$일 때, $\int_{0}^{-1} f(x)dx$의 값은? [3점]

① -3 ② -1 ③ 1 ④ 3 ⑤ 5

4-4-2 [강서고 2015-2-1(자) 기말]

41. 다음 보기를 모두 참이 되게 하는 $A,\ B,\ C$에 대해서 $A+8B+C$의 값을 구하면?

(가) 함수 $f(x)=x^3-9x+1$에 대해서

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x}\displaystyle\int_0^x (x-t-1)f'(t)dt$의 값은 A이다.

(나) 함수 $f(x)=\displaystyle\int_0^x (t-|t-1|)dt$의 극솟값은 B이다.

(다) 함수 $f(x),\ f'(x)$는 모두 연속함수이고,

$f(x)=x^2+3x+\displaystyle\int_0^x tf'(x-t)dt$일 때,

$f'(3)-f(3)$의 값은 C이다.

① 15 ② 16 ③ 17
④ 18 ⑤ 19

[강서고 2017-2-1(자) 기말]

42. 다음 조건을 만족하는 미분가능한 함수 $f(x)$에 대하여 $2 \times f(0)$의 값은? [2.9점]

> $$\int_1^x (x-t)f(t)dt = x^4 + ax^2 - 10x + 6$$
> (단, x, t는 임의의 실수)

① 2　② 12　③ 22
④ 32　⑤ 42

4-4-2 [강서고 2016-2-1(자) 기말]

43. 다항함수 $f(x)$가

$\int_0^x (x-t)f(t)dt = x^4 - 8x^3 + ax^2$을 만족시킬 때,

$x \geq a$인 모든 실수 x에 대하여 부등식 $f(x) \geq 0$가 항상 성립하도록 하는 정수 a의 최솟값은? [3.9점]

① 0　② 1　③ 2
④ 3　⑤ 4

44. 삼차함수 $f(x)$가 다음 <보기>의 조건을 만족시킬 때, 정적분 $\int_{-2}^{2} |f'(x)| dx$의 값을 구하시오. [7점]

< 보 기 >

(가) 모든 실수 a에 대하여 $\int_{-a}^{a} f(t)dt = 0$이다.

(나) $x = 1$에서 극솟값 -2를 갖는다.

45. 사차함수 $y = f(x)$가 $x = 1$에서 극솟값 a, $x = 3$에서 극댓값 $a^2 + 1$, $x = 5$에서 극솟값 $2a - 3$을 갖는다. $y = f'(x)$와 x축으로 둘러싸인 부분의 넓이가 14일 때, 양의 실수 a의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

46. 모든 실수 x에 대하여 정의된 이차함수 $f(x)$는 다음의 조건을 만족한다.

(가) $f(12)=f(15)=0$
(나) $f(x)$의 최솟값은 $-\dfrac{9}{2}$이다.

$g(x)=\int_0^1 f(t+x)dt$라 할 때, $g(x)$는 $x=a$에서 최솟값 b를 갖는다. 이 때, $a+b$의 값은?

① $\dfrac{23}{3}$ ② 8 ③ $\dfrac{25}{3}$

④ $\dfrac{26}{3}$ ⑤ 9

위치, 속도, 가속도

4.2.4 [강서고 2018-2-1(자) 기말]

47. 반지름의 길이가 $10\mathrm{m}$인 원형의 트랙 위를 두 자전거 A, B가 서로 맞은편에서 시계방향으로 동시에 출발하여 트랙을 따라 움직인다. 출발한지 t시간 후의 두 자전거의 속력이 각각 $10t^2\pi$, $10(3t+4)\pi$일 때, 출발한 후 3시간 동안 두 자전거 A, B가 만난 횟수는? (단, 출발할 때 A, B가 맞은편에 있다는 말은 원형트랙의 지름의 양 끝에 각각 위치해 있다는 의미이며, 속도의 단위는 $\mathrm{m/h}$이다.) [2.9점]

① 5 ② 6 ③ 7
④ 8 ⑤ 9

4.2.4 [강서고 2018-2-1(자) 기말]

48. 수직선 위를 움직이는 두 점 P, Q의 시각 t에서의 위치를 각각 $f(t)$, $g(t)$라 하자.
$f(t)-g(t)=t^3-6t^2+at+b$
이고, $t=1$에서 점 P, Q가 만나고 속도가 같을 때, 다시 속도가 같아지는 시각을 $t=\alpha$라 하고 $t=\alpha$일 때, 두 점 사이의 거리를 β라 할 때, α와 β의 값을 각각 구하시오.
(단, a, b는 상수이다.) [10점]

[강서고 2017-2-1(자) 기말]

49. 원점 O에서 출발하여 x축 위를 움직이는 점 M의 t분 후의 좌표가 $x=t^3-4t^2+4t$일 때, 출발하여 4분 후까지 M이 실제로 움직인 거리는? [3.2점]

① $\dfrac{484}{27}$ ② $\dfrac{487}{27}$ ③ $\dfrac{490}{27}$
④ $\dfrac{493}{27}$ ⑤ $\dfrac{496}{27}$

4-4-4-변 [강서고 2015-2-1(자) 기말]

50. 수직선 위를 움직이는 두 물체 A, B가 있다 동시에 원점을 출발하여 t초 후의 A, B의 속도가 각각 $3t^2-8t+6$, $4-2t$로 주어질 때, <보기>의 설명 중 옳은 것만으로 묶인 것은?

〈 보 기 〉

ㄱ. $0<t<1$일 때 A가 B보다 앞서 있다.
ㄴ. A, B가 마지막으로 만나는 순간 B는 운동방향을 바꾼다.
ㄷ. A, B의 거리의 차가 k인 순간이 두 번 존재하는 양수 k의 값이 존재한다.

① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

정답 및 풀이

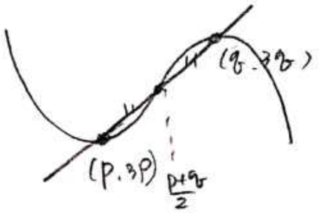
1. 133

$f(x)=x^3-6x+9x+4$

$a=-6,\ b=9,\ c=4$

$\therefore\ a^2+b^2+c^2=133$

2. $3\sqrt{6}$



$x=\dfrac{p+q}{2}=0$이라 하도 일반성을 잃지 않으므로

$f'(x)=-3(x^2-q^2)$

$f(x)=-x^3+3q^2x$

$f(q)=-q^3+3q^3=3q$

$2q^3-3q=0$

$q=\dfrac{\sqrt{6}}{2}$

따라서 극댓값과 극솟값의 차는 $6q$이므로 $3\sqrt{6}$

3. ③

$f'(x)=6x^2-2(a+3)x+2a=2(x-1)(3x-a)$

$\therefore\ x=1$ or $x=\dfrac{a}{3}$

① $\dfrac{a}{3}<1$

$f\left(\dfrac{a}{3}\right)-f(1)=1$

$a(a^2-9a+27)=0$

$\therefore\ a=0$

$\therefore\ 0+6=6$

② $\dfrac{a}{3}>1$

$f\left(\dfrac{a}{3}\right)-f(1)=-1$

$(a-6)(a^2-3a+9)=0$

$\therefore\ a=6$

4. ②

$f'(x)=3x^2-18x+3(a-1)$

방정식 $f'(x)=0$을 만족하는 $\alpha,\ \beta$에 대해 $x=\alpha,\ \beta$에서 함수 $f(x)$가 극값을 갖는다.

$\alpha+\beta=6,\ \alpha\beta=a-1$

함수 $f(x)$의 극댓값과 극솟값의 합은

$f(\alpha)+f(\beta)$

$=\alpha^3+\beta^3-9(\alpha^2+\beta^2)+3(a-1)(\alpha+\beta)+10a=-14$

$\alpha^3+\beta^3=(\alpha+\beta)^3-3\alpha\beta(\alpha+\beta)$

$=216-18(a-1)=-18a+234$

$\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=38-2a$

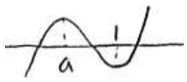
$\alpha+\beta=6$

이를 위 식에 대입해서 정리하면 $28a=112,\ a=4$

5. ④

$f'(x)=6(x-a)(x-1)$

i)



$f(a)=-a^3+3a^2+1$

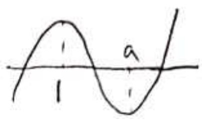
$f(1)=3a$

$f(3)=28-9a$

최대 : $f(3)=28-9a=12$

$a=\dfrac{16}{9}$ (×)

ii)



$f(3)=12,\ a=\dfrac{16}{9}$

최소 $f(a)>0,\ f(1)=12,\ a=4$

최소 $f(3)=-8$

iii)

$f(3)=12$ (×)

$\therefore\ m+a=-4$

6. ①

$f'(x)=6x^2-2(k+3)x+2k=2(x-1)(3x-k)$이므로

삼차함수 $f(x)$가 $x\geq 1$에서 증가하려면 $f'(1)\geq 0,\ f'(x)$의 다른 근이 1보다 작거나 같아야 한다.

$f'(1)=0\geq 0,\ \dfrac{k}{3}\leq 1 \Leftrightarrow k\leq 3$ 이다. 따라서 $k\leq 3$

7. 33

$f(x)=x^3-\dfrac{a}{2}x^2+12$를 미분하면

$f'(x)=3x^2-ax=3x\left(x-\dfrac{a}{3}\right)$

$a>0$이므로 $x=0$에서 극대, $x=\dfrac{a}{3}$에서 극소

$\frac{a}{3} \geq 1$, $a \geq 3$일 때, $x = \frac{a}{3}$에서 극솟값이면서 최솟값 $f\left(\frac{a}{3}\right)$

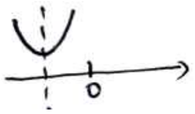
$0 < \frac{a}{3} < 1$, $0 < a < 3$일 때, $x = 1$에서 최솟값 $\frac{25}{2}$

따라서 $2g(1) + g(6) = 25 + f(2) = 25 + 8 = 33$

8. ⑤

$y' = 3(x^2 + 2(a-1)x - (a-3))$

① $a > 1$

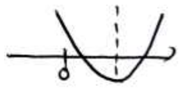


$(a-1)^2 + (a-3) \leq 0$

$1 \leq a \leq 2$

$\therefore a \leq 2$

② $a < 1$



$a < 1$

9. ②

$h(x) = (x+4)^2(x-2)$

$(\alpha,\ \beta) = \left(\frac{1}{2},\ -\frac{3^7}{16}\right)$

$\therefore k$의 최솟값 $= 8$

10. ④

$f'(x) = 6x^2 + 2ax + b$ 에서 두 근의 곱 $\alpha\beta = 0$ 이므로 $b = 0$

$f'(x) = x(6x + 2a)$

$\alpha = 0$ 이라 하면 $0 < a < 3$이므로 $-1 < \beta < 0$ 이다.

따라서 $f(x)$의 극댓값은 $f(\beta) = -2\beta^3 + a\beta^2 + c$이고 극솟값은 $f(0) = c$이다.

$[-1,\ 3]$에서의 $f(x)$의 최대, 최소를 비교해 보자.

$f(-1) = -2 + a + c$, $f(\beta) = -2\beta^3 + a\beta^2 + c$, $f(0) = c$, $f(3) = 54 + 9a + c$

$a > 0$, $-1 < \beta < 0$ 이므로 명백히 $f(3) = 54 + 9a + c$ 이 최댓값이다.

$f(\beta)$는 삼차함수의 극댓값이므로 최소가 될 수 없다.

㉠ $0 < a < 2$일 때, $f(-1)$이 최솟값

$f(3) - f(-1) = 76 \Leftrightarrow a = \frac{20}{8}$ $a > 2$이므로 조건에 맞지 않는다.

㉡ $2 < a < 3$일 때, $f(0)$이 최솟값

$f(3) - f(1) = 76 \Leftrightarrow a = \frac{22}{9}$ $2 < a = \frac{22}{9} < 3$이므로 조건에 맞는다.

따라서 $a = \frac{22}{9}$, $b = 0$이므로 $f + g = 31$

11. ①

$\frac{s}{t} = \frac{128}{27}$

12. ③

ㄱ. $x^4 - 6x^3 + 13x^2 - 11x = x - 4$

$(x-1)^2(x-2)^2 = 0$

$\therefore k = 2$

ㄴ. $g(x) = x - 4$라 하자.

$h(x) = f(x) - g(x) = (x-1)^2(x-2)^2$이므로

$h(3-x) = h(x)$

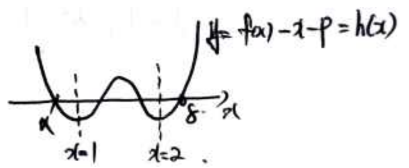
$\therefore f(3-x) - g(3-x) = f(x) - g(x)$

$\therefore f(3-x) - f(x) = g(3-x) - g(x)$

$= -2x + 3$

$\therefore m = -2,\ n = 3$

ㄷ.



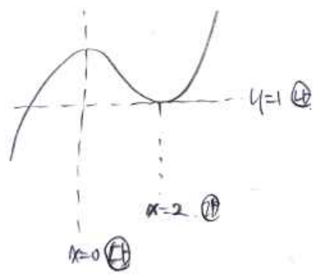
$h'(\alpha) = -h(\delta)$

$\therefore f'(\alpha) + f'(\delta) = 2$

$\therefore q = 2$

$\therefore k - m + n + q = 9$

13. ③



$\therefore f'(x) = 3x(x-2)$

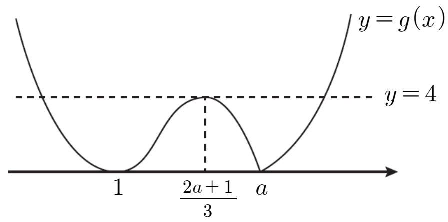
$f(x) = x^3 - 3x^2 + C$

$f(2) = 1$이므로 $C = 5$

$\therefore f(1) = 3$

14. ④

(가) 조건 $\Rightarrow$ $h(x) = f(x) - f(1) = (x-1)^2(x-a)$

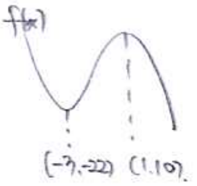


$h\left(\frac{2a+1}{3}\right) = -4 \Rightarrow \frac{4}{27}(1-a)^3 = -4$

$\therefore a = 4$

$\therefore$ $[-1,\ 4]$에서 $g(x)$의 최댓값 $= 20$

15. ④

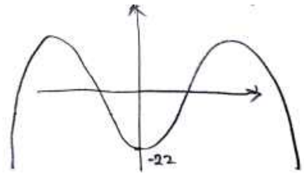


$$g(x)=\begin{cases} f(x+a) & (x \geq 0) \\ f(-(x-a)) & (x<0) \end{cases}$$

(가)에 따라 $f'(a)=0$

$\therefore\ a=1$ or $a=-3$

i) $a=1$ ii) $a=-3$



(나) 불만족 (나) 만족

$\therefore\ b=-22$

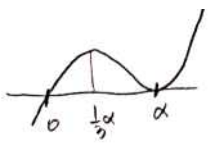
16. ③

$x=a$에서	$x=a$에서
$n=1$ 극대 2	$n=1$ 극대 2
$n=2$ 극대 1	$n=2$ 극대 3
$n=3$ $\times$	$n=3$ 극대 4
$n=4$ 극소 1	$n=4$ 극대 5
$n=5$ 극소 2	$\vdots$
$\vdots$	

합 548

17. ③

$f(x)=x(x-\alpha)^2$



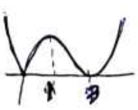
$$f\left(\frac{1}{3}\alpha\right)=\frac{4\alpha^3}{27}=\frac{1}{2}$$

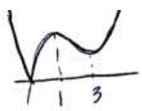
$$\therefore\ \alpha=\frac{3}{2}$$

$$f(3)=\frac{27}{4}$$

18. ⑤

(가)





$f(1)=k+4$

$f(3)=k$

$k \geq 0$일 때, $x=\alpha$, $x=3$에서 극소이고 $g(\alpha)=0$,

$g(3)=k$이므로 $k<8$,

따라서 $0 \leq k<8$

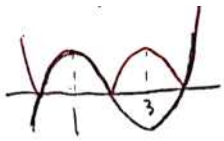
$k+4 \leq 0$일 때, $x=1$, $x=\beta$에서 극소이고 $g(1)=-k-4$,

$g(\beta)=0$이므로 $-k-4<8$

따라서 $-12<k \leq -4$

만족하는 정수 k의 개수는 $8+8=16$

(나)



$k<0<k+4$일 때, 성립하므로 $-4<k<0$

$x=1$, $x=3$에서 극대이고 $g(1)=k+4$, $g(3)=-k$이므로

$2k+4<8$

따라서 $-4<k<0$

만족하는 정수 k의 개수는 3

$m+n=19$

19. ⑤

삼차함수 $f(x)$에 대하여 $y=|f(x)|$가 문제의 조건을 만족하려면

$y=f(x)$의 그래프와 x축의 교점의 x좌표가 -3, $\dfrac{3 \pm \sqrt{21}}{2}$가

되어야 한다.

$\therefore f(x)=(x+3)(x^2-3x-3)=x^3-12x-9$

$f'(x)=3x^2-12$

함수 $f(x)$는 $x=-2$에서 극댓값 7, $x=2$에서 극솟값 -25을 갖는

삼차함수이다.

따라서 함수 $y=|f(x)|$의 모든 극댓값의 합은 $7+25=32$이다.

20. ②

최고차항의 계수가 1인 원점 대칭인 삼차함수 $f(x)=x^3-3a^2x$라

두면

방정식 $|f(x)|=p$가 서로 다른 6개의 실근을 갖도록 하는 정수 p의

개수는 53이므로

$-55<f(a)=-2a^3 \leq -54$이므로

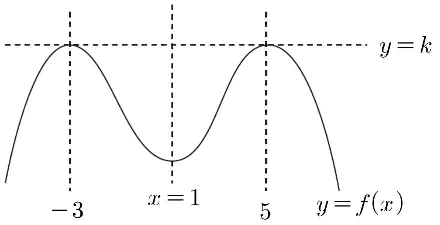
자연수 $a=3$이다.

$\therefore\ f(x)=x^3-27x$

따라서 $\alpha=a=3$, $\beta=-6$, $k=f(a)=-54$

$$|\alpha+\beta+k|+4\int_0^1 f(x)dx=|3-6-54|+4\times\left(-\frac{53}{4}\right)=4$$

21. ④



$\therefore f(x)-k=a(x+3)^2(x-5)^2$

$f'(x)=4a(x+3)(x-5)(x-1)$

$\therefore \dfrac{g'(0)}{f'(3)}=\dfrac{f'(-2)}{f'(3)}=\dfrac{4a\times1\times-7\times-3}{4a\times6\times-2\times2}=-\dfrac{7}{8}$

22. ①

이차함수 $f(x)$의 대칭축은 $x=-t$이다.

i) $-t<0$

$0\le x\le 1$일 때 $f(x)$는 $x=1$에서 최댓값 $g(t)=2t+2$을 갖고,
$x=0$에서 최솟값 $h(t)=1$을 갖는다.

ii) $0\le -t\le \dfrac{1}{2}$

$0\le x\le 1$일 때 $f(x)$는 $x=1$에서 최댓값 $g(t)=2t+2$을 갖고,
$x=-t$에서 최솟값 $h(t)=1-t^2$을 갖는다.

iii) $\dfrac{1}{2}\le -t\le 1$

$0\le x\le 1$일 때 $f(x)$는 $x=0$에서 최댓값 $g(t)=1$을 갖고,
$x=-t$에서 최솟값 $h(t)=1-t^2$을 갖는다.

iv) $-t\ge 1$

$0\le x\le 1$일 때 $f(x)$는 $x=0$에서 최댓값 $g(t)=1$을 갖고,
$x=1$에서 최솟값 $h(t)=2t+2$을 갖는다.

$\therefore \int_{-2}^{2}\{g(t)-h(t)\}\,dt$

$=\int_{-2}^{-1}(-2t-1)\,dt+\int_{-1}^{-\frac{1}{2}}t^2\,dt+\int_{-\frac{1}{2}}^{0}(t+1)^2\,dt+\int_{0}^{2}(2t+1)\,dt$

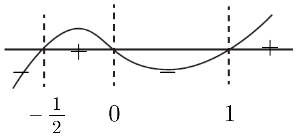
$=2+\dfrac{7}{24}+\dfrac{7}{24}+6=\dfrac{103}{12}$

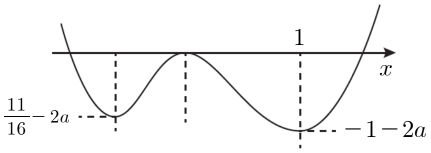
$\therefore p+q=115$

23. ③

$f'(x)=12x(x+a)(x-1)$

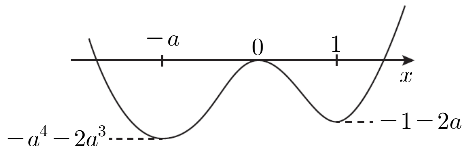
ㄱ.





$\therefore t=1$에서 미분 불가능 (참)

ㄴ.



$-a^4-2a^3\le -1-2a$

$a\le -1$ or $a\ge 1$

$\therefore a$의 최솟값 $=1$ (참)

ㄷ. 거짓

24. ③

$f'(x)=3x^2-3$

함수 $f(x)$는 $x=-1$에서 극댓값 0, $x=1$에서 극솟값 -4를 갖는 삼차함수이다.

$f(x)$는 x축과 $x=-1$, $x=2$에서 만나므로

$-1\le x\le 2$에서 함수 $g(t)$는 다음과 같이 정의된다.

$g(t)=\begin{cases}-f(x) & (-1\le x\le 1)\\ 4 & (1\le x\le 2)\end{cases}$

$\int_{-1}^{2}g(t)\,dt$

$=\int_{-1}^{1}(-x^3+3x+2)\,dx+\int_{1}^{2}4\,dx$

$=8$

25. $0<a\le 1$

$f'(x)=-12x^3+12(a-1)x^2+12ax$

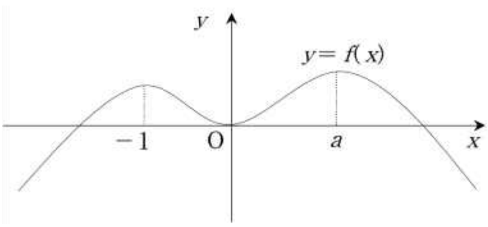
$=-12x\{x^2-(a-1)x-a\}$

$=-12x(x+1)(x-a)$

$f'(x)=0$에서 $x=-1,\ 0,\ a$

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	0	$\cdots$	a	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	↗	극대	↘	극소	↗	극대	↘

함수 $y=f(x)$의 그래프는 다음과 같다.



i) $f(-1)\ge f(a)$인 경우

$g(t)=\begin{cases}-3t^4+4(a-1)t^3+6at^2 & (t<-1)\\ 2a+1 & (t\ge -1)\end{cases}$

$g'(t)=\begin{cases}-12t^3+12(a-1)t^2+12at & (t<-1)\\ 0 & (t>-1)\end{cases}$

$f(t)$, $f(-1)$은 다항함수이므로 함수 $g(t)$는 $t\ne -1$인 실수 전체의 집합에서 미분가능하다. $t=-1$일 때 미분가능성을

조사해보면

$\lim\limits_{x\to-1-} g'(t) = \lim\limits_{x\to-1-} \{-12t^3+12(a-1)t^2+12at\}=0$

$\lim\limits_{x\to-1+} g'(t) = \lim\limits_{x\to-1-} 0=0$이므로 함수 $g(t)$는 실수 전체 집합에서 미분가능하다.

ii) $f(-1) < f(a)$인 경우

$f(x)=f(-1)$의 세 근을 $-1,\ \alpha,\ \beta\ (-1<\alpha<\beta)$이라 하면

$$g(t)=\begin{cases} -3t^4+4(a-1t^3+6at^2 & (t<-1) \\ 2a+1 & (-1\le t<\alpha) \\ -3t^4+4(a-1)t^3+6at^2 & (\alpha\le t<a) \\ a^4+2a^3 & (a\le t) \end{cases}$$

이때, $\lim\limits_{x\to\alpha-} g'(t) = \lim\limits_{x\to\alpha-} (2a+1)'=0$

$\lim\limits_{x\to\alpha-} g'(t) = \lim\limits_{x\to\alpha+} f'(t) = -12\alpha(\alpha-a)(\alpha+1)>0$

$(\because\ 0<\alpha<a)$이므로

함수 $g(t)$는 $x=\alpha$에서 미분가능하지 않다.

즉, 함수 $g(t)$가 실수 전체에서 미분가능하려면

$f(-1)\ge f(a)$이어야 하고

$f(-1)=2a+1,\ f(a)=a^4+2a^3$이고

$f(a)-f(-1)=a^4+2a^3-2a-1$

$=(a+1)^3(a-1)\le 0$이어야 하므로

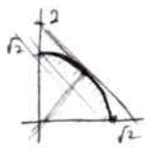
$\therefore\ 0<a\le 1\ (\because\ a>0)$

26. ①

$x+y=a,\ xy=b$

$x^2+y^2=a^2-2b=2\ (\sqrt{2}\le a\le 2)$

$b=\dfrac{a^2-2}{2}$



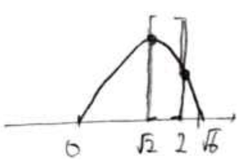
$x+y=a$

$y=-x+a\ (\sqrt{2}\le a\le 2)$

$x^3+y^3=(x+y)^2-3xy(x+y)$

$=a^3-3ba$

$=-\dfrac{1}{2}a^3+3a$



$a=2$일 때 $\alpha=2$

$a=\sqrt{2}$ 일 때 $\beta=2\sqrt{2}$

$(\alpha\beta)^2=(4\sqrt{2})^2=32$

27. 최댓값 $\dfrac{52}{3}$ 최솟값 $-\dfrac{45}{4}$

$y^2=6-\dfrac{2}{3}x^2$

$\therefore\ x^2+2xy^2$

$f(x)=x^2+2x\left(6-\dfrac{2}{3}x^2\right)=-\dfrac{4}{3}x^3+x^2+12x$

$f'(x)=-4x^2+2x+12$

$=-2(2x^2-x-6)$

$=-2(2x+3)(x-2)$

$\therefore\ x=-\dfrac{3}{2},\ x=2$

$\therefore\ m=f\left(-\dfrac{3}{2}\right)=-\dfrac{45}{4}$

$M=f(2)=\dfrac{52}{3}$

28. ④

$x+y=6-z,\ x^2+y^2=18-z^2$

$x^2+y^2=(x+y)^2-2xy$

$18-z^2=(6-z)^2-2xy$

$18z-z^3=z(6-z)^2-2xyz$

$xyz=\dfrac{2z^3-12z^2+18z}{2}=z^3-6z^2+9z$

$(x^2+y^2)(1^2+1^2)\ge(x+y)^2$

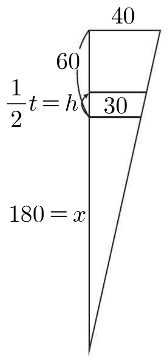
$2(18-z^2)\ge(6-z)^2$

$36-2z^2\ge 36-12z+z^2$

$\therefore\ 3z^2-12z\le 0,\ 0\le z\le 4$

$\therefore\ 0\le xyz\le 4$

29. 480.5π(cm^3/초)



$x:30=x+60:40$

$x=180$

$180:30=180+h:r$

$r=\dfrac{5400+30h}{180}=30+\dfrac{1}{6}h$

$S=\pi\left(30+\dfrac{1}{6}h\right)^2$

$V=\pi\displaystyle\int_0^h \dfrac{1}{36}x^2+10x+900\,dx$

$=\left(\dfrac{1}{108}h^3+5h^2+900h\right)\pi$

$=\left(\dfrac{1}{8\cdot108}t^3+\dfrac{5}{4}t^2+450t\right)\pi$

$V'(12)=\left(480+\dfrac{1}{2}\right)\pi=480.5\,(\mathrm{cm}^3/\text{초})$

30. $r=\dfrac{4}{3},\, v=\dfrac{16}{27}\pi$

직원뿔 O' 의 반지름의 길이를 r이라 하자.

직원뿔 O' 의 높이가 $3-\dfrac{3}{2}r$

O' 의 부피를 $f(r)$ 이라 하면

$f(r)=\dfrac{1}{3}\pi r^2\left(3-\dfrac{3}{2}r\right)=\pi r^2\left(1-\dfrac{1}{2}r\right)$

$f'(r)=2\pi r\left(1-\dfrac{1}{2}r\right)-\dfrac{1}{2}\pi r^2$

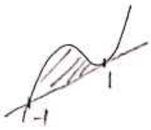
$\quad=-\dfrac{3}{2}\pi r^2+2\pi r$

$f'(r)=0$을 만족하는 $r=0$ 또는 $\dfrac{4}{3}$

$0<r<2$이므로 함수 $f(r)$은 $r=\dfrac{4}{3}$에서 극댓값이자 최댓값 $\dfrac{16}{27}\pi$를 갖는다.

31. ②

$a+b=1,\ a=1,\ b=0,\ \alpha=1,\ \beta=0$



$x^3-x^2+x=2x-1$

$x^3-x^2-x+1=0$

$(x-1)^2(x+1)=0$

$S=\dfrac{1}{12}\times 2^4=\dfrac{4}{3}$

32. ④

$f(x)-g(x)=k(x+3)(x+1)x$로 둘 수 있다. $(k>0)$

곡선 $y=f(x)$와 $y=g(x)$로 둘러싸인 부분의 넓이는

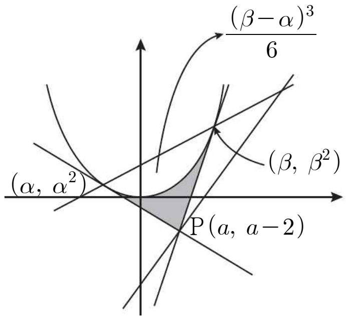
$\displaystyle\int_{-3}^{-1}(f(x)-g(x))\,dx+\int_{-1}^{0}(g(x)-f(x))\,dx=\dfrac{37}{24}$

이로부터 $k=\dfrac{1}{2}$임을 알 수 있다.

$a_n=f(n)-g(n)=n(n+1)(n+3)$

$\displaystyle\sum_{k=1}^{10}a_k=\sum_{k=1}^{10}\dfrac{1}{2}(k^3+4k^2+3k)=2365$

33. ③



$S=\begin{vmatrix}(\alpha-a), & \alpha^2-(a-1)\\ (\beta-\alpha), & \beta^2-(a-1)\end{vmatrix}$

$\quad=\dfrac{1}{4}(\beta-\alpha)^3$

$\therefore\ S=\dfrac{1}{12}(\beta-\alpha)^3$

접점 $(t,\ t^2)$

$l_{\mathrm{P}}:y=2t(x-t)+t^2$

$(a-1)=2t(a-t)+t^2,\ t^2-2at+(a-1)=0$

$\alpha+\beta=2a,\ \alpha\beta=a-2$

$\displaystyle S=\int_{\alpha}^{a}x^2-\{2\alpha(x-\alpha)+\alpha^2\}dx$

$\displaystyle\qquad+\int_{a}^{\beta}x^2-\{2\beta(x-\beta)+\beta^2\}dx$

$\dfrac{S}{\beta-\alpha}=\dfrac{1}{12}(\beta-\alpha)^2=\dfrac{1}{12}(4a^2-4a+8)$

$\quad=\dfrac{1}{12}\left\{4\left(a-\dfrac{1}{2}\right)^2+7\right\}$

$\therefore\ 36m=21$

34. 풀이 참조

(1)

접점 $(t,\ -t^2+1)$

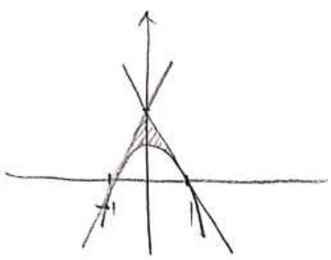
$y=-2t(x-t)-t^2+1\leftarrow\ (0,\ 2)$

$\ =-2tx+t^2+1$

$\quad(1,\ 0),\ (-1,\ 0)$

$y=-2x+2,\ y=2x+2$

(2)



$\displaystyle 2\int_{0}^{1}-2x+2-(-x^2+1)dx$

$= 2\int_0^1 (x^2-2x+1)\,dx$

$= 2\left[\frac{1}{3}(x-1)^3\right]_0^1$

$= \frac{2}{3}$

35. ⑤

점 A의 x좌표를 t라 하자.

점 A에서의 곡선 C의 접선의 기울기가 -2이므로

$2t-2a=-2,\ t-a=-1$

또한 점 A가 $y=\frac{1}{2}x$와 $y=x^2-2ax+a^2-3$의 교점이므로

$\frac{1}{2}t=(t-a)^2-3$

$\therefore t=-4,\ a=-3$

곡선 $C: y=x^2+6x+6$과 직선 $y=\frac{1}{2}x$는 $x=-4,\ x=-\frac{3}{2}$에서 만난다.

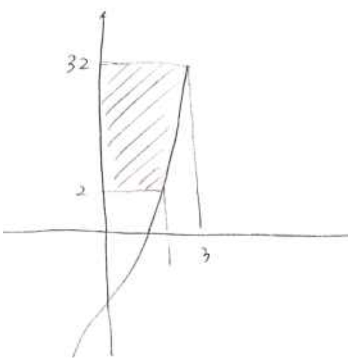
구하고자 하는 도형의 넓이는

$\int_{-4}^{-\frac{3}{2}}\left(\frac{1}{2}x-x^2-6x-6\right)dx$

$=\int_{-4}^{-\frac{3}{2}}\left(-x^2-\frac{11}{2}x-6\right)dx=\frac{125}{48}$

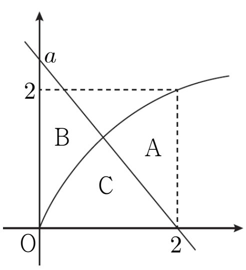
$\therefore p+q=173$

36. ②



$94-\int_1^3 (x^3+2x-1)\,dx = 94-26=68$

37. ①



$\mathrm{A}+\mathrm{C}=\mathrm{B}+\mathrm{C}$

$\mathrm{A}+\mathrm{C}=4-\int_0^2 \frac{y^2}{2}dy=\frac{8}{3}$

$\mathrm{B}+\mathrm{C}=a \quad \therefore a=\frac{8}{3}$

$m=\frac{-\frac{8}{3}}{2}=-\frac{4}{3}$

38. ④

$f(x)-f(-x)=g(x) \rightarrow g(x)$는 기함수

$\int_{-2}^{1} g(x)dx=\int_{-2}^{-1} g(x)dx=-\int_1^2 g(x)dx=\frac{3}{4}$

$f(x)+f(-x)=h(x) \rightarrow h(x)$는 우함수

$\int_1^2 h(x)dx=k$

$\int_1^2 \{g(x)+h(x)\}dx=\int_1^2 2f(x)dx=-\frac{3}{4}+k$

$\therefore k=\frac{3}{2}$

39. ① (답 5>1 변경 김동우T)

$f(3+p)+f(3-p)=2f(3)$

$f'(x)=3k(x-3)^2-27k+19$

$f(x)=k(x-3)^3-(27k-19)x+27k+1$

$f(6)=27k-162k+114+27k+1=7$

$108k=108$

$k=1$

$\therefore f(x)=(x-3)^3-8x+28$

$b=f(3)=4$

$c=\int_3^5 (x-3)^3-8x+28\,dx=\left[\frac{1}{4}(x-3)^4-4x^2+28x\right]_3^5$

$=-4$

40. ②

$f(x): x=2$ 대칭

$\int_{-1}^{0} f(x)dx=\int_4^5 f(x)dx=1$

$\therefore \int_0^{-1} f(x)dx=-1$

41. ②

(가)

$\int_0^x (x-t-1)f'(t)\,dt$

$=x\int_0^x f'(t)\,dt-\int_0^x (t+1)f'(t)\,dt$

$=x(x^3-9x)-\int_0^x (t+1)(3t^2-9)\,dt$

$= \frac{1}{4}x^4 - x^3 - \frac{9}{2}x^2 + 9x$

$\therefore \lim_{x \to 0} \frac{1}{x}\left(\frac{1}{4}x^4 - x^3 - \frac{9}{2}x^2 + 9x\right) = 9 = A$

(나)

i) $x < 1$

$f(x) = \int_0^x (t - (1-t))\,dt$

$= \int_0^x (2t-1)\,dt = x^2 - x = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}$

ii) $x \geq 1$

$f(x) = \int_0^1 (2t-1)\,dt + \int_1^x dt = x - 1$

따라서 함수 $f(x)$는 $x = \frac{1}{2}$에서 극솟값 $-\frac{1}{4}(=B)$을 갖는다.

(다)

$\int_0^x tf'(x-t)\,dt$에서 $x - t = k$로 치환하면

$f(x) = x^2 + 3x + x\int_0^x f'(k)\,dk - \int_0^x kf'(k)dk$

$f'(x) = 2x + 3 + \int_0^x f'(k)dk$

$f'(3) - f(3) = 9 + \int_0^3 f'(k)dk - f(3) = 9 - f(0) = 9$

42. ②

주어진 식의 양변에 $x = 1$을 대입하면 $a = 3$이다.

양변을 x에 대해 미분하면 $\int_1^x f(t)\,dt = 4x^3 + 6x - 10$

$f(x) = 12x^2 + 6$

$\therefore 2 \times f(0) = 12$

43. ⑤

$\int_0^x f(t)dt = 4x^3 - 24x^2 + 2ax$

$f(x) = 12x^2 - 48x + 2a$

$= 12(x-2)^2 + 2a - 48$

$x = 3 : 2a - 36 \quad a \geq 12$

$x = 4 : 2a \quad a \geq 0$

$\therefore$ a의 최솟값 : 4

44. 12

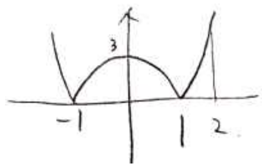
$f(x) = px^3 + qx$

$f'(x) = 3px^2 + q$

$f(1) = -2,\ f'(1) = 0$

$p = 1,\ q = -3$

$\therefore f'(x) = 3x^2 - 3$



$2\left\{\int_0^1 (-3x^2+3)dx + \int_1^2 (3x^2-3)dx\right\} = 12$

45. ③

$\int_1^5 |f'(t)|\,dt = 14$

$\int_1^3 f'(t)\,dt - \int_3^5 f'(t)\,dt = 14$

$f(3) - f(1) - f(5) + f(3) = 2a^2 - 3a + 5 = 14$

$2a^2 - 3a - 9 = 0$

$(2a+3)(a-3) = 0$

$\therefore a = 3\ (\because a > 0)$

46. ④

가, 나 조건에 의해 $f(x) = a\left(x - \frac{27}{2}\right)^2 - \frac{9}{2}$이고, $f(12) = 0$에서

$a = 2$

$g(x) = \int_0^1 f(t+x)\,dt = \int_x^{x+1} f(k)\,dk$

$g'(x) = f(x+1) - f(x) = 2(2x - 26)$

함수 $g(x)$는 구간 $(-\infty,\ 13)$에서 감소하고, $(13,\ \infty)$에서 증가한다.

따라서 함수 $g(x)$는 $x = 13$에서 최솟값을 갖고, 그 최솟값은

$g(13) = \int_{13}^{14} f(k)\,dk = -\frac{13}{3}$

$\therefore a + b = 13 - \frac{13}{3} = \frac{26}{3}$

47. ④

A, B의 시각 t에서의 위치를 $f(t)$, $g(t)$라 하면

$f(t) = \frac{10}{3}t^3\pi,\ g(t) = (15t^2 + 40t)\pi$

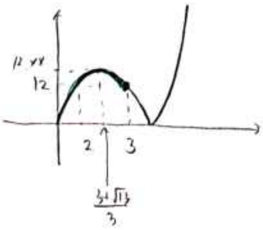
둘 다 시계방향으로 회전하므로 이동거리의 차이가 $(2n-10)\pi$ 일 때 만난다.

$h(t) = f(t) - g(t) = \left(\frac{10}{3}t^3 - 15t^2 - 40t\right)\pi$라 하면

$h'(t) = 10t^2 - 30t - 40$이므로 $h(t)$는 $0 \leq t \leq 3$에서 감소함수이다

따라서 $h(0) = 0,\ h(3) = -165\pi$이고

$-10\pi,\ -30\pi,\ \cdots,\ -150\pi$에서 8번 만난다.



48. $\alpha=3,\ \beta=4$

$f'(t)-g'(t)=3t^2-12t+a$

$f'(1)-g'(1)=0$

$f(1)-g(1)=0$

$\therefore\ a=9,\ \ b=-4$

$3t^2-12t+9=3(t-3)(t-1)=0$

$t=1$ or 3

$\therefore\ \alpha=3,\ \beta=4$

49. ⑤

점 M의 속도는 $\dfrac{dx}{dt}=3t^2-8t+4$

출발하여 4분 후까지 점 M이 실제로 움직인 거리는

$$\int_0^4 |3t^2-8t+4|\,dt$$

$$=\int_0^{\frac{2}{3}}(3t^2-8t+4)\,dt-\int_{\frac{2}{3}}^{2}(3t^2-8t+4)\,dt+\int_2^4(3t^2-8t+4)\,dt=\frac{496}{27}$$

50. ③

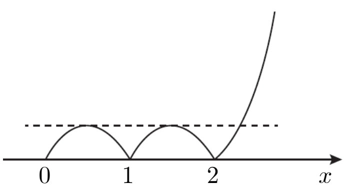
t초 후 물체 A, B의 위치는 각각 $t^3-4t^2+6t,\ 4t-t^2$이 된다.

$t^3-4t^2+6t-(4t-t^2)=t^3-3t^2+2t=t(t-1)(t-2)$

ㄱ. $0<t<1$에서 $t^3-3t^2+2t>0$을 만족하므로 A가 B보다 앞서 있다. (참)

ㄴ. A, B가 마지막으로 만나는 순간은 $t=2$
물체 B의 속도가 $4-2t$이므로 $t=2$일 때 B는 운동방향을 바꾼다. (참)

ㄷ. A, B의 거리의 차는 $|t^3-3t^2+2t|\ \ (t\ \geq 0)$



$y=k$와 $y=|t^3-3t^2+2t|$의 교점이 2개가 되는 k는 존재하지 않는다.(거짓)