백 인 대 장

수2 기본

함수의 극한 / 연속

#1 우극한과 좌극한

(1) 함수 $f(x)$에서 x의 값이 a보다 크면서 a에 한없이 가까워질 때, $f(x)$의 값이 일정한 값 L에 한없이 가까워지면 L을 함수 $f(x)$의 $x=a$에서의 우극한이라고 하며, 이것을 기호로 다음과 같이 나타낸다.

$$\lim_{x \to a+} f(x) = L \text{ 또는 } x \to a+\text{일 때 } f(x) \to L$$

(2) 함수 $f(x)$에서 x의 값이 a보다 작으면서 a에 한없이 가까워질 때, $f(x)$의 값이 일정한 값 M에 한없이 가까워지면 M을 함수 $f(x)$의 $x=a$에서의 좌극한이라고 하며, 이것을 기호로 다음과 같이 나타낸다.

$$\lim_{x \to a-} f(x) = M \text{ 또는 } x \to a-\text{일 때 } f(x) \to M$$

#2 극한값 존재조건

함수 $f(x)$의 $x=a$에서의 극한값이 L이면 $x=a$에서의 우극한과 좌극한이 모두 존재하고 그 값은 모두 L과 같다. 또 그 역도 성립하므로 다음이 성립한다.

$$\lim_{x \to a} f(x) = L \Leftrightarrow \lim_{x \to a+} f(x) = \lim_{x \to a-} f(x) = L$$

#1

01

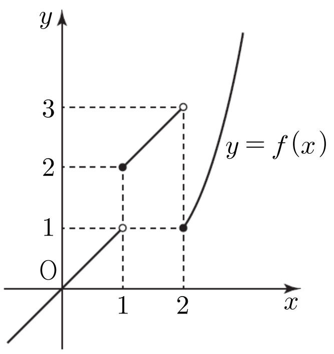
함수 $f(x)=\dfrac{|x-2|}{x-2}$ 에 대하여

$$\lim_{x\to 2+} f(x)=a,\ \lim_{x\to 2-} f(x)=b$$

라 할 때, 실수 a, b 에 대하여 $a-b$ 의 값을 구하시오.

02

함수 $y=f(x)$의 그래프가 그림과 같다.



$\lim_{x\to 1-} f(x)+\lim_{x\to 2+} f(x)$의 값은?

① 2　② 3　③ 4　④ 5　⑤ 6

#2

03

함수 $f(x)=\begin{cases} x-2 & (x\ge -1) \\ 2x^2-ax+b & (x<-1) \end{cases}$ 에 대하여

$\lim_{x\to -1} f(x)$의 값이 존재할 때, $a+b$의 값을 구하시오.

(단, a, b는 상수이다.)

#3 함수의 극한에 대한 성질

두 함수 $f(x)$, $g(x)$에 대하여 $\lim_{x\to a}f(x)=\alpha$, $\lim_{x\to a}g(x)=\beta$ (α, β는 실수)일 때

(1) $\lim_{x\to a}cf(x)=c\lim_{x\to a}f(x)=c\alpha$(단, c는 상수)

(2) $\lim_{x\to a}\{f(x)+g(x)\}=\lim_{x\to a}f(x)+\lim_{x\to a}g(x)=\alpha+\beta$

(3) $\lim_{x\to a}\{f(x)+g(x)\}=\lim_{x\to a}f(x)+\lim_{x\to a}g(x)=\alpha+\beta$

(4) $\lim_{x\to a}f(x)g(x)=\lim_{x\to a}f(x)\times\lim_{x\to a}g(x)=\alpha\beta$

(5) $\lim_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{\lim_{x\to a}f(x)}{\lim_{x\to a}g(x)}=\dfrac{\alpha}{\beta}$ (단, $\beta\neq 0$)

#4 극한값 계산 1

(1) $\dfrac{\infty}{\infty}$ 꼴의 극한값

① 분수식 ⇨ 분모의 최고차항으로 분모, 분자를 각각 나눈다.

② 무리식 ⇨ 근호 밖의 최고차항으로 분모, 분자를 각각 나눈다.

(2) $\dfrac{0}{0}$ 꼴의 극한값

$\lim_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}$에서 $\lim_{x\to a}f(x)=0$, $\lim_{x\to a}g(x)=0$인 경우

$f(x)$, $g(x)$가 다항식이면 각각 인수분해하여 공통인수를 약분한 후 극한값을 구한다.

#3

04

두 함수 $f(x)$, $g(x)$에 대하여

$\lim_{x\to 3}\{2f(x)+g(x)\}=10$, $\lim_{x\to 3}\{f(x)-g(x)\}=2$일 때,

$\lim_{x\to 3}\frac{f(x)}{g(x)}$의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

05

두 함수 $f(x)$, $g(x)$가 $\lim_{x\to 1}\{f(x)-g(x)\}=2$,

$\lim_{x\to 1}f(x)=\infty$를 만족시킬 때, $\lim_{x\to 1}\frac{g(x)}{f(x)}$의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

#4

06

$\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2+x}{(3x+1)(x-2)}$의 값은?

① $\frac{1}{6}$ ② $\frac{1}{3}$ ③ $\frac{1}{2}$ ④ $\frac{2}{3}$ ⑤ $\frac{5}{6}$

07

$\lim_{x\to 2}\frac{x^2+4x-12}{x-2}$의 값은?

① 1 ② 2 ③ 4 ④ 8 ⑤ 16

#5 극한값 계산 2

(1) $\dfrac{0}{0}$ 꼴의 극한값

$\displaystyle\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}$에서 $\displaystyle\lim_{x\to a}f(x)=0$, $\displaystyle\lim_{x\to a}g(x)=0$인 경우

$f(x)$ 또는 $g(x)$가 무리식이면 무리식이 있는 쪽을 유리화한 다음

분모, 분자의 공통인수를 약분한 후 극한값을 구한다.

(2) $\infty-\infty$ 꼴의 극한값

$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\{f(x)-g(x)\}$에서 $\displaystyle\lim_{x\to\infty}f(x)=\infty$, $\displaystyle\lim_{x\to a}g(x)=\infty$ 인 경우

① $f(x)-g(x)$가 다항식이면 $f(x)-g(x)$의 최고차항으로 묶어 극한값을 구한다.

② $f(x)-g(x)$가 무리식이면 분모가 1인 분수식으로 생각하여 분자를 유리화한 후 극한값을 구한다.

#6 극한값 계산 3

(1) $0\times\infty$ 꼴의 극한값

$\displaystyle\lim_{x\to a}f(x)g(x)$에서 $\displaystyle\lim_{x\to a}f(x)=0$, $\displaystyle\lim_{x\to a}g(x)=\infty$ 인 경우는 식을

$\dfrac{0}{0}$, $\dfrac{\infty}{\infty}$, $\dfrac{c}{\infty}$(c는 상수)의 꼴로 변형하여 극한값을 구한다.

(2) $x\to-\infty$ 인 경우

$x\to\infty$ 로 바꾸어 풀이한다. (x 대신 $-x$ 대입)

#5

8

$\lim_{x \to 1} \frac{\sqrt{x^2+3x}-2x}{x-1}$ 의 값은?

① -1 ② $-\frac{3}{4}$ ③ $-\frac{1}{2}$
④ $-\frac{1}{3}$ ⑤ $-\frac{1}{4}$

9

$\lim_{x \to 1} \frac{\sqrt{3x+1}-\sqrt{x+3}}{x^2-1}$ 의 값은?

① $-\frac{3}{4}$ ② $-\frac{1}{4}$ ③ 0
④ $\frac{1}{4}$ ⑤ $\frac{3}{4}$

#6

10

$\lim_{x \to 2} \frac{1}{x-2}\left(\frac{1}{x+1}-\frac{1}{3}\right)$의 값은?

① $-\frac{1}{9}$ ② $-\frac{1}{6}$ ③ $-\frac{1}{4}$
④ $-\frac{1}{3}$ ⑤ $-\frac{1}{2}$

11

$\lim_{x \to 0} \frac{1}{x}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{\sqrt{4+x}}\right)=\frac{1}{a}$ 일 때, 상수 a의 값을 구하시오.

#7 미정계수 결정

(1) 두 함수 $f(x)$, $g(x)$에 대하여 $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \alpha$($\alpha$는 실수)이고

① $\lim\limits_{x \to a} g(x) = 0$이면 $\lim\limits_{x \to a} f(x) = 0$이다 .

② $\lim\limits_{x \to a} f(x) = 0$이고 $a \neq 0$이면 $\lim\limits_{x \to a} g(x) = 0$이다.

(2) 두 다항함수 $f(x)$, $g(x)$에 대하여 $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \alpha$($\alpha$는 0이 아닌 실수)이면

($f(x)$의 차수)=($g(x)$의 차수)이고 $\alpha = \dfrac{\{f(x)\text{의 최고차항의 계수}\}}{\{g(x)\text{의 최고차항의 계수}\}}$ 이다.

#8 함수의 극한의 대소 관계

두 함수$f(x)$, $g(x)$에 대하여 $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \alpha$, $\lim\limits_{x \to a} g(x) = \beta$ (α, β는 실수)일 때, a에 가까운 모든 x에 대하여

(1) $f(x) \leq g(x)$이면 $\alpha \leq \beta$이다.

(2) $f(x) \leq h(x) \leq g(x)$이고 $\alpha = \beta$이면 $\lim\limits_{x \to a} h(x) = \alpha$이다.

#7

12

두 실수 a , b 에 대하여 $\lim_{x \to 2} \frac{x^3-a}{x-2} = b$ 일 때, $a+b$의 값은?

① 14 ② 16 ③ 18
④ 20 ⑤ 22

13

등식

$$\lim_{x \to 1} \frac{\sqrt{x+3}-a}{x-1} = b$$

을 만족시키는 두 상수 a, b에 대하여 ab의 값은?

① $\frac{1}{4}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ 1
④ 2 ⑤ 4

#8

14

함수 $f(x)$가 모든 양수 x에 대하여 부등식
$\frac{2}{x+1} < \frac{f(x)}{x} < \frac{4}{2x+1}$ 를 만족시킬 때, $\lim_{x \to \infty} f(x)$의 값은?

① 1 ② $\frac{3}{2}$ ③ 2
④ $\frac{5}{2}$ ⑤ 3

#1 그래프의 연속과 불연속

(1) 함수의 연속

함수 $f(x)$가 실수 a에 대하여 다음 세 조건을 만족시킬 때, 함수 $f(x)$는 $x=a$에서 연속이라고 한다.

(i) 함수 $f(x)$가 $x=a$에서 정의되어 있다.

(ii) 극한값 $\lim_{x\to a}f(x)$가 존재한다.

(iii) $\lim_{x\to a}f(x)=f(a)$

(2) 함수의 불연속

함수 $f(x)$가 $x=a$에서 연속이 아닐 때, 함수 $f(x)$는 $x=a$에서 불연속이라고 한다.
즉, 함수 $f(x)$가 (1)의 세 조건 중 어느 하나라도 만족시키지 않으면 함수 $f(x)$는 $x=a$에서 불연속이다.

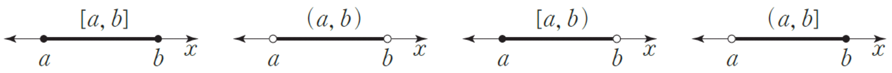
#2 구간

두 실수 $a,\ b\,(a<b)$에 대하여

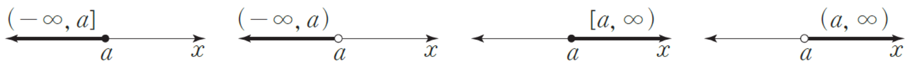
(1) 실수의 집합 $\{x|a\le x\le b\}$, $\{x|a<x<b\}$, $\{x|a\le x<b\}$, $\{x|a<x\le b\}$를 구간이라고 하며, 이것을 각각 기호로

$[a,\ b]$, $(a,\ b)$, $[a,\ b)$, $(a,\ b]$

와 같이 나타낸다. 이때 $[a,\ b]$를 닫힌구간, $(a,\ b)$를 열린구간이라고 하며, $[a,\ b)$, $(a,\ b]$를 반닫힌 구간 또는 반열린 구간이라고 한다.



(2)실수의 집합 $\{x|x\le a\}$, $\{x|x<a\}$, $\{x|x\ge a\}$, $\{x|x>a\}$도 구간이라고 하며, 이것을 각각 기호로 $(-\infty,\ a]$, $(-\infty,\ a)$, $[a,\ \infty)$, $(a,\ \infty)$
와 같이 나타낸다.

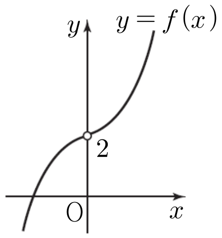


(3) 실수 전체의 집합은 기호로 $(-\infty,\ \infty)$와 같이 나타낸다.

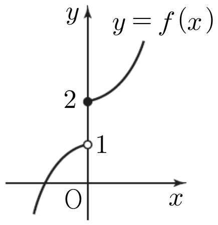
#1

[1~4] 다음 함수가 $x=0$에서 연속이 아닌 이유를 설명하시오.

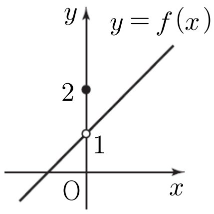
01



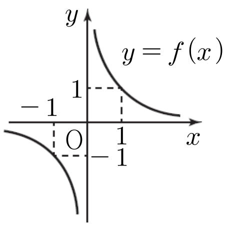
02



03



04



#2

[5-11] 다음 함수가 연속인 x의 값의 범위를 구간의 기호를 써서 나타내시오.

05

$y=x^2+3+2^x$

06

$y=\sqrt{x-1}+\log x$

07

$y=\dfrac{3^x}{x^2-1}$

08

$y=\log_2(x+1)$

9

$y=\log x^2$

#3 연속조건

함수 $f(x)$가 실수 a에 대하여 다음 세 조건을 만족시킬 때, 함수 $f(x)$는 $x=a$에서 연속이라고 한다.

(i) 함수 $f(x)$가 $x=a$에서 정의되어 있다.

(ii) 극한값 $\lim_{x \to a} f(x)$가 존재한다.

(iii) $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$

#4 구간에서의 연속

함수 $f(x)$가 어떤 구간에 속하는 모든 실수 x에서 연속일 때, 함수 $f(x)$는 그 구간에서 연속이라고 한다. 또한 어떤 구간에서 연속인 함수를 그 구간에서 연속함수라고 한다.

(1) 열린구간에서의 연속

함수 $f(x)$가 열린구간 $(a,\ b)$에 속하는 모든 실수 x에서 연속일 때, 함수 $f(x)$는 열린구간 $(a,\ b)$에서 연속이라고 한다.

(2) 닫힌구간에서의 연속

함수 $f(x)$가 다음 두 조건을 모두 만족시킬 때, 함수 $f(x)$는 닫힌구간 $[a,\ b]$에서 연속이라고 한다.

① 함수 $f(x)$는 열린구간 $(a,\ b)$에서 연속이다.

② $\lim_{x \to a+} f(x) = f(a)$, $\lim_{x \to b-} f(x) = f(b)$

#3

10

함수 $f(x)=\begin{cases} x^2-x+2 & (x<3) \\ x+a & (x\geq 3) \end{cases}$ 이 $x=3$에서 연속일 때, 상수 a의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

11

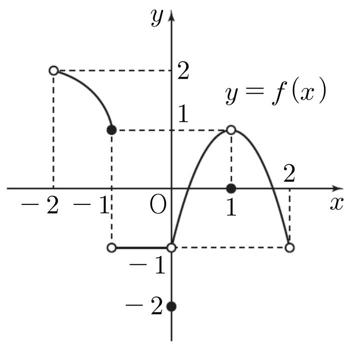
함수 $f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^2+ax-3}{x-1} & (x\neq 1) \\ b & (x=1) \end{cases}$ 가 $x=1$ 에서 연속일 때, 두 상수 a, b 의 합 $a+b$ 의 값은?

① 6 ② 8 ③ 10
④ 12 ⑤ 14

#4

12

$-2<x<2$에서 정의된 함수 $y=f(x)$의 그래프가 다음과 같다. 함수 $f(x)$의 극한값이 존재하지 않는 점의 개수를 a개, 불연속이 되는 점의 개수를 b개라 할 때, $a+b$ 값을 구하시오.



13

실수 전체의 집합에서 연속인 함수 $f(x)$에 대하여 $(x-1)f(x)=x^2+4x-5$ 이 성립할 때, $f(1)$의 값은?

① 3 ② 4 ③ 5
④ 6 ⑤ 7

#5 연속함수의 성질

두 함수 $f(x)$, $g(x)$가 $x=a$에서 연속이면 다음 함수도 $x=a$에서 연속이다.

(1) $cf(x)$ (단, c는 상수) (2) $f(x)+g(x)$, $f(x)-g(x)$

(3) $f(x)g(x)$ (4) $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ (단, $g(x)\neq 0$)

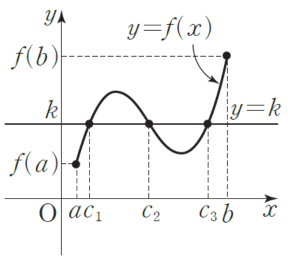
#6 최대, 최소의 정리 / 사잇값 정리

(1) 최대, 최소의 정리

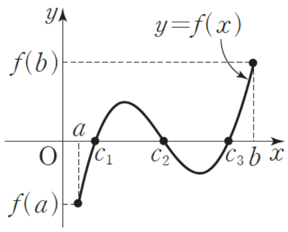
함수 $f(x)$가 닫힌구간 $[a,\ b]$에서 연속이면 함수 $f(x)$는 이 구간에서 반드시 최댓값과 최솟값을 갖는다.

(2) 사잇값 정리

① 함수 $f(x)$가 닫힌구간 $[a,\ b]$에서 연속이고 $f(a)\neq f(b)$이면 $f(a)$와 $f(b)$ 사이의 임의의 실수 k에 대하여 $f(c)=k$인 c가 열린구간 $(a,\ b)$에 적어도 하나 존재한다.



② 함수 $f(x)$가 닫힌구간 $[a,\ b]$에서 연속이고 $f(a)f(b)<0$이면 사잇값의 정리에 의하여 $f(c)=0$인 c가 열린구간 $(a,\ b)$에 적어도 하나 존재한다.
따라서 방정식 $f(x)=0$은 열린구간 $(a,\ b)$에서 적어도 하나의 실근을 갖는다.



#5

14

$x=2$에서 연속인 함수를 <보기>에서 있는 대로 고른 것은?

〈 보 기 〉

ㄱ. $f(x)=\begin{cases} 2x+1 & (x \geq 2) \\ x^2+3x-5 & (x < 2) \end{cases}$

ㄴ. $f(x)=(x+1)(x-2)^2$

ㄷ. $f(x)=\dfrac{1}{x^2+2}$

① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

15

두 함수 $f(x)=x-5$, $g(x)=x^2+2x+3$에 대하여 다음 중 모든 실수 x에서 연속인 함수가 아닌 것은?

① $f(x)-3g(x)$ ② $g(f(x))$ ③ $\dfrac{f(x)}{g(x)}$
④ $\dfrac{g(x)}{f(x)}$ ⑤ $f(x)g(x)$

#6

16

<보기>의 방정식 중에 구간 $(0,\ 1)$에서 적어도 하나의 실근을 갖는 것만을 있는 대로 고른 것은?

〈 보 기 〉

ㄱ. $x^2+2x-1=0$

ㄴ. $3^x+3x-4=0$

ㄷ. $x-1+\log_2(x+1)=0$

① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

#1 곱의 함수의 연속성 (불×불)

함수 $f(x)$가 $x=a$에서 연속이기 위해서는
좌극한값과 우극한값 그리고 함숫값이 같아야 한다. (연속성 정의)

$f(x)$	$g(x)$	연속성
연속	연속	연속함수 성질에 의해 연속
불연속	불연속	연속함수 정의로 판단 (좌극한=우극한=함숫값)

#2 곱의 함수의 연속성 (불×연)

$f(x)$	$g(x)$	연속성
불연속	연속	<원칙> $f(x)$가 불연속인 점에서 $g(x)$의 함숫값이 0이 되면 된다. <예외> $f(x)=\dfrac{1}{x+1}$ 과 같이 점근선을 갖는 경우 영인자가 사라질 수 있으니 유의해야 한다.

#1

01

함수

$$f(x)=\begin{cases} 4x-3 & (x\le 1) \\ -x & (x>1) \end{cases}$$

에 대하여 함수 $f(x)g(x)$가 $x=1$에서 연속이 되도록 하는 함수 $g(x)$만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은?

〈 보 기 〉

ㄱ. $g(x)=x^2$

ㄴ. $g(x)=\begin{cases} -1 & (x\le 1) \\ 1 & (x>1) \end{cases}$

ㄷ. $g(x)=\begin{cases} x & (x\le 1) \\ -x & (x>1) \end{cases}$

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

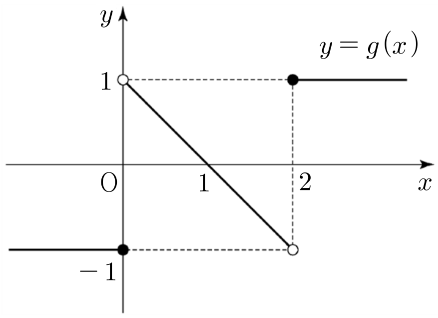
#2

02

최고차항의 계수가 1인 이차함수 $f(x)$와 함수

$$g(x)=\begin{cases} -1 & (x\le 0) \\ -x+1 & (0<x<2) \\ 1 & (x\ge 2) \end{cases}$$

에 대하여 함수 $f(x)g(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이다. $f(5)$의 값은?



① 15 ② 17 ③ 19
④ 21 ⑤ 23

#3 합성함수의 연속성 판단

연속성의 정의대로,
좌극한, 우극한, 함숫값이 같으면 된다. (극한계산 유의)

#4 합성함수의 불연속점 개수

$f(g(x))$의 불연속점의 개수를 구하는 방법

① 불연속점 후보를 찾는다.

(i) $g(x)$가 불연속이 되는 점

(ii) $f(x)$가 불연속이 되는 점이 $x=a$라면
$g(x)=a$인 점

② 불연속이 될 수 있는 점에서 연속성을 판단한다.

#3

03

두 함수

$$f(x)=\begin{cases} x+a & (x \ge 1) \\ x^2-3 & (x<1) \end{cases},\ g(x)=x^2-2x+3$$

에 대하여 함수 $g(f(x))$가 $x=1$에서 연속이 되도록 하는 모든 상수 a의 값의 곱은?

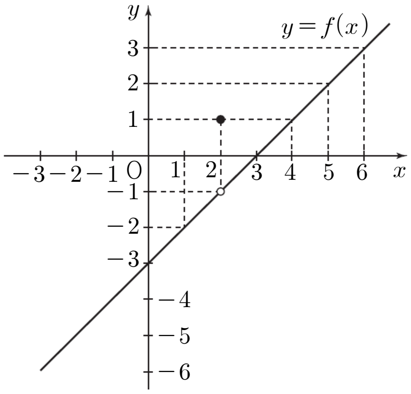
① 10 ② 8 ③ -4
④ -8 ⑤ -9

#4

04

실수 전체의 집합에서 정의된 함수 $f(x)$의 그래프가 그림과 같다. 합성함수 $(f \circ f)(x)$가 $x=a$에서 불연속이 되는 모든 a의 값의 합은? (단, $0 \le a \le 6$이다.)

① 3
② 4
③ 5
④ 6
⑤ 7



정답 및 해설

<1. 함수의 극한 계산>

1. 2

2. ①

$\lim\limits_{x\to1-}f(x)=1,\ \lim\limits_{x\to2+}f(x)=1$이므로

$\lim\limits_{x\to1-}f(x)+\lim\limits_{x\to2+}f(x)=2$

3. -5

$\lim\limits_{x\to-1+}=\lim\limits_{x\to-1+}(x-2)=-3$

$\lim\limits_{x\to-1-}f(x)=\lim\limits_{x\to-1-}(2x^2-ax+b)=2+a+b$

$\lim\limits_{x\to-1}f(x)$의 값이 존재하므로

$\lim\limits_{x\to-1+}f(x)=\lim\limits_{x\to-1-}f(x)$에서 $-3=2+a+b$

$a+b=-5$

4. ②

$2f(x)+g(x)=h(x),\ f(x)-g(x)=k(x)$로 놓으면

$f(x)=\dfrac{h(x)+k(x)}{3},\ g(x)=\dfrac{h(x)-2k(x)}{3}$

$\lim\limits_{x\to3}h(x)=10,\ \lim\limits_{x\to3}k(x)=2$이므로

$\lim\limits_{x\to3}f(x)=\dfrac{10+2}{3}=4,\ \lim\limits_{x\to3}g(x)=\dfrac{10-2\cdot2}{3}=2$

$\therefore\ \lim\limits_{x\to3}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{4}{2}=2$

5. ①

$\lim\limits_{x\to1}f(x)\left\{1-\dfrac{g(x)}{f(x)}\right\}=2$

$\therefore\ \lim\limits_{x\to1}\dfrac{g(x)}{f(x)}=1$

[다른 풀이]

$\lim\limits_{x\to1}\dfrac{g(x)}{f(x)}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{-\{f(x)-g(x)\}+f(x)}{f(x)}$

$=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{f(x)-2}{f(x)}=1$

6. ④

7. ④

$\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x^2+4x-8}{x-2}=\lim\limits_{x\to2}\dfrac{(x-2)(x+6)}{x-2}=\lim\limits_{x\to2}(x+6)=8$

8. ②

$$\lim_{x\to1}\frac{\sqrt{x^2+3x}-2x}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{\left(\sqrt{x^2+3x}-2x\right)\left(\sqrt{x^2+3x}+2x\right)}{(x-1)\left(\sqrt{x^2+3x}+2x\right)}$$

$$=\lim_{x\to1}\frac{-3x^2+3x}{(x-1)\left(\sqrt{x^2+3x}+2x\right)}$$

$$=\lim_{x\to1}\frac{-3x(x-1)}{(x-1)\left(\sqrt{x^2+3x}+2x\right)}$$

$$=\lim_{x\to1}\frac{-3x}{\left(\sqrt{x^2+3x}+2x\right)}$$

$$=-\frac{3}{4}$$

9. ④

$$\lim_{x\to1}\frac{\sqrt{3x+1}-\sqrt{x+3}}{x^2-1}$$

$$=\lim_{x\to1}\frac{2x-2}{(x-1)(x+1)(\sqrt{3x+1}+\sqrt{x+3})}$$

$$=\lim_{x\to1}\frac{2}{(x+1)(\sqrt{3x+1}+\sqrt{x+3})}=\frac{1}{4}$$

10. ①

$$\lim_{x\to2}\frac{-(x-2)}{3(x-2)(x+1)}=\lim_{x-2}\frac{-1}{3(x+1)}=-\frac{1}{9}$$

11. 16

$$\lim_{x\to0}\frac{1}{x}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{\sqrt{4+x}}\right)$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{1}{x}\cdot\frac{\sqrt{4+x}-2}{2\sqrt{4+x}}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{1}{x}\cdot\frac{(4+x)-4}{2\sqrt{4+x}(\sqrt{4+x}+2)}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{1}{2\sqrt{4+x}(\sqrt{4+x}+2)}$$

$$=\frac{1}{2\cdot2\cdot(2+2)}=\frac{1}{16}$$

즉 $\dfrac{1}{a}=\dfrac{1}{16}$ 이므로 $a=16$

12. ④

$\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x^3-a}{x-2}=b$이므로

$f(x)=x^3-a$라 하면 $f(2)=0$ 이므로 $a=8$

$\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x^3-8}{x-2}=\lim\limits_{x\to2}(x^2+2x+4)=12=b$

따라서 $a+b=20$

13. ②

$\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\sqrt{x+3}-a}{x-1}$ 의 값이 존재하므로 $\lim\limits_{x\to1}(\sqrt{1+3}-a)=0$

$\therefore a=2$

$$\lim_{x\to1}\frac{\sqrt{x+3}-2}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{(\sqrt{x+3}-2)(\sqrt{x+3}+2)}{(x-1)(\sqrt{x+3}+2)}$$
$$=\lim_{x\to1}\frac{(x-1)}{(x-1)(\sqrt{x+3}+2)}$$
$$=\lim_{x\to1}\frac{1}{\sqrt{x+3}+2}=\frac{1}{4}$$

$\therefore b=\frac{1}{4}$

$\therefore ab=2\times\frac{1}{4}=\frac{1}{2}$

14. ③

$\frac{2}{x+2}<\frac{f(x)}{x}<\frac{4}{2x+1}$ 의 각 변에 양수 x를 곱하면

$\frac{2x}{x+2}<f(x)<\frac{4x}{2x+1}$

이때 $\lim_{x\to\infty}\frac{2x}{x+2}=2$, $\lim_{x\to\infty}\frac{4x}{2x+1}=2$이므로

$\lim_{x\to\infty}f(x)=2$

<2. 함수의 연속 1>

1.

$x=0$에서 함숫값 $f(0)$이 정의되어 있지 않으므로 불연속이다.

2.

$\lim_{x\to0+}f(x)=2$, $\lim_{x\to0-}f(x)=1$이므로

$\lim_{x\to0+}f(x)\neq\lim_{x\to0-}f(x)$

따라서 극한값 $\lim_{x\to0}f(x)$의 값이 존재하지 않으므로 불연속이다.

3.

$x=0$일 때의 함숫값 $f(0)=2$, $\lim_{x\to0}f(x)=1$이다. 따라서

$\lim_{x\to0}f(x)\neq f(0)$이므로 불연속이다

4.

$x=0$일 때의 함숫값 $f(0)$이 정의되어 있지 않고 극한값 $\lim_{x\to0}f(x)$도 존재하지 않으므로 불연속이다.

5. 모든 실수

6. $x\geq1$

7. $x\neq\pm1$인 모든 실수

8. $x>-1$

9. $x\neq0$

10. ⑤

11. ①

함수 $f(x)$가 $x=1$에서 연속이려면 $\lim_{x\to1}f(x)=f(1)$이어야 한다.

즉, $\lim_{x\to1}\frac{x^2+ax-3}{x-1}=b$에서 $x\to1$일 때 (분모) $\to0$이므로 (분자) $\to0$이어야 한다.

$\lim_{x\to1}(x^2+ax-3)=a-2=0$ $\quad\therefore\ a=2$

$\lim_{x\to1}\frac{x^2+2x-3}{x-1}=4$

$\therefore\ a+b=2+4=6$

12. 4

13. ④

14. ⑤

15. ④

16. ⑤

ㄱ. $f(x)=x^2+2x-1$이라 하면 함수 $f(x)$는 닫힌 구간 $[0,\ 1]$에서 연속이다.
이때 $f(0)f(1)=(-1)\times2=-2<0$이므로 중간값의 정리에 의하여 방정식 $f(x)=0$은 열린 구간 $(0,\ 1)$에서 적어도 하나의 실근을 갖는다.

ㄴ. $g(x)=2^x+3x-4$라 하면 함수 $g(x)$는 닫힌 구간 $[0,\ 1]$에
서 연속이다.
이때 $g(0)g(1)=(-3)\times1=-3<0$이므로 중간값의 정리에 의하여 방정식 $g(x)=0$은 열린 구간 $(0,\ 1)$에서 적어도 하나의 실근을 갖는다.

ㄷ. $h(x)=x-1+\log_2(x+1)$이라 하면 함수 $h(x)$는 닫힌 구간 $[0,\ 1]$에서 연속이다.
이때 $h(0)h(1)=(-1)\times1=-1<0$이므로 중간값의 정리에 의하여 방정식 $h(x)=0$은 열린 구간 $(0,\ 1)$에서 적어도 하나의 실근을 갖는다.

따라서 열린 구간 $(0,\ 1)$에서 적어도 하나의 실근을 갖는 방정식은 ㄱ, ㄴ, ㄷ 이다.

<3. 함수의 연속 2>

1. ④

2. ①

$f(0)g(0)=\lim_{x\to+0}f(x)g(x)$ 에서

$-f(0)=f(0)\quad\therefore\ f(0)=0$

$\lim_{x\to2-0}f(x)g(x)=f(2)g(2)$ 에서

$-f(2)=f(2)\quad\therefore\ f(2)=0$

$\therefore\ f(x)=x(x-2)$

$\therefore\ f(5)=15$

3. ⑤

함수 $g(f(x))$가 $x=1$에서 연속이므로

$\lim_{x\to1}g(f(x))=g(f(1))=a^2+2$이다.

$\lim_{x\to1+}g(f(x))=a^2+2,\ \lim_{x\to1-}g(f(x))=g(-2)=11$

$\therefore\ a^2+2=11,\ a=\pm3$이다.

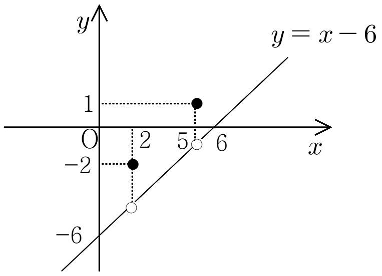
따라서 모든 상수 a의 값의 곱은 -9이다.

4. ⑤

$f(x)=\begin{cases}x-3 & (x\neq2)\\ 1 & (x=2)\end{cases}$ 이고,

$(f\circ f)(x)=\begin{cases}x-6 & (x\neq2, x\neq5)\\ -2 & (x=2)\\ 1 & (x=5)\end{cases}$

이므로 $y=(f\circ f)(x)$의 그래프는 다음과 같다.



따라서 합성함수 $(f\circ f)(x)$는 $x=2$ 또는 $x=5$에서 불연속이므로

$0\le a\le6$에서 모든 a의 값의 합은 $2+5=7$