

대일고 2학년 2학기말
Online 백대스쿨
One more

김동우



'Quality Education Creation'

[삼차함수와 접선의 관계]

1. 삼차함수 $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2x + 2$ 와 직선 $g(x) = ax + b$ 에 대하여 함수 $h(x)$ 를 다음과 같이 정의한다.

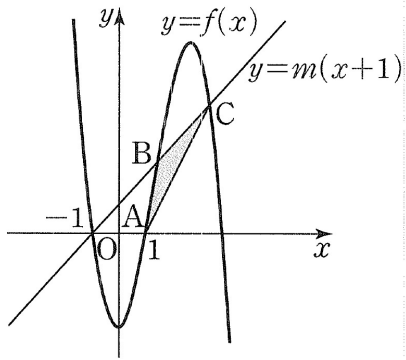
$$h(x) = \begin{cases} f(x) & (f(x) \geq g(x)) \\ g(x) & (f(x) < g(x)) \end{cases}$$

함수 $h(x)$ 가 실수 전체의 집합에서 미분가능할 때, $g(2)$ 의 값을 구하시오. (단, a, b 는 상수이다.)

[최대최소의 활용 / 넓이]

2. 그림과 같이 실수 m 에 대하여 함수

$f(x) = -(x^2 - 3x - 4)(x - 1)$ 의 그래프가 점 $A(1, 0)$ 을 지나고 직선 $y = m(x + 1)$ 과 제 1사분면에서 서로 다른 두 점 B, C 에서 만난다. 삼각형 ABC 의 넓이의 최댓값을 구하시오.



[절댓값으로 나타낸 다항함수의 분석]

3. 최고차항의 계수가 양수인 사차함수 $f(x)$ 가 있다. 함수 $g(x)$ 가 $g(x) = f(|x|)$ 일 때, 함수 $g(x)$ 는 실수 전체의 집합에서 미분가능하고, 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $g'(-2) = 0, g'(4) = 0$

(나) 방정식 $g(x) - 17 = 0$ 의 서로 다른 실근의 개수는 4이다.

(다) 실수 k 에 대하여 방정식 $g(x) - k = 0$ 의 실근의 개수를 $h(k)$ 라 하면 함수 $h(k)$ 는 $k = 1, k = 17$ 에서만 불연속이다.

$g(-5)$ 의 값은?

[부등식에서 미분의 활용]

4. $x \geq k$ 인 모든 실수 x 에 대하여 부등식

$x^3 + 3kx^2 + 1 \geq 0$ 이 항상 성립할 때, 실수 k 에 대하여

k^3 의 최솟값을 구하시오.

[새롭게 정의된 함수의 분석]

5. 실수 k 에 대하여 닫힌 구간 $[-1, 1]$ 에서 정의된 함수

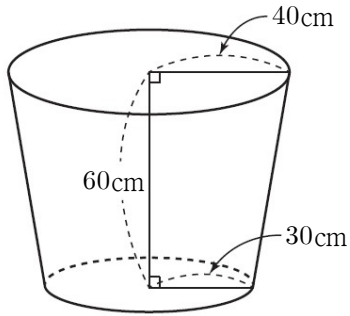
$f(x) = x^3 - 3k^2x$ 의 최댓값을 $M(k)$ 라 하자. $M(k)$ 가 $k = \alpha, k = \beta$ 에서 미분가능하지 않을 때, $\alpha\beta$ 의 값을 구하시오.

[위치 - 속도 분석]

6. 지상 25m의 높이에서 처음 속도 20 m/초로 똑바로 위로 던진 물체가 t 초 후에 도달하는 지상으로부터의 높이를 s m 이라 할 때, $s = 25 + 20t - 5t^2$ (m)인 관계가 성립한다. 이 물체는 a 초 후에 최고 높이에 도달하고, b 초 후에 던진 지점과 같은 지점을 속도 v_1 로 통과하며, c 초 후 속도 v_2 로 지면에 떨어진다. $a + b + c + v_1 v_2$ 를 구하시오.

[시간에 따른 변화율 - 부피]

7. 그림과 같이 아랫면과 윗면의 반지름의 길이가 각각 30 cm, 40 cm 이고 높이가 60 cm 인 원뿔대 모양의 빈 그릇이 있다. 이 그릇에 수면의 높이가 매초 $\frac{1}{2}$ cm 씩 증가하도록 물을 넣을 때, t 초 후의 부피를 식으로 나타내고 수면의 높이가 6 cm 가 되는 순간의 부피의 변화율을 구하시오.
(단, 그릇의 두께는 고려하지 않는다.)



[부정적분과 미분의 관찰]

8. 두 삼차함수 $f(x) = 3x^3 - 6x^2 + 3x - 9$, $g(x)$ 와
다항함수 $h(x)$ 가 임의의 실수 x 에 대하여 다음 조건을
만족시킨다.

$$(가) \quad h(x) = f'(x) - g'(x)$$

$$(나) \quad h(x) - \int \{f(x) + 3g(x)\} dx = C \quad (\text{단, } C \text{는 상수})$$

$g(2)$ 의 값을 구하시오.

[항등식에서 $f(x)$ 도출]

9. 임의의 두 실수 x, y 에 대하여 다항함수 $f(x)$ 가 $f(x+y) = f(x) + f(y) - 2xy$ 를 만족한다. 함수 $F(x)$ 가 $F(x) = \int (x-1)f'(x)dx$ 이고 $F(x)$ 의 극값이 존재하지 않을 때, 함수 $f(x)$ 를 구하시오.

[도함수의 정적분]

10. 최고차항의 계수가 양수인 삼차함수 $f(x)$ 가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 함수 $f(x)$ 는 $x = 0$ 에서 극댓값, $x = k$ 에서 극솟값을 가진다. (단, k 는 상수이다.)

(나) 1보다 큰 모든 실수 t 에 대하여

$$\int_0^t |f'(x)| dx = f(t) + f(0)$$

이다.

<보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고르면?

— < 보 기 > —

㉠. $\int_0^k f'(x) dx < 0$

㉡. $0 < k \leq 1$

㉢. 함수 $f(x)$ 의 극솟값은 0이다.

[정적분 / 평행이동 이용]

11. 연속함수 $f(x)$ 가 다음 조건을 만족시킬 때,

$\int_{-2}^0 f(x)dx$ 의 값은?

(가) $\int_{-2}^4 f(x)dx = 24$

(나) 모든 실수 x 에 대하여 $f(x+2) - f(x) = 4x + 2$

[정적분 / 대칭성]

12. 연속인 두 함수 $f(x)$ 와 $F(x)$ 가 다음 두 조건을 만족한다.

(가) 모든 실수 x 에 대하여 $f(2-x) = 6 - f(x)$ 이다.

(나) $F(x) = \int_0^x f(x-t)dt$

이 때 $F(2)$ 의 값은?

[정적분 / 우함수, 기함수]

13. 두 연속함수 $f(x), g(x)$ 가 모든 실수 x 에 대하여 다음 조건을 만족시킨다.

$$(가) f(-x) = f(x), g(-x) = -g(x)$$

$$(나) f(x+4) = f(x), g(x+2) = g(x)$$

$\int_0^2 f(x)g(x)dx = 5$ 일 때, $\int_{-4}^{10} f(x)g(x)dx$ 의 값을 구하시오.

[정적분으로 정의된 함수]

14. 실수 a ($a > 1$)에 대하여 함수 $f(x)$ 를

$$f(x) = (x+1)(x-1)(x-a)$$

라 하자. 함수

$$g(x) = \int_0^x (x^2 - t^2)f(t)dt$$

가 오직 하나의 극값을 갖도록 하는 a 의 최댓값은?

- ① $\frac{9\sqrt{2}}{8}$ ② $\frac{3\sqrt{6}}{4}$ ③ $\frac{3\sqrt{2}}{2}$
④ $\sqrt{6}$ ⑤ $2\sqrt{2}$

[정적분으로 정의된 함수의 극한]

15. 최고차항의 계수가 양수인 이차함수 $y = f(x)$ 의 그래프가 x 축과 두 점 $(0, 0)$, $(4, 0)$ 에서 만날 때, 함수

$S(x) = \int_1^x f(t)dt$ 의 극댓값과 극솟값을 각각 M , m 이라

하자. $M - m = 32$ 일 때, $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x-1} \int_1^{x^2} f(t)dt$ 의 값을

구하시오.

[절댓값 함수의 정적분]

16. 함수 $f(x) = \int_0^1 t |t-x| dt$ 는 $x = k$ 일 때, 최솟값

m 을 갖는다 $m \times k$ 의 값은?

[이차함수와 접선 사이의 넓이]

17. 이차함수 $f(x) = (x - 1)^2$ 의 그래프 위에 점 $P(a, f(a))$ ($0 \leq a < 1$)가 있다. 이차함수 $y = f(x)$ 의 그래프와 점 P에서의 접선 및 x 축 또는 y 축으로 둘러싸인 도형의 넓이의 최솟값을 S 라 할 때, S 를 구하시오.

[삼차함수 넓이]

18. 곡선 $y = x^3 + x$ 와 이 곡선을 x 축의 방향으로 1만큼, y 축의 방향으로 2만큼 평행이동한 곡선으로 둘러싸인 부분의 넓이를 직선 $y = mx$ 가 이등분할 때, m 의 값은?

[함수와 역함수로 둘러싸인 넓이]

19. 삼차함수 $f(x) = x^3 + \frac{n}{2}x^2 + 2x - 4$ 의 역함수가

존재하도록 하는 자연수 n 의 값이 최대일 때, 곡선 $y = f(x)$ 와 그 역함수 $y = g(x)$ 그래프 및 직선 $y = -x - 4$ 로 둘러싸인 도형의 넓이를 구하시오.

[위치 - 거리의 합과 차]

20. 수직선 위를 움직이는 두 물체 A, B가 있다 동시에 원점을 출발하여 t 초 후의 A, B의 속도가 각각 $3t^2 - 8t + 6$, $4 - 2t$ 로 주어질 때, <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

— < 보 기 > —

- ㄱ. $0 < t < 1$ 일 때 A가 B보다 앞서 있다.
- ㄴ. A, B가 마지막으로 만나는 순간 B는 운동방향을 바꾼다.
- ㄷ. A, B의 거리의 차가 k 인 순간이 두 번 존재하는 양수 k 의 값이 존재한다.

- ① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
- ④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

1. 1

2. $\frac{3\sqrt{3}}{2}$

3. 26

4. $-\frac{1}{4}$

5. $-\frac{1}{4}$

6. 611

7. 480.5π (cm³/초)

8. $\frac{35}{3}$

9. $-x^2 + 2x$

10. $\neg L \square$

11. $\frac{20}{3}$

12. 6

13. 5

14. ④

15. -9

16. $\frac{\sqrt{2}-1}{6}$

17. $\frac{1}{27}$

18. 2

19. $\frac{79}{6}$

20. ③