2020

휴원기간 보강

백 인 대 장

수(하) 심화

- 집합 / 명제 -

100人대장

'Quality Education Creation'

– 백인대장 훈련소–

1강 집합

001 집합의 뜻과 표현

Note

1. n 이 자연수일 때, 집합 A_n 을 다음과 같이 정의한다.

$$A_1 = \varnothing,\ A_{n+1} = A_n \cup \{A_n\}$$

예를 들어 $A_2 = \{\varnothing\},\ A_3 = \{\varnothing,\ \{\varnothing\}\}$ 이다. <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?
(단, $\varnothing$ 는 공집합)

〈 보 기 〉

ㄱ. $A_4 = \{\varnothing,\ \{\varnothing\},\ \{\varnothing,\ \{\varnothing\}\}\}$
ㄴ. $A_n \in A_{n+1}$
ㄷ. $A_n \subset A_{n+1}$
ㄹ. $A_n = \{A_1,\ A_2,\ A_3,\ \cdots,\ A_{n-1}\}$

① ㄱ　② ㄱ, ㄴ　③ ㄴ, ㄷ
④ ㄱ, ㄴ, ㄹ　⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ, ㄹ

002 부분집합의 개수

Note

2. 집합 $A = \{x | x\text{는 } 100\text{의 양의 약수}\}$에 대하여 다음 조건을 만족시키는 집합 X의 개수는?

(가) $X \subset A,\ X \neq \varnothing$
(나) 집합 X의 모든 원소의 곱은 짝수이다.

① 501 ② 502 ③ 503
④ 504 ⑤ 505

003 집합의 연산법칙

Note

3. 전체집합 U의 세 부분집합 A, B, C에 대하여 <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

〈 보 기 〉

ㄱ. $A-B^C=A\cap B$
ㄴ. $(A-B)-C=A-(B\cup C)$
ㄷ. $\{A\cap(B-A)^C\}\cup\{(B-A)\cap A\}=A$

① ㄱ　　② ㄷ　　③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ　　⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

004 대칭차집합

Note

4. 집합 $U=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6\}$의 두 부분집합 $X,\ Y$가 다음의 조건을 만족한다.
$\{1,\ 2\}\subset X,\ n(X)=4,\ \{3,\ 4\}\subset Y,\ n(Y)=5$이며,
두 집합 $X,\ Y$에 대하여 연산 $\triangle$를 $X\triangle Y=(X\cup Y)-(X\cap Y)$로 정의한다. 집합 $(X\triangle Y)$의 원소의 개수의 최댓값을 p, 최솟값을 q라 할 때, $5p+3q$의 값은?

① 5 ② 13 ③ 18
④ 21 ⑤ 26

5. 자연수 n에 대하여 두 집합

$A_n=\{x\mid n^2+3n+2\le x\le n^2+3n+6\}$,
$B_n=\{x\mid 2n^2\le x\le 2n^2+5\}$

가 있다. 연산 $\triangle$을

$$A_n\triangle B_n=(A_n\cup B_n)-(A_n\cap B_n)$$

으로 정의하고, 집합 $A_n\triangle B_n$의 원소 중 최솟값을 $f(n)$이라 하면

$$\frac{1}{f(3)}+\frac{1}{f(4)}+\ \cdots\ +\frac{1}{f(16)}=K$$

이다. 이때, K의 값은?

① $\frac{1}{18}$ ② $\frac{1}{14}$ ③ $\frac{1}{7}$
④ $\frac{1}{6}$ ⑤ $\frac{1}{5}$

005 약수와 배수의 집합

Note

6. 자연수 n의 양의 배수의 집합을 A_n이라 할 때, 다음 <보기> 중 옳은 것을 모두 고른 것은? (단, $m,\ n$은 자연수)

〈 보 기 〉

ㄱ. $A_5 \cap A_7 = \varnothing$

ㄴ. $A_4 \cup A_6 = A_4$

ㄷ. $m,\ n$이 서로소이면 $A_m \cap A_n = A_{mn}$

ㄹ. $m = kn$ (k는 양의 정수)이면 $A_m \subset A_n$

① ㄱ, ㄴ, ㄹ　② ㄱ, ㄴ　③ ㄱ, ㄷ, ㄹ

④ ㄴ, ㄷ, ㄹ　⑤ ㄷ, ㄹ

7. 자연수 전체의 집합의 부분집합 A_k를 자연수 k의 약수의 집합이라고 하자.

$$X \cap A_{12} = X,\quad (A_{12} \cap A_{30}) \cup X = X$$

를 만족시키는 집합 X의 개수를 구하시오.

006 유한집합의 원소의 개수

Note

8. 전체집합 U의 부분집합 A, B, C에 대하여 다음 조건이 성립한다.

(가) $n(A)=100,\ n(B)=70,\ n(C)=80$
(나) $n(U)=n(A\cup B\cup C)=180,\ n(A\cap B)=15$

이때, $n((A\cap C)\cup(B\cap C))$의 값을 구하시오.
(단, $n(A)$는 집합 A의 원소의 개수)

9. 어떤 도시에 A, B, C 세 도서관이 있다. 이 도시에 사는 학생 100명을 대상으로 지난 6개월 동안 이 도서관의 이용 실태를 조사하였더니, A, B, C 도서관을 이용한 적이 있는 학생이 각각 87명, 74명, 49명이었다. <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

〈 보 기 〉

ㄱ. 세 도서관 A, B, C 중 어느 도서관도 이용한 적이 없는 학생은 많아야 12명이다.
ㄴ. 세 도서관 A, B, C를 모두 이용한 적이 있는 학생은 많아야 49명이다.
ㄷ. 적어도 10명의 학생은 세 도서관 A, B, C를 모두 이용한 적이 있다.

① ㄱ　② ㄷ　③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ　⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

007 새롭게 정의된 집합

10. 함수 $f(x)=x-[\,x\,]$에 대하여 집합 A_k($1 \le k \le 100$인 자연수)를
$A_k=\{x \mid f(kx)=0,\ 0 \le x \le 1\}$라 하자.
$n(A_3 \cap A_k)=2$, $n(A_4 \cap A_k)=2$를 모두 만족하는 k의 개수를 구하시오.
(단, $[\,x\,]$는 x보다 크지 않은 최대의 정수이고, $n(A)$는 집합 A의 원소의 개수이다.)

2강 명제

001 명제의 참/거짓과 진리집합 사이의 관계

11. 다음 명제가 참이 될 때, 실수 a의 값의 최댓값과 최솟값의 곱은?

부등식 $x^2-5x+6<0$을 만족하는 모든 실수 x에 대하여 부등식 $x^2-2ax-3a^2>0$이다.

① $-\frac{7}{3}$　② -2　③ $-\frac{4}{3}$
④ $\frac{2}{3}$　⑤ 2

12. 실수 전체의 집합에서의 두 조건

$$p: x \le -1 \text{ 또는 } x \ge k,\quad q: -\frac{k}{3} \le x < 5$$

에 대하여 $\sim p \rightarrow q$가 참이 되도록 하는 자연수 k의 개수는?

① 1　② 2　③ 3
④ 4　⑤ 5

002 “모든”, “어떤”이 있는 명제

13. 전체집합이 $U=\{x|x$는 5 이하의 자연수$\}$의 공집합이 아닌 부분집합 A에 대하여 두 명제

‘집합 A의 모든 원소 x에 대하여
$x^2-8x+12 \le 0$이다.’,
‘집합 A의 어떤 원소 x에 대하여
$x^3-4x^2+x+6=0$이다.’

가 있다. 두 명제가 모두 참이 되도록 하는 집합 A의 개수는?

① 4 ② 8 ③ 12
④ 16 ⑤ 20

14. 명제

‘어떤 실수 x에 대하여 $x^2-(b-2)^2 < a^2-4$이다.’

가 거짓이 되게 하는 두 실수 $a,\ b$에 대하여 $2a-3b$의 최댓값을 구하시오.

003 명제의 역과 대우

15. 다음 명제가 참이 되기 위한 모든 상수 a의 값의 합은?

$x^2+2x-8 \neq 0$이면 $x \neq a$이다.

① -2　　② -1　　③ 0
④ 1　　⑤ 2

004 필요조건과 충분조건

16. 실수 $x,\ y$에 대하여 <보기> 중에서 조건 q가 조건 p이기 위한 필요조건인 것을 모두 고르면?

〈 보 기 〉

ㄱ. $p: x+y=0$
　$q: x^2+y^2=0$
ㄴ. $p: |x| \le 1$
　$q: |x^2-1| \le 2|x-1|$
ㄷ. $p: |x-a|<1$이고, $|y-b|<1$
　$q: |(x+y)-(a+b)|<2$ ($a,\ b$는 상수)

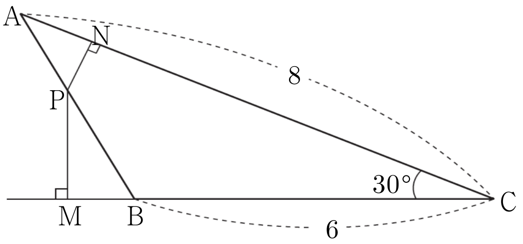
① ㄱ　② ㄴ　③ ㄷ
④ ㄱ, ㄴ　⑤ ㄴ, ㄷ

17. 세 조건 $p:\ -2 \le x \le 4$ 또는 $x \ge 7$, $q: x \ge a$, $r: x \ge b$에 대하여 p는 q이기 위한 충분조건이고, p는 r이기 위한 필요조건일 때, a의 최댓값을 M, b의 최솟값을 m이라 하자. 두 수의 곱 Mm의 값을 구하시오. (단, $a,\ b$는 실수)

005 산술평균과 기하평균

Note

18. 그림과 같이 $\overline{\mathrm{AC}}=8$, $\overline{\mathrm{BC}}=6$, $\mathrm{C}=30°$인 삼각형 ABC의 변 AB 위의 점 P에서 두 직선 BC, AC 위에 내린 수선의 발을 각각 M, N이라 하자. 다음 물음에 답하시오.



(1) 삼각형 ABC의 넓이를 구하시오.

(2) $\dfrac{\overline{\mathrm{AC}}}{\overline{\mathrm{PM}}}+\dfrac{\overline{\mathrm{BC}}}{\overline{\mathrm{PN}}}$의 최솟값을 구하시오.

19. 실수 x, y에 대하여 $x>0$, $xy(x+y+2)=32$일 때, $P=(x+y)(y+2)$의 최솟값을 a, P가 최솟값을 가질 때 x값을 b라고 할 때, $a+b$의 값을 구하시오.

006 코시슈바르츠 부등식

Note

20. $x,\ y,\ z$가 실수일 때, $x+2y+3z=3$, $x^2+y^2+z^2=12$가 성립한다. 이때, z의 최댓값 M, 최솟값 m에 대하여 $M+m$의 값은?

① $\frac{8}{7}$　　② $\frac{9}{7}$　　③ $\frac{10}{7}$

④ $\frac{11}{7}$　　⑤ $\frac{12}{7}$

정답 및 해설

1) ⑤

2) ④

3) ⑤

ㄱ. $A-B=A\cap B^C$이므로

$A-B^C=A\cap(B^C)^C=A\cap B$ (참)

ㄴ. $(A-B)-C=(A\cap B^C)-C=(A\cap B^C)\cap C^C$

$=A\cap(B^C\cap C^C)=A\cap(B\cup C)^C$

$=A-(B\cup C)$ (참)

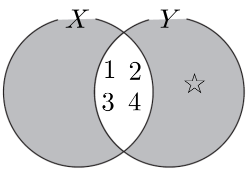
ㄷ. $\{A\cap(B-A)^C\}\cup\{A\cap(B-A)\}$

$=A\cap\{(B-A)^C\cup(B-A)\}$

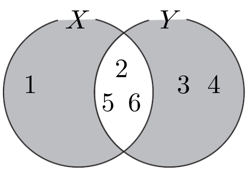
$=A\cap U$

$=A$ (참)

4) ③

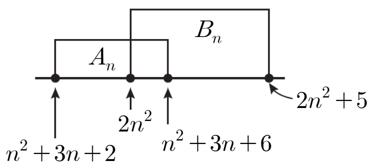


최솟값 $q=1$



최댓값 $q=3$

5) ⑤



$n\ge 4$일 때, $2n^2\ge n^2+3n+2$

$f(n)=n^2+3n+2=(n+2)(n+1)$

$\Rightarrow \dfrac{1}{f(n)}=\dfrac{1}{(n+1)(n+2)}$

$A_3=\{20\le x\le 24\},\ B_3=\{18\le x\le 23\}$

$\therefore\ f(3)=18$

6) ⑤

ㄱ. 5와 7의 공배수 집합이므로 A_{35}이다. (거짓)

ㄴ. $A_4\cup A_6=\{4,\ 6,\ 8,\ 12,\ \cdots\}$이므로 A_4가 아니다. (거짓)

ㄷ. m과 n의 공배수이므로 mn의 배수이다. (참)

ㄹ. $A_m=\{m,\ 2m,\ 3m,\ \cdots\}=\{kn,\ 2kn,\ 3kn,\ \cdots\}$

$A_n=\{n,\ 2m,\ 3n,\ \cdots\}$

$A_m\subset A_n$이다. (참)

7) 4개

$A_{12}=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 6,\ 12\}$

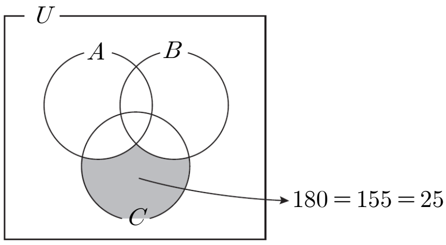
$A_{30}=\{1,\ 2,\ 3,\ 5,\ 6,\ 10,\ 15,\ 30\}$

$X\cap\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 6,\ 12\}=X,\ X\cup\{1,\ 2,\ 3,\ 6\}=X$

이므로 집합 X의 개수는 $2^{6-4}=2^2=4$개다.

8) 55

$n(A\cup B)=100+70-15=155$



$n((A\cap C)\cup(B\cap C))$

$=n(C\cap(A\cup B))$

$=80-25$

$=55$

9) ④

$\mathrm{Max}\{n(A)+n(B)+n(C)-2n(U),\ 0\}$

$\le n(A\cap B\cap C)\le \min\{n(A),\ n(B),\ n(C)\}$

$10\le n(A\cap B\cap C)\le 49$

$\therefore$ ㄴ, ㄷ 옳다.

10) 33

11) ③

12) ③

$\sim p:\ -1<x<k$

$q:\ -\dfrac{k}{3}\le x<5$

$\sim p\to q$가 참이 되려면 $-\dfrac{k}{3}\le -1$이고, $k\le 5$이다.

$3\le k\le 5$이므로 자연수 k의 개수는 3개다.

13) ③

i) $(x-6)(x-2)\le 0,\ 2\le x\le 6$

ii) $(x+1)(x^2-5x+6)=(x+1)(x-3)(x-2)=0$

전체 집합이 U이고

i)에 의해 A는 1을 포함하지 않고

ii)에 의해 2 또는 3을 포함해야 한다.

따라서 1을 포함하지 않고 2를 포함하는 집합의 개수 8개

1을 포함하지 않고 3을 포함하는 집합의 개수 8개

1을 포함하지 않고 2와 3을 포함하는 집합의 개수 4개

$\therefore\ 8+8-4=12$

14) $-6+2\sqrt{13}$

주어진 명제가 거짓이 되려면 모든 실수 x에 대하여

$x^2-(b-2)^2 \geq a^2-4$가 만족되어야 한다.

$\therefore a^2+(b-2)^2 \leq 4$

$2a-3b=k$라 하자.

직선 $2a-3b-k=0$이 원 $a^2+(b-2)^2=4$에 접할 때 k의 값이 최대 또는 최소가 된다.

$$\frac{|-6-k|}{\sqrt{13}}=2$$

$-6-k=\pm 2\sqrt{13}$

따라서 $2a-3b$의 최댓값은 $-6+2\sqrt{13}$ 이다.

15) ①

대우명제가

$x=a\ \rightarrow\ (x+4)(x-2)=0$이므로

$a=-4$ or 2

즉, $-4+2=-2$

16) ⑤

ㄴ. q : i) $x \geq 1$일 때, $x^2-1 \leq 2(x-1)$

$x^2-1-2x+2 \leq 0$

$x^2-2x+1 \leq 0$

$(x-1)^2 \leq 0 \qquad \therefore x=1$

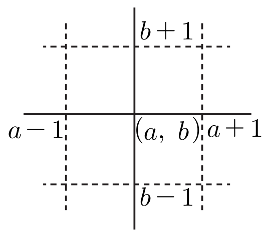
ii) $x<1$일 때, $x^2-1 \leq -2(x-1)$

$x^2+2x-3 \leq 0$

$-3 \leq x \leq 1$

$\therefore\ -3 \leq x \leq 1$

ㄷ. $p \xrightarrow{\bigcirc} q$, $a+b-2<x+y<a+b+2$



17) -14

18) (1) 12 (2) 8

(1) $\frac{1}{2}\times 6\times 8\times \sin 30^\circ=12$

(2) $\overline{\mathrm{PN}}=a$라 하고, $\overline{\mathrm{PM}}=b$라 하면

($\triangle$ABC의 넓이)=($\triangle$APC의 넓이) + ($\triangle$BPN의 넓이)

이므로 $12=\frac{1}{2}\times 8\times a+\frac{1}{2}\times 6\times b$

따라서 $4a+3b=12$ 이다.

$\left(\frac{8}{b}+\frac{6}{a}\right)(4a+3b)=\left(\frac{8}{b}+\frac{6}{a}\right)\times 12$ 이고 주어진 식을 정리하면

$$\frac{32a}{b}+\frac{18b}{a}+48=12\left(\frac{8}{b}+\frac{6}{a}\right)$$

$$\frac{16a}{b}+\frac{9b}{a}+24=6\left(\frac{8}{b}+\frac{6}{a}\right)$$

$$\frac{16a}{b}+\frac{9b}{a}\geq 2\sqrt{\frac{16a}{b}\times\frac{9b}{a}}=24$$

$$6\left(\frac{8}{b}+\frac{6}{a}\right)\geq 24+24$$

$$\frac{8}{b}+\frac{6}{a}\geq 8$$

따라서 최솟값 8

19) 20

$x^2+xy^2+2xy=32$

$P=(xy+y^2+2y)+2x$

$=\frac{x^2y+xy^2+2xy}{x}+2x$

$=\frac{32}{x}+2x \geq 2\sqrt{32\times 2}$

최솟값은 16이고, 최솟값을 가질 때의 x값은

$\frac{32}{x}=2x$인 경우이므로 $x=4$일 때이다.

$\therefore\ a=16, b=4$

20) ②

$x+2y=3-3z,\ x^2+y^2=12-z^2$

코시-슈바르츠 부등식에 의해

$(1^2+2^2)(x^2+y^2) \geq (x+2y)^2$

$5(12-z^2) \geq (3-3z)^2$

$14z^2-18z-51 \leq 0$

$\therefore\ M+m=\frac{9}{7}$