2020

수학 2 내신대비 심화

백 인 대 장

수학2

함수의 극한

100人대장
'Quality Education Creation'

– 백인대장 –

유형 1. 함수의 극한 계산

1. 극한값이 존재하지 <u>않는</u> 것을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은? (단, $[x]$ 는 x보다 크지 않은 최대 정수이다.)

〈 보 기 〉

ㄱ. $\lim_{x \to 3} \frac{x^2-9}{x-3}$　　ㄴ. $\lim_{x \to 4} \frac{\sqrt{x}+2}{x-4}$

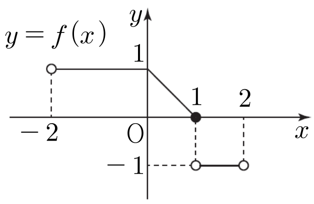
ㄷ. $\lim_{x \to 1} \frac{x^2-1}{|x-1|}$　　ㄹ. $\lim_{x \to -3} ([x]+1)$

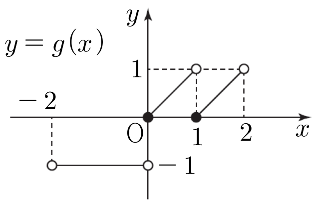
① ㄱ, ㄴ　② ㄱ, ㄷ　③ ㄴ, ㄹ
④ ㄱ, ㄴ, ㄹ　⑤ ㄴ, ㄷ, ㄹ

2. $\lim_{x \to -\infty} x\left\{\sqrt{x^2+4x+10}-(ax+b)\right\}=c$를 만족하는 상수 $a,\ b,\ c$의 값을 구하시오.

유형 2. 함수의 극한(그래프)

3. $-2<x<2$에서 정의된 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프가 아래 그림과 같을 때, 극한값이 존재하는 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은?





< 보 기 >

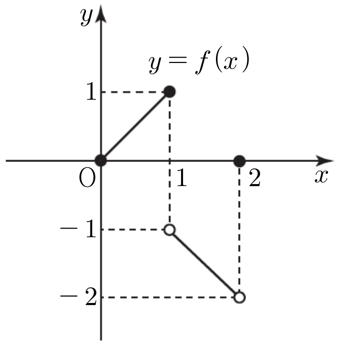
ㄱ. $\lim_{x\to 1} f(x)g(x)$

ㄴ. $\lim_{x\to 1}\{f(x)+g(x)\}$

ㄷ. $\lim_{x\to 1}\left[\{f(x)\}^2+\{g(x)\}^2\right]$

① ㄱ　② ㄴ　③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ　⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

4. 정의역이 $\{x\,|\,-2\le x\le 2\}$인 함수 $y=f(x)$의 그래프가 구간 $[0,\ 2]$에서 그림과 같다. $-2\le x\le -1$일 때, $f(-x)=-f(x)$, $-1<x<0$일 때, $f(-x)=f(x)$이다. $\lim_{x\to -1+} f(x)+\lim_{x\to -2+} f(x)+f(-1)$의 값은?



① 1　② 2　③ 3
④ 4　⑤ 5

유형 3. 함수의 극한 참 · 거짓 판단 문제

5. 두 함수 $f(x)$, $g(x)$에 대하여 <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? (단, a는 상수이다.)

〈 보 기 〉

ㄱ. $\lim_{x\to a}\{f(x)+g(x)\}$와 $\lim_{x\to a}\{f(x)-g(x)\}$가 존재하면 $\lim_{x\to a}\{f(x)g(x)\}$가 존재한다.

ㄴ. $\lim_{x\to a}f(x)$와 $\lim_{x\to a}g(x)$가 모두 존재하지 않으면 $\lim_{x\to a}\{f(x)g(x)\}$도 존재하지 않는다.

ㄷ. $\lim_{x\to a}\{f(x)+g(x)\}$와 $\lim_{x\to a}\{f(x)g(x)\}$가 존재하면 $\lim_{x\to a}\{f(x)-g(x)\}$가 존재한다.

① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

6. 실수 전체의 집합에서 정의된 세 함수 $f(x)$, $g(x)$, $h(x)$에 대하여 <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

〈 보 기 〉

ㄱ. $\lim_{x\to 0}f(x)=0$이면 $\lim_{x\to 0}|f(x)|=0$이다.

ㄴ. $\lim_{x\to\infty}f\left(1+\frac{1}{x}\right)=0$이면 $\lim_{x\to 1}f(x)=0$이다.

ㄷ. 모든 실수 x에 대하여 $f(x)<g(x)<h(x)$이고 $\lim_{x\to\infty}\{h(x)-f(x)\}=0$이면 $\lim_{x\to\infty}g(x)$의 값이 존재한다.

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

유형 4. 다항함수의 극한 1(인수와 관련된 문제)

7. 최고차항의 계수가 1인 이차함수 $f(x)$가

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)-(x-a)}{f(x)+(x-a)} = \frac{3}{5}$$

을 만족시킨다. 방정식 $f(x)=0$의 두 근을 α, β라 할 때
$|\alpha-\beta|$의 값은? (단, a는 상수이다.)

① 1　② 2　③ 3
④ 4　⑤ 5

8. 최고차항의 계수가 1인 두 삼차함수 $f(x)$, $g(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $g(4)=0$ (나) $\lim_{x \to n} \frac{f(x)}{g(x)} = (n-3)(n-4)$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ 4)$

$g(5)$의 값을 구하시오.

유형 5. 다항함수의 극한 2 (차수와 관련된 문제)

9. 다항함수 $f(x)$가

$$\lim_{x\to 0+}\frac{x^3 f\left(\frac{1}{x}\right)-1}{x^3+x}=5,\ \lim_{x\to 1}\frac{f(x)}{x^2+x-2}=\frac{1}{3}$$

을 만족할 때, $f(2)$의 값을 구하시오.

10. 다항함수 $f(x)$가 $\lim_{x\to 0+}\frac{(x^3-2x^2)f\left(\frac{1}{x}\right)-2}{2x^2-x}=3$

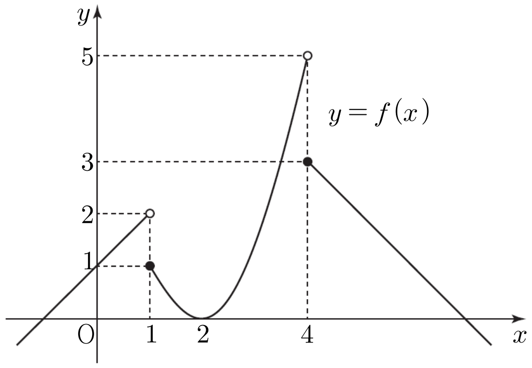
을 만족시키고 $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-2}{x}=\alpha$일 때, 상수 α의 값은?

① $-\frac{7}{2}$　② -2　③ 1

④ $\frac{3}{2}$　⑤ $\frac{5}{2}$

유형 6. 합성함수의 극한

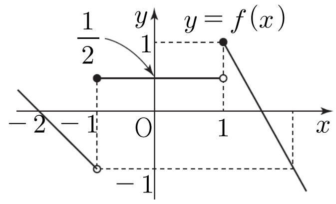
11. 실수 전체의 집합에서 정의된 함수 $y=f(x)$의 그래프가 그림과 같다.

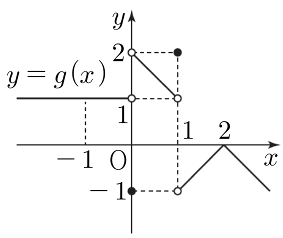


$\lim_{t\to-\infty} f\left(\frac{t+2}{t-1}\right)+\lim_{t\to\infty} f\left(\frac{4t-1}{t-1}\right)$의 값은?

① 4 ② 5 ③ 6
④ 7 ⑤ 8

12. 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프가 그림과 같을 때, <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?





〈 보 기 〉

ㄱ. $\lim_{x\to1} f(g(x))=\frac{1}{2}$

ㄴ. $\lim_{x\to1+} \{f(-x)+g(1-x)\}=0$

ㄷ. $\lim_{x\to0-} f(f(x))=\frac{1}{2}$

ㄹ. $\lim_{x\to-1} g(f(x))=\frac{3}{2}$

① ㄱ ② ㄱ, ㄹ ③ ㄴ, ㄷ
④ ㄱ, ㄴ, ㄷ ⑤ ㄴ, ㄷ, ㄹ

유형 7. 특수한 함수와 극한

13. 다음의 조건을 이용하여
$\lim_{x\to\infty} \frac{2}{x^2+2}\left[\frac{3x^2+2x+4}{5}\right]$의 값을 구하시오.

(가) 함수 $h(x)$에 대하여 $f(x) \le h(x) \le g(x)$이고 $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = \alpha$이면 $\lim_{x\to a} h(x) = \alpha$
(나) 정수 n에 대하여 $[x] = n$ (단, $[x]$ 는 x를 넘지 않는 최대 정수) $\Leftrightarrow$ $n \le x < n+1$

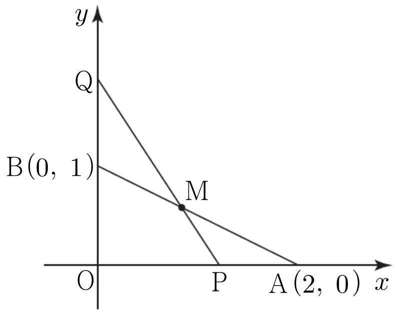
14. 다음 극한값을 구하시오. (단, $[x]$는 x보다 크지 않은 최대의 정수이다.)

$$\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{[x^2+x]}-x\right)$$

15. 어떤 자연수 n에 대하여 $\lim_{x\to n}\frac{[x]^2+4x}{[x^2]} = k$일 때, $n+k$의 값을 구하시오.
(단, $[x]$ 는 x보다 크지 않은 최대의 정수이다.)

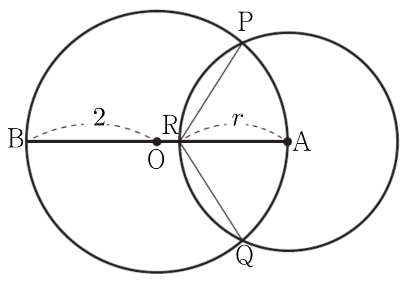
유형 8. 함수의 극한 활용

16. 그림과 같이 좌표평면 위에 두 점 $\mathrm{A}(2,\ 0)$, $\mathrm{B}(0,\ 1)$에 대하여 선분 OA 위에 점 P와 선분 OB의 연장선 위에 점 Q가 있다. 두 선분 AB, PQ의 교점을 M이라 하자. 점 P, Q가 $\overline{\mathrm{PA}}=\overline{\mathrm{BQ}}$인 관계를 유지하면서 각각 A, B에 가까워지면 두 선분의 교점 M은 점 $(\alpha,\ \beta)$에 한없이 가까워질 때, $\alpha+\beta$의 값은?



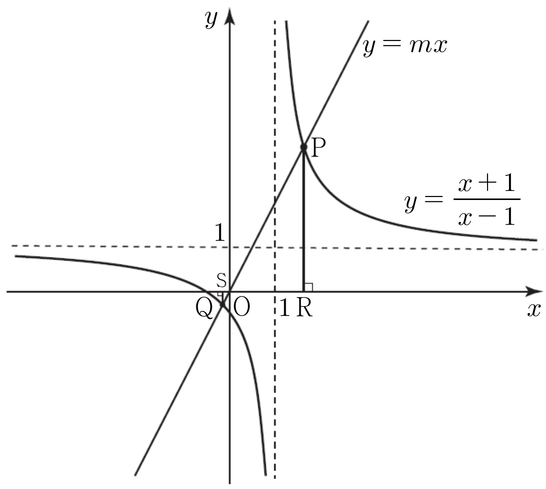
① $\frac{4}{3}$ ② $\frac{3}{2}$ ③ $\frac{5}{3}$
④ $\frac{11}{6}$ ⑤ 2

17. 그림과 같이 반지름의 길이가 2인 원 O 위에 한 점 A가 있다. 점 A를 중심으로 하고 반지름의 길이가 r인 원이 원 O와 만나는 점을 각각 P, Q라 하고, 원 O의 지름 AB와 만나는 점을 R라 하자. 사각형 APRQ의 넓이를 $S(r)$라 할 때, $\lim_{r\to 4-}\frac{S(r)}{\sqrt{8-2r}}$의 값을 구하시오.
(단, $0<r<4$)



1등급 Challenge

18. 그림과 같이 직선 $y=mx\ (m>0)$이 곡선 $y=\dfrac{x+1}{x-1}$과 제1사분면에서 만나는 점을 P, 제3사분면에서 만나는 점을 Q라 하고, 두 점 P, Q에서 x축에 내린 수선의 발을 각각 R, S라고 하자. 두 삼각형 OPR, OQS의 넓이를 각각 $f(m)$, $g(m)$이라고 할 때, $\lim\limits_{m\to\infty}\dfrac{mf(m)g(m)}{3(f(m)-g(m))}$의 값은? (단, O는 원점이다.)



① $\dfrac{1}{13}$　　② $\dfrac{1}{6}$　　③ 1

④ $\dfrac{3}{2}$　　⑤ 2

19. 최고차항의 계수가 1인 두 삼차함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프는 점 $(2,\ 2)$에서 서로 만나고, 다음 조건을 모두 만족시킨다. $f(4)g(4)$의 값을 구하시오.

(가) $\lim_{x\to 0}\dfrac{f(x+3)g(x+3)-9}{x}=-12$

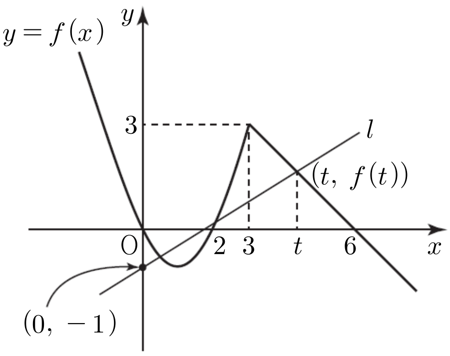
(나) $\lim_{x\to 3}\dfrac{x-3}{f(x)+g(x)-6}=-\dfrac{1}{4}$

(다) $\lim_{x\to 0+}x^2\left\{f\left(\dfrac{1}{x}\right)-g\left(\dfrac{1}{x}\right)\right\}=2$

20. 그림과 같이 함수

$$f(x)=\begin{cases}x^2-2x & (x\leq 3)\\ -x+6 & (x>3)\end{cases}$$

과 임의의 실수 t에 대하여 두 점 $(0,\ -1)$, $(t,\ f(t))$를 지나는 직선 l이 함수 $y=f(x)$의 그래프와 만나는 점의 개수를 $g(t)$라 하자. 예를 들어, 두 점 $(0,\ -1)$, $(0,\ f(0))$을 지나는 직선이 함수 $y=f(x)$의 그래프와 만나는 점의 개수가 1이므로 $g(0)=1$이다. $\lim_{t\to a-}g(t)\neq\lim_{t\to a+}g(t)$를 만족시키는 서로 다른 실수 a의 값은 $a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_n$의 n개다. $a_1+a_2+\cdots+a_n$의 값을 구하시오.



정답 및 해설

1) ⑤

ㄱ. $\lim_{x\to3}\frac{x^2-9}{x-3}=\lim_{x\to3}(x+3)=6$

ㄴ. 분모는 0으로 수렴하고 분자는 4로 수렴하므로
극한값이 존재할 수 없다.

ㄷ. $\lim_{x\to1+}\frac{x^2-1}{|x-1|}=\lim_{x\to1+}\frac{x^2-1}{x-1}=2$

$\lim_{x\to1-}\frac{x^2-1}{|x-1|}=\lim_{x\to1-}\frac{x^2-1}{1-x}=-\lim_{x\to1-}(x+1)=-2$

이므로 좌극한값과 우극한값이 달라 극한값이 존재하지 않는다.

ㄹ. $\lim_{x\to-3+}([x]+1)=-2,\ \lim_{x\to-3-}([x]+1)=-3$이므로
좌극한값과 우극한값이 달라 극한값이 존재하지 않는다.

2) $a=-1,\ b=-2,\ c=-3$

3) ③

ㄱ. $\lim_{x\to1+}f(x)g(x)=0,\ \lim_{x\to1-}f(x)g(x)=0$이므로
$\lim_{x\to1}f(x)g(x)$의 극한값이 존재한다.

ㄴ. $\lim_{x\to1+}\{f(x)+g(x)\}=-1,\ \lim_{x\to1-}\{f(x)+g(x)\}=1$이므로
$\lim_{x\to1}\{f(x)g(x)\}$의 극한값은 존재하지 않는다.

ㄷ. $\lim_{x\to1+}[\{f(x)\}^2+\{g(x)\}^2]=1$

$\lim_{x\to1-}[\{f(x)\}^2+\{g(x)\}^2]=1$이므로

$\lim_{x\to1}[\{f(x)\}^2+\{g(x)\}^2]$의 극한값이 존재한다.

4) ②

$t=-x$로 치환하면 $\lim_{x\to-1+}f(x)=\lim_{t\to1-}f(-t)=\lim_{t\to1-}f(t)=1$

마찬가지로 $\lim_{x\to-2+}f(x)=\lim_{t\to2-}f(-t)=-\lim_{t\to2-}f(t)=2$

$f(-1)=-f(1)=-1$

따라서 구하고자 하는 값은 $1+2-1=2$

5) ①

6) ①

ㄱ. $\lim_{x\to0}f(x)=0$이면 $\lim_{x\to0}|f(x)|=0$이다. (참)

ㄴ. $1+\frac{1}{x}=t$라 치환하면 $\lim_{x\to\infty}f\left(1+\frac{1}{x}\right)=\lim_{t\to1+}f(t)=0,$

$\lim_{x\to1-}f(x)$는 알 수 없다. (거짓)

ㄷ. (반례) $f(x)=x,\ g(x)=x+\frac{1}{x},\ h(x)=x+\frac{2}{x}$이면

$\lim_{x\to\infty}\{h(x)-f(x)\}=0$이나 $\lim_{x\to\infty}g(x)=\infty$ (거짓)

7) ④

$\lim_{x\to a}f(x)\neq0$이면

$\lim_{x\to a}\frac{f(x)-(x-a)}{f(x)+(x-a)}=1\neq\frac{3}{5}$이므로

$\lim_{x\to a}f(x)=f(a)=0$

따라서, $a=\alpha$라 하면

$f(x)=(x-\alpha)(x-\beta)$이므로

$\lim_{x\to a}\frac{f(x)-(x-a)}{f(x)+(x-a)}$

$=\lim_{x\to\alpha}\frac{(x-\alpha)(x-\beta)-(x-\alpha)}{(x-\alpha)(x-\beta)+(x-\alpha)}$

$=\lim_{x\to\alpha}\frac{(x-\beta)-1}{(x-\beta)+1}$

$=\frac{\alpha-\beta-1}{\alpha-\beta+1}=\frac{3}{5}$

즉, $5(\alpha-\beta)-5=3(\alpha-\beta)+3$

$2(\alpha-\beta)=8$이므로 $|\alpha-\beta|=4$

8) 13

$g(4)=0$이므로 $g(x)$는 $x-4$를 인수로 갖는다.

$\lim_{x\to4}\frac{f(x)}{g(x)}=0$에서 $f(x)$는 $(x-4)^2$을 인수로 가짐을 알 수 있다.

$\lim_{x\to3}\frac{f(x)}{g(x)}=0$에서 $f(x)$가 $x-3$을 인수로 가짐을 알 수 있다.

$\therefore f(x)=(x-3)(x-4)^2$

$g(x)=(x-4)(x^2+ax+b)$라 하자.

$\lim_{x\to1}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to1}\frac{(x-4)(x-3)}{x^2+ax+b}=6$

$a+b+1=1,\ a+b=0$

$\lim_{x\to2}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to2}\frac{(x-4)(x-3)}{x^2+ax+b}=2$

$2a+b=-3$

$\therefore a=-3,\ b=3$

$g(x)=(x-4)(x^2-3x+3)$

$\therefore g(5)=13$

9) 10

$\frac{1}{x}=t$로 치환하면 $x\to0+$일 때, $t\to\infty$

따라서

$$\lim_{x\to0+}\frac{x^3f\left(\frac{1}{x}\right)-1}{x^3+x}=5$$

$$\lim_{t\to\infty}\frac{\frac{1}{t^3}f(t)-1}{\frac{1}{t^3}+\frac{1}{t}}=5$$

$$\lim_{t\to\infty}\frac{f(t)-t^3}{1+t^2}=5$$

이때, $f(x)$가 다항함수이고 $\frac{\infty}{\infty}$ 꼴이 수렴하므로 분자와 분모의

최고차항이 같아야 한다.

곧, $f(x)=x^3+5x^2+ax+b$ ……㉠

$$\lim_{x\to 1}\frac{f(x)}{x^2+x-2}=\frac{1}{3}$$

㉠을 위 식에 대입하면

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^3+5x^2+ax+b}{(x-1)(x+2)}=\frac{1}{3} \quad \cdots\cdots㉡$$

이때, $x\to 1$일 때 분모 $\to 0$

㉡이 수렴하므로 분자 $\to 0$

즉, $1+5+a+b=0$

$a+b=-6$ ……㉢

$b=-a-6$이므로 이를 ㉡에 대입하면

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^3+5x^2+ax-a-6}{(x-1)(x+2)}=\frac{1}{3}$$

$$\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x^2+6x+6)+a(x-1)}{(x-1)(x+2)}=\frac{1}{3}$$

$$\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x^2+6x+6+a)}{(x-1)(x+2)}=\frac{1}{3}$$

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2+6x+6+a}{x+2}=\frac{1}{3}$$

$$\frac{1+6+6+a}{1+2}=\frac{1}{3}$$

$\therefore\ a=-12$ ……㉣

㉣을 ㉢에 대입하면 $b=6$

따라서 $f(x)=x^3+5x^2-12x+6$

$\therefore\ f(2)=10$

10) ③

$\frac{1}{x}=t$로 치환하면

$$\lim_{x\to 0+}\frac{(x^3-2x^2)f\left(\frac{1}{x}\right)-2}{2x^2-x}=\lim_{t\to\infty}\frac{\left(\frac{1}{t^3}-\frac{2}{t^2}\right)f(t)-2}{\frac{2}{t^2}-\frac{1}{t}}$$

$$=\lim_{t\to\infty}\frac{(1-2t)f(t)-2t^3}{2t-t^2}=3$$

$\therefore (1-2t)f(t)=2t^3-3t^2+at+b$라 할 수 있다.

양변에 $t=\frac{1}{2}$을 대입하면 $-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}a+b=0$ …… ①

$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-2}{x}$의 값이 존재하고 분모가 0으로 수렴하므로 분자도 0으로 수렴한다.

$\therefore \lim_{x\to 0}f(x)=f(0)=2$

위 등식에 $t=0$을 대입하면 $f(0)=b=2$ …… ②

①, ②에 의해 $(1-2t)f(t)=2t^3-3t^2-3t+2$

$\therefore f(t)=-t^2+t+2$

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-2}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{-x^2+x}{x}=1$$

$\therefore \alpha=1$

11) ②

$$\lim_{t\to -\infty}f\left(\frac{t+2}{t-1}\right)=\lim_{t\to -\infty}f\left(1+\frac{3}{t-1}\right)=\lim_{x\to 0-}f(1+x)=2$$

$$\lim_{t\to \infty}f\left(\frac{4t-1}{t-1}\right)=\lim_{t\to \infty}f\left(4+\frac{3}{t-1}\right)=\lim_{x\to 0+}f(4+x)=3$$

따라서 구하고자 하는 값은 $2+3=5$

12) ③

ㄱ. $\lim_{x\to 1+}f(g(x))=\lim_{x\to -1+}f(x)=\frac{1}{2}$

$\lim_{x\to 1-}f(g(x))=\lim_{x\to 1+}f(x)=1$

따라서 $\lim_{x\to 1}f(g(x))$의 값은 존재하지 않는다.

ㄴ. $\lim_{x\to 1+}\{f(-x)+g(1-x)\}=\lim_{x\to -1-}f(x)+\lim_{x\to 0-}g(x)=0$

ㄷ. $\lim_{x\to 0-}f(f(x))=f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}$

ㄹ. $\lim_{x\to 1+}f(g(x))=\lim_{x\to -1+}f(x)=\frac{1}{2}$

$\lim_{x\to -1+}g(f(x))=g\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{3}{2}$

이므로 $\lim_{x\to -1}g(f(x))$의 값은 존재하지 않는다.

13) $\frac{6}{5}$

$$\frac{3x^2+2x+4}{5}=\left[\frac{3x^2+2x+4}{5}\right]+\alpha\ (0\le\alpha<1)$$

$$\left[\frac{3x^2+2x+4}{5}\right]=\frac{3x^2+2x+4}{5}-\alpha$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2}{x^2+2}\left(\frac{3x^2+2x+4}{5}-\alpha\right)$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{2(3x^2+2x+4)}{5(x^2+2)}-\lim_{x\to\infty}\frac{2\alpha}{x^2+2}=\frac{6}{5}$$

14) $\frac{1}{2}$

15) 5

$$\lim_{x\to n+}\frac{[x]^2+4x}{[x^2]}=\frac{n^2+4n}{n^2}$$

$$\lim_{x\to n-}\frac{[x]^2+4x}{[x^2]}=\frac{(n-1)^2+4n}{n^2-1}$$

$\lim_{x\to n}\frac{[x]^2+4x}{[x^2]}$이 수렴하므로

$$\frac{n^2+4n}{n^2}=\frac{n^2+2n+1}{n^2-1},\ \frac{n+4}{n}=\frac{n+1}{n-1}$$

$n^2+3n-4=n^2+n,\ 2n=4,\ n=2$

$$k=\frac{n^2+4n}{n^2}=3$$

$\therefore n+k=5$

16) ③

$\overline{PA}=\overline{BQ}=t$라 두면 $P(2-t,\ 0)$, $Q(0,\ 1+t)$

또한 M은 $y=-\frac{1}{2}x+1$ 위의 점이므로

$M\left(\alpha,\ -\frac{1}{2}\alpha+1\right)$

그런데 $P(2-t,\ 0)$, $Q(0,\ 1+t)$, $M\left(\alpha,\ -\frac{1}{2}\alpha+1\right)$이

한 직선 위에 있으므로

$\frac{1+t}{t-2}=\frac{-\frac{1}{2}\alpha-t}{\alpha}=-\frac{1}{2}-\frac{t}{\alpha}$

$\frac{t}{\alpha}=-\frac{1}{2}-\frac{1+t}{t-2}=-\frac{3t}{2(t-2)}$에서 $\alpha=\frac{2(2-t)}{3}$

$\lim_{t\to0}\alpha=\frac{4}{3}$이므로 점 M은 $\left(\frac{4}{3},\ \frac{1}{3}\right)$로 가까워진다.

$\therefore\ \alpha+\beta=\frac{5}{3}$

17) 8

선분 $\overline{BP}$, $\overline{AP}$를 연결하면 $\angle BPA=90°$이다.

$\therefore\ \overline{BP}=\sqrt{16-r^2}$, $\overline{AP}=r$

P에서 $\overline{AB}$에 내린 수선의 발을 H라 하면

$\triangle ABP$의 넓이는 $\frac{1}{2}\cdot r\sqrt{16-r^2}=\frac{1}{2}\cdot 4\cdot\overline{PH}$

$\therefore\ \overline{PH}=\frac{r\sqrt{16-r^2}}{4}$

$S(r)=\frac{1}{2}\cdot r^2\cdot\frac{\sqrt{16-r^2}}{4}\times 2$

$\therefore\ \lim_{r\to4-}\frac{\frac{1}{4}r^2\sqrt{16-r^2}}{\sqrt{2}\sqrt{4-r}}=8$

18) ②

P의 좌표를 $(\alpha,\ m\alpha)$, Q의 좌표를 $(\beta,\ m\beta)$라 두면

$y=mx$와 $y=\frac{x+1}{x-1}$의 교점의 x좌표는 α와 β이다.

즉, 방정식 $mx=\frac{x+1}{x-1}\ \rightarrow\ mx^2-(m+1)x-1=0$의 두 근이

α와 β이므로

$\alpha+\beta=\frac{m+1}{m}$, $\alpha\beta=-\frac{1}{m}$, $\alpha-\beta=\frac{\sqrt{(m+1)^2+4m}}{m}$

한편, $f(m)=\frac{1}{2}\times\alpha\times m\alpha=\frac{m}{2}\alpha^2$

$g(m)=\frac{1}{2}\times\beta\times m\beta=\frac{m}{2}\beta^2$이므로

$$\lim_{m\to\infty}\frac{m\cdot\frac{m}{2}\alpha^2\cdot\frac{m}{2}\beta^2}{3\left(\frac{m}{2}\alpha^2-\frac{m}{2}\beta^2\right)}=\lim_{m\to\infty}\frac{\frac{m^2}{4}(\alpha\beta)^2}{\frac{3}{2}(\alpha+\beta)(\alpha-\beta)}$$

$$=\lim_{m\to\infty}\frac{\frac{m^2}{4}\times\frac{1}{m^2}}{\frac{3}{2}\times\frac{m+1}{m}\times\frac{\sqrt{m^2+6m+1}}{m}}=\frac{1}{6}$$

19) -4

$f(3)g(3)=9$

$f(3)+g(3)=6$

$\therefore\ f(3)=g(3)=3$

$f(2)=g(2)=2$

$f(x)=(x-a)(x-3)(x-2)+x$

$g(x)=(x-b)(x-3)(x-2)+x$

$\lim_{x\to3}\frac{1}{(x-a)(x-2)+(x-b)(x-3)+2}=-\frac{1}{4}$

$a+b=12$

$\lim_{t\to\infty}\frac{f(t)-g(t)}{t^2}=2$

$f(t)-g(t)=2t^2+\cdots$

$b-a=2$

$a=5,\ b=7$

$f(4)=(-1)(1)(2)+4=-2+4=2$

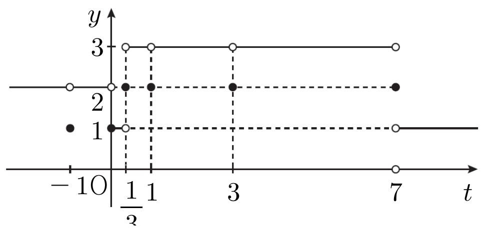
$g(4)=(-3)(1)(2)+4=-6+4=-2$

$f(4)g(4)=-4$

20) $\mathbf{\frac{22}{3}}$

$g(t)$를 구하고 그래프를 그리면 다음과 같다.

$$g(t)=\begin{cases}2 & (t<-1)\\ 1 & (t=-1)\\ 2 & (-1<t<0)\\ 1 & \left(0\leq t<\frac{1}{3}\right)\\ 2 & \left(t=\frac{1}{3}\right)\\ 3 & \left(\frac{1}{3}<t<1\right)\\ 2 & (t=1)\\ 3 & (1<t<3)\\ 2 & (t=3)\\ 3 & (3<t<7)\\ 2 & (t=7)\\ 1 & (t>7)\end{cases}$$



따라서 n은 좌극한, 우극한이 다른 점의 개수이므로 3개이고

$a_1+a_2+a_3=0+\frac{1}{3}+7=\frac{22}{3}$