

강한강서

2020 1학년 2학기 기말대비 자료

일대일 대응이 되기 위한 조건

1. 함수

$$f(x) = \begin{cases} (k-2)(x-k+3)^2 - 2k + 10 & (x \geq 2) \\ (k+1)x - 12 & (x < 2) \end{cases} \text{ 가}$$

일대일대응이 되도록 하는 k 의 값을 구하시오. (단, 공역은 실수전체)

절댓값 기호를 포함한 (유리함수, 무리함수)

2. 함수 $y = \left| 2 - \frac{4}{x} \right|$ 의 그래프와 직선 $y = mx + n$ 이

서로 다른 세 점에서 만나고 그 교점의 x 좌표를 각각

α, β, γ 라 하면 $\alpha : \beta : \gamma = 1 : 2 : 3$ 이 성립한다고 할

때, $\alpha + \beta + \gamma$ 의 값을 구하시오. (단, $0 < \alpha < \beta < \gamma$)

관계식이 주어진 대칭인 함수

3. 함수 f 가 0이 아닌 모든 실수 x 에 대하여

$$\frac{1}{x}f(-x) - f\left(\frac{1}{x}\right) = x \text{를 만족할 때, } f(2) \text{의 값은?}$$

① $\frac{1}{4}$

② $\frac{3}{4}$

③ $\frac{5}{4}$

④ $\frac{7}{4}$

⑤ $\frac{9}{4}$

합성함수와 역함수

4. 두 함수 $f(x)$ 와 $g(x)$ 에 대하여 $h(x)=f(x)+g(x)$ 라 할 때, $h(x)$ 가 다음 두 조건을 만족시킨다.

$$(가) f(h(x))=g(x), g(h(x))=f(x)$$

(나) $h(x)$ 는 일대일 대응이다.

이때, $f(40)+g(20)$ 의 값을 구하는 풀이과정과 답을 쓰시오

역함수 구하기 식

5. 다음은 일대일대응 $y = f(x)$ 의 역함수를 $y = h(x)$ 라 할 때, $y = f\left(\frac{1}{3}x - 1\right)$ 의 역함수를 구하는 과정이다.

$$g(x) = \frac{1}{3}x - 1 \text{ 라 하면}$$

$$y = f\left(\frac{1}{3}x - 1\right) = f(g(x)) = (f \circ g)(x) \text{ 이므로}$$

$$f^{-1}\left(\frac{1}{3}x - 1\right) = (f \circ g)^{-1}(x) \text{ 이다.}$$

$$g^{-1}(x) = (\text{㉠}) \text{ 이므로,}$$

$$y = f\left(\frac{1}{3}x - 1\right) \text{의 역함수는 } (\text{㉡}) \text{ 이다.}$$

㉠과 ㉡에 들어갈 내용은?

- | | ㉠ | ㉡ |
|---|----------|---------------------------|
| ① | $3x + 3$ | $y = 3h(x) + 3$ |
| ② | $3x + 3$ | $y = h(3x + 3)$ |
| ③ | $9x + 9$ | $y = 9h(x) + 9$ |
| ④ | $9x + 9$ | $y = h(9x + 9)$ |
| ⑤ | $x - 3$ | $y = \frac{1}{3}h(x) - 3$ |

함수 완성하기

6. 집합 $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ 에 대하여 함수 $f : X \rightarrow X$ 는 역함수가 존재하는 함수이고 아래 조건을 만족시킨다.

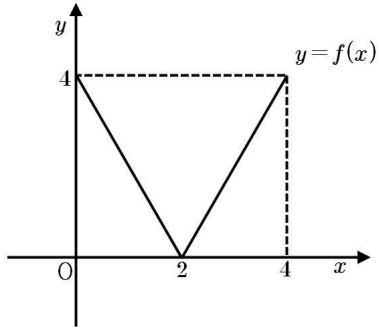
(가) $x = 1, 2, 6$ 일 때, $(f \circ f)(x) + f^{-1}(x) = 2x$
(나) $f(3) + f(5) = 10$

$f(7) = 6$ 일 때, $f(4) \times f(6)$ 의 값을 구하시오.

- ① 20 ② 28 ③ 30
④ 35 ⑤ 42

합성함수를 활용한 방정식의 실근의 개수 구하기 ($f(f(x))=f(x)$)

7. 함수 $f(x) = |2x - 4|$ ($0 \leq x \leq 4$)에 대하여 $(f \circ f)(x) = (f \circ f \circ f)(x)$ 를 만족하는 실수 x 값들의 합은?



- ① 6 ② 8 ③ 10
- ④ 12 ⑤ 14

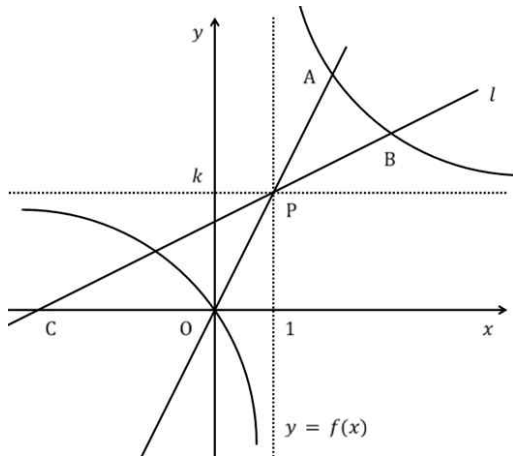
점근선의 교점 대칭성 활용1

8. 유리함수 $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$ 의 그래프가

$y = x - 8$, $y = -x + 15$ 에 대하여 각각 대칭일 때,
 $f(1) + f(2) + f(3) + \cdots + f(22)$ 의 값을 구하시오. (단,
 a, b, c, d 는 상수이며 $ad - bc \neq 0$, $c \neq 0$ 이다.)

접근선의 교점 대칭성 활용2

9. 그림과 같이 함수 $f(x) = \frac{k}{x-1} + k$ ($k > 1$)의 그래프가 있다. 점 $P(1, k)$ 에 대하여 직선 OP 와 함수 $y = f(x)$ 의 그래프가 만나는 점 중에서 원점이 아닌 점을 A 라 하자. 점 P 를 지나고 원점으로부터의 거리가 1인 직선 l 이 함수 $y = f(x)$ 의 그래프와 제1사분면에서 만나는 점을 B , x 축과 만나는 점을 C 라 하자. 삼각형 PBA 의 넓이를 S_1 , 삼각형 PCO 의 넓이를 S_2 라 할 때, $2S_1 = S_2$ 이다. 직선 l 의 방정식이 $ax + by + c = 0$ 일 때, $-\frac{bc}{a^2}$ 의 값은? (단, O 는 원점이고 직선 l 은 좌표축과 평행하지 않다)



- ① - 24 ② - 12 ③ 0
- ④ $6\sqrt{2}$ ⑤ $12\sqrt{2}$

최대, 최소 (산술기하, 면적, 거리)

10. 실수 a 에 대하여 직선 $x = a$ 가 두 함수

$$y = \frac{1}{x-2}, y = -4x \text{의 그래프와 만나는 점을 각각 } P, Q \text{라}$$

하자. 선분 PQ 의 길이는 $a = k$ 일 때, 최솟값 m 을 갖는다. 이때, km 의 값은? (단, $a > 2$ 이다.)

- ① 6 ② 12 ③ 18
④ 24 ⑤ 30

무리함수의 역함수 ($\sqrt{-ax+b}$, $a > 0$)

11. 함수 $f(x) = \sqrt{13-4x}$ 에서 함수 $y = f(x)$ 의
그래프와 그 역함수 $y = f^{-1}(x)$ 의 그래프의 교점이
 (a, b) , (b, a) , (c, c) 이고 이 교점들과 점
 $(-1, -3)$ 사이의 거리를 d 라고 하자. 이때, d^2 의 최댓값과
최솟값의 합은? (a, b, c 는 상수이고 $a \neq b$ 이다.)

- ① 72 ② 74 ③ 76
④ 78 ⑤ 80

무리함수와 직선의 위치관계

12. 함수

$g(x) = 1 + 2\sqrt{-x-2}$ ($-27 \leq x \leq -2$)의 그래프위의

임의의 두 점 $P(a, b)$, $Q(c, d)$ 에 대하여 $\frac{b+d}{a+c}$ 의 최댓값을

M , 최솟값은 m 이라 할 때, $M-m$ 의 값은?

① $\frac{17}{25}$

② $\frac{16}{27}$

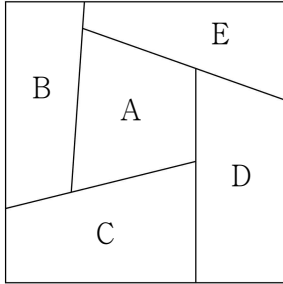
③ $\frac{14}{25}$

④ $\frac{11}{25}$

⑤ $\frac{10}{27}$

색칠하기

13. 다음 그림과 같이 5개의 영역 A, B, C, D, E에 서로 다른 5가지 색을 사용하여 칠하려고 한다. 같은 색을 중복하여 사용해도 좋으나 이웃하는 영역은 같은 색을 칠할 수 없다고 할 때, 칠하는 방법의 수는?



- ① 360 ② 378 ③ 400
④ 420 ⑤ 450

오름차순, 내림차순

14. 5개의 숫자 0, 1, 2, 3, 4에서 각 자리의 숫자가
많아야 한 번 사용하여 자연수를 만들려고 한다. 만들 수 있는
수를 작은 수부터 차례로 나열할 때, 다음 물음에 답하시오.

(1) 만들 수 있는 자연수의 개수를 구하시오.

(2) 136번째 수를 구하시오.

(3) 413는 몇 번째 나열된 수인지 구하시오.

경우 나누기

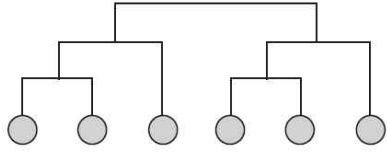
15. 다음 조건을 만족하는 $a_1, a_2, a_3, \dots, a_9$ 에 대하여 $a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_9$ 의 값이 최대가 되는 모든 순서쌍 $(a_1, a_2, a_3, \dots, a_9)$ 의 개수는?

(가) $a_i \in \{-2, -1, 0, 1, 2\}$ (단,
 $i = 1, 2, 3, \dots, 9$)
(나) $a_2 + a_3 + a_5 + a_6 = 0$
(다) $a_4 + a_5 + a_7 + a_8 = 0$

- ① 180 ② 196 ③ 225
④ 256 ⑤ 284

분할, 분배

16. 6명의 학생이 아래의 대진표에 따라 게임을 할 때, 대진표를 작성하는 방법의 수는?



- ① 60
- ② 70
- ③ 80
- ④ 90
- ⑤ 100

함수의 개수 조건에 맞게

17. 집합 $X = \{-3, -2, -1, 1, 2, 3\}$ 에 대하여 X 에서 X 로의 함수 $f(x)$ 는 다음 조건을 만족시킨다.

- (가) X 의 모든 원소 x 에 대하여
 $|f(x) + f(-x)| = 1$ 이다.
(나) $x > 0$ 이면 $f(x) > 0$ 이다.

함수 $f(x)$ 의 개수는?

- ① 16 ② 32 ③ 64
④ 128 ⑤ 256

함수의 개수 $f(f(f(x)))=x$

18. $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ 일 때, 함수 $f: A \rightarrow A$ 중 $f(\alpha) \neq \alpha$ 인 α 가 존재하고, $f(f(f(x)))=x$ 인 것의 개수는?

- ① 80 ② 90 ③ 100
④ 110 ⑤ 120

함수의 개수 $f(f(x))=f(x)$

19. 다음 조건을 만족하는 집합

$X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ 에서 X 로의 함수 f 의 개수는?

(가) $f \circ f = f$

(나) 함수 f 의 치역은 집합 $\{1, 3, 4, 6\}$ 을 포함한다.

(다) 집합 X 의 임의의 두 원소 a, b 에 대하여 $a < b$ 이면 $f(a) \leq f(b)$ 이다.

① 36

② 45

③ 48

④ 54

⑤ 63

이웃하게 세우는

20. 그림과 같이 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10의 숫자가 하나씩 적혀있는 10장의 카드가 있다.

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10

두 학생은 각자의 요구사항을 동시에 충족하여 10장의 카드를 일렬로 나열하려고 한다.

동민 “홀수와 짝수는 교대로 나열해야 해”

민영 “5, 6, 7 세 숫자는 이웃해서 나열해야 해”

동민이와 민영이가 말한 위의 두 조건을 모두 만족하도록 10장의 카드를 일렬로 나열하는 경우의 수는?

- ① 576 ② 1152 ③ 1728
④ 2304 ⑤ 2880

이웃하지 않게

21. 서로 다른 축구공 3개와 서로 다른 농구공 5개가 있다.
이 8개의 공을 상자에 넣고 다음 조건을 만족하면서 1개씩 꺼내기로 하였다.

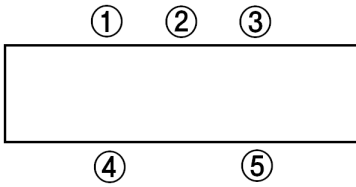
- (가) 축구공은 연속하여 꺼낼 수 없다.
- (나) 농구공은 2개까지 연속하여 꺼낼 수 있다.

8개의 공을 상자에서 모두 꺼내는 방법의 수는?

- ① 720 ② 1200 ③ 2160
- ④ 4320 ⑤ 7200

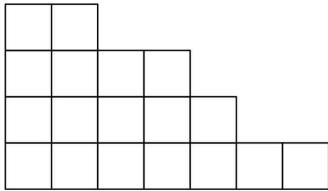
교란

22. 아래 그림 같이 5명이 앉을 수 있는 테이블이 4명이 모여 1차 회의를 하였다. 잠시 밖에서 쉬었다가 다시 모여 2차 회의를 시작할 때, 적어도 한 사람이 1차 회의 때 자기가 앉은 자리에 앉을 수 있는 경우의 수를 구하여라.



평행사변형의 개수

23. 다음 그림의 도형은 합동인 정사각형 18개를 이어 붙여 만든 것이다. 이 도형에서 찾을 수 있는 사각형 중에서 정사각형이 아닌 직사각형의 개수는?



- ① 72 ② 74 ③ 76
- ④ 78 ⑤ 80

정답

22. 67

23. ①

1. $k=5$

2. 10

3. ④

4. 30

5. ①

6. ①

7. ⑤

8. 77

9. ④

10. ⑤

11. ①

12. ②

13. ④

14. (1) 260 (2) 3402 (3) 62

15. ③

16. ④

17. ③

18. ①

19. ②

20. ④

21. ⑤