2020

휴원기간 보강

백 인 대 장

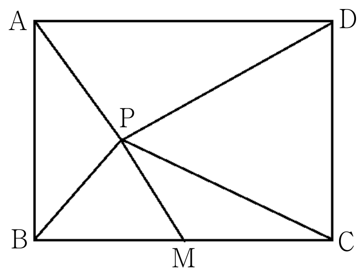
도형의 방정식 심화문제풀이

100人대장
'Quality Education Creation'

– 백인대장 훈련소–

점과 좌표

1. 그림과 같은 직사각형 ABCD와 그 내부의 임의의 점 P, $\overline{\mathrm{BC}}$의 중점 M에 대하여 $2\overline{\mathrm{CM}}^2 = a\overline{\mathrm{PA}}^2 + b\overline{\mathrm{PC}}^2 + c\overline{\mathrm{PD}}^2 + d\overline{\mathrm{PM}}^2$이 성립한다고 할 때, 상수 a, b, c, d에 대하여 $a+b+c+d$의 값은?



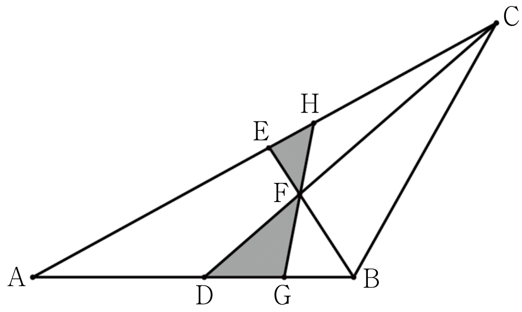
① -2　② -1　③ 0
④ 1　⑤ 2

도움!

좌표평면으로 옮겨
풀어본다.

삼각형 PBC에서
중선정리
+
$\mathrm{PA}^2 + \mathrm{PC}^2 = \mathrm{PB}^2 + \mathrm{PD}^2$

2. 그림과 같이 $\overline{\mathrm{AB}}=\overline{\mathrm{BC}}=2\sqrt{2}$, $\overline{\mathrm{AC}}=2\sqrt{7}$ 인 삼각형 ABC에서 선분 AB는 점 D에 의해 이등분 된다. 각 ABC의 이등분선이 선분 CD와 만나는 점을 F, 선분 AC와 만나는 점을 E라 하자. 각 BFD의 이등분선이 선분 AB와 만나는 점을 G, 선분 AC와 만나는 점을 H라 하자. 삼각형 EFH의 넓이를 S_1, 삼각형 DGF의 면적을 S_2라 할 때, $\frac{S_2}{S_1}$의 값은?

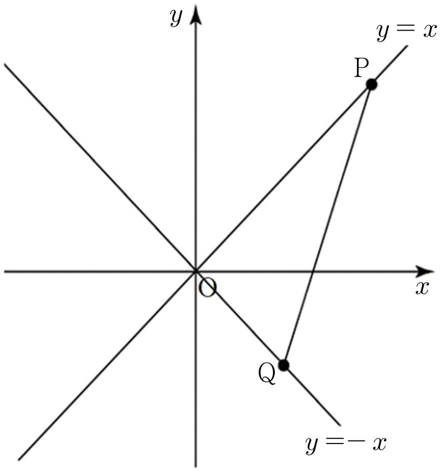


① 4　② 5　③ 6
④ 7　⑤ 8

도움!

무게중심의 성질
+
각의 이등분 선 정리

3. 그림과 같이 직선 $y=x$ 위의 점 P와 직선 $y=-x$ 위의 점 Q가 $\overline{\mathrm{PQ}}=\sqrt{6}$을 만족시키면서 움직인다. 선분 PQ를 $1:2$로 내분하는 점을 $\mathrm{R}(a,\ b)$라 할 때, 실수 a의 최댓값을 구하시오.



도움!

$\mathrm{P}(p,\ p),\ \mathrm{Q}(q,\ -q)$라 두고 최대, 최소 계산

+

부등식의 영역을 이용한 최대, 최소 계산

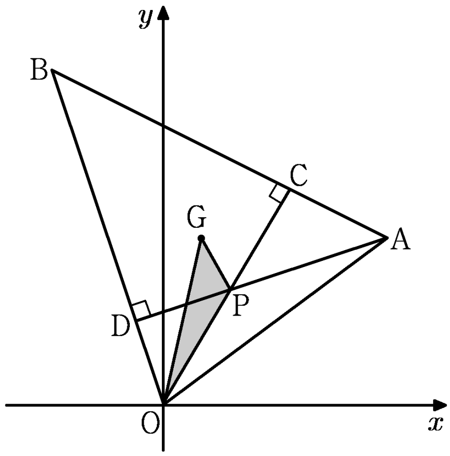
4. 양의 실수 k 에 대하여 점 $\mathrm{A}(0,\ 0)$, $\mathrm{B}(0,\ 6)$, $\mathrm{C}(k,\ 0)$ 을 세 꼭짓점으로 하는 삼각형 ABC 가 있다. 점 B 와 점 C 의 중점을 M 이라 하고 $\angle \mathrm{A}$ 의 이등분선이 변 BC 와 만나는 점을 D 라 할 때, $\overline{\mathrm{AB}}^2 + \overline{\mathrm{AC}}^2 = 2\overline{\mathrm{AM}}^2 + 8\overline{\mathrm{MD}}^2$ 를 만족하는 k 의 값의 합은?

① 14　　② 16　　③ 18
④ 20　　⑤ 22

도움!

중선정리+
각의 이등분선 정리

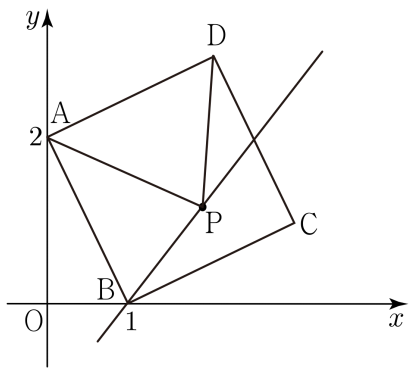
5. 세 점 $\mathrm{O}(0,\ 0)$, $\mathrm{A}(8,\ 6)$, $\mathrm{B}(-4,\ 12)$을 꼭짓점으로 하는 삼각형 OAB가 있다. 두 점 O, A에서 $\overline{\mathrm{AB}}$, $\overline{\mathrm{OB}}$에 내린 수선의 발을 각각 점 C, D라 하자.
직선 OC와 직선 AD의 교점을 P, 삼각형 OAB의 무게중심을 G라 할 때, 삼각형 OPG의 넓이를 구하시오.



도움!

직선OC, 직선AD의 교점 P의 좌표를 구해본다.
+
사선식 이용한 넓이 계산하기

6. 그림은 두 점 $\mathrm{A}(0,\ 2)$, $\mathrm{B}(1,\ 0)$을 꼭짓점으로 하는 정사각형 ABCD이다. 정사각형의 한 변 DC의 중점과 점 B를 지나는 직선 위의 점 P에 대하여 $\overline{\mathrm{AP}}^2 + \overline{\mathrm{DP}}^2$의 최솟값은?
(단, 두 점 C, D는 제1사분면 위의 점이다.)



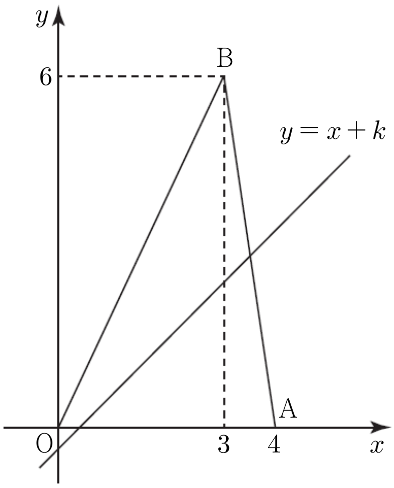
① 5 ② $\frac{11}{2}$ ③ 6

④ $\frac{13}{2}$ ⑤ 7

도움!

삼각형PAD에서
중선정리

7. 그림과 같이 세 점 $O(0,\ 0)$, $A(4,\ 0)$, $B(3,\ 6)$을 꼭짓점으로 하는 삼각형 OAB의 넓이를 직선 $y=x+k$가 이등분할 때, 상수 k의 값은?

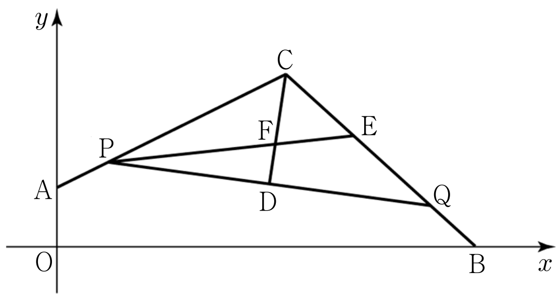


① $-3+\sqrt{7}$ ② $-4+\sqrt{15}$ ③ $-3+2\sqrt{2}$
④ $-4+\sqrt{14}$ ⑤ $-4+\sqrt{13}$

도움!

$k=0$일 때, 아랫부분의 넓이가 전체의 절반보다 크기 때문에 $k<0$이다.
+
높이가 같은 삼각형은 밑변 길이의 비가 넓이의 비와 같다.

8. 그림과 같이 좌표평면 위의 두 점 $\mathrm{A}(0,\ 4)$, $\mathrm{B}(20,\ 0)$과 제 1사분면 위의 점 $\mathrm{C}(a,\ b)$가 $\overline{\mathrm{AC}} = \overline{\mathrm{BC}}$를 만족시킨다. 두 선분 AC, BC를 $1:4$으로 내분하는 점을 각각 P, Q라 하자. 선분 CD는 각 ACB의 이등분선이며 점 E는 선분 BC를 $3:2$로 내분한다. 선분 PE와 선분 CD의 교점을 F라 하고 선분 DF의 길이가 $\frac{4}{5}\sqrt{26}$일 때, $a+b$의 값은?

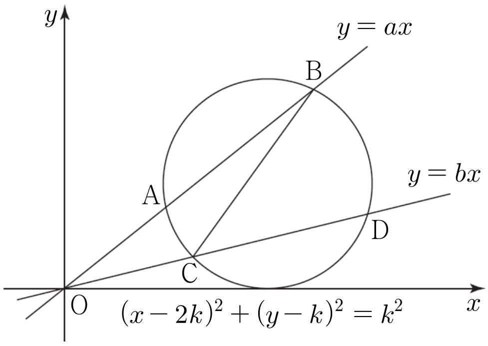


① 28 ② 30 ③ 32
④ 34 ⑤ 36

도움!

삼각형 CAB, CPQ는
이등변삼각형
+
시소공식 혹은
메네라우스 정리 유용
+
기울기의 기하학적 의미

9. 그림과 같이 좌표평면 위의 원 $(x-2k)^2+(y-k)^2=k^2$과 원점을 지나는 두 직선 $y=ax$, $y=bx$이 만나는 점을 A, B, C, D라 한다.



$\overline{\mathrm{AB}}=\overline{\mathrm{CD}}$, $\angle\mathrm{ABC}+\angle\mathrm{BCD}=60°$가 성립할 때,
두 상수 a, b의 곱 $a\times b$의 값은?

① $\frac{1}{7}$ ② $\frac{1}{6}$ ③ $\frac{1}{5}$
④ $\frac{1}{4}$ ⑤ $\frac{1}{3}$

도움!

두 직선은 $y=\frac{1}{2}x$에 대하여 대칭이다.
+
원주각과 중심각의 관계

10. 점 $\mathrm{A}(-1,\ 0)$, $\mathrm{B}(1,\ 0)$에 대하여 $\overline{\mathrm{PA}} : \overline{\mathrm{PB}} = t : 1$을 만족하는 점 P가 그리는 도형을 S_t라고 하자. 직선 $\dfrac{x}{5}+\dfrac{\sqrt{2}\,y}{5}=1$을 접선으로 갖는 도형 S_t의 넓이는? (단, $t>1$)

① π ② 3π ③ 5π
④ 7π ⑤ 9π

도움!

아폴로니우스의 원

11. 세 직선 l_1, l_2, l_3은 실수 m에 대하여 다음과 같다.

$$\begin{cases} l_1 : mx - y - 2m = 0 \\ l_2 : -2mx + 2y + km - 4 = 0 \\ l_3 : x + my - 3m - 5 = 0 \end{cases}$$

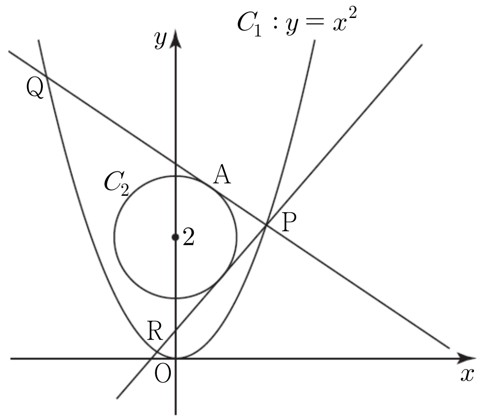
두 직선 l_1과 l_3의 교점을 P_1, 두 직선 l_2과 l_3의 교점을 P_2라 하고, 점 P_1의 자취가 나타내는 도형을 C_1, 점 P_2의 자취가 나타내는 도형을 C_2라 하자. 도형 C_1의 넓이와 도형 C_2의 넓이가 같을 때, 실수 k의 값의 합은?

① 5 ② 10 ③ 15
④ 20 ⑤ 25

도움!

일정한 점을 지나는 서로 수직인 두 직선의 교점의 자취

12. 이차함수 $y=x^2$의 그래프를 C_1,
원 $x^2+(y-2)^2=1$을 C_2라 하자. $(-1,\ 2)$, $(1,\ 2)$, $(0,\ 1)$, $(0,\ 3)$이 아닌 C_2 위의 점 A에서 원에 그은 접선과 C_1이 만나는 두 점을 P, Q라 하자. 또 점 P에서 원에 그은 두 접선과 C_1이 만나는 점 중 P, Q가 아닌 점을 R이라 하자.
다음 물음에 답하시오.



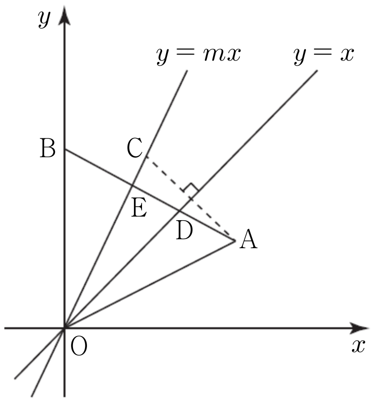
(1) P, Q의 x좌표를 각각 a, b라 하면, 점 P, Q의 위치에 관계없이 식 $(a-b)^2-a^2b^2$의 값은 항상 일정한 상수 k가 된다. k의 값을 구하시오. (단, $a>b$)

(2) 원 C_2와 직선 QR의 서로 다른 교점의 개수를 구하시오.

도움!

$\mathrm{P}(a,\ a^2)$, $\mathrm{Q}(b,b^2)$, $\mathrm{R}(c,c^2)$
이라 두고 좌표계산

13. 그림과 같이 좌표평면 위에 제1사분면의 점 A와 y축 위의 점 B에 대하여 $\overline{\mathrm{AB}}=\overline{\mathrm{AO}}=t\sqrt{m^2+1}$ $(t>0,\ m>1)$인 이등변삼각형 OAB가 있다. 점 A를 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 점을 C라 하면 점 C는 직선 $y=mx$ 위의 점이다. 선분 AB가 두 직선 $y=x$, $y=mx$와 만나는 점을 각각 D, E라 할 때, 삼각형 ODE의 외접원의 넓이를 $\dfrac{cm^2}{m^2+am+b}t^2\pi$라 할 때, 상수 a, b, c의 합 $a+b+c$의 값은? (단, O는 원점이다.)

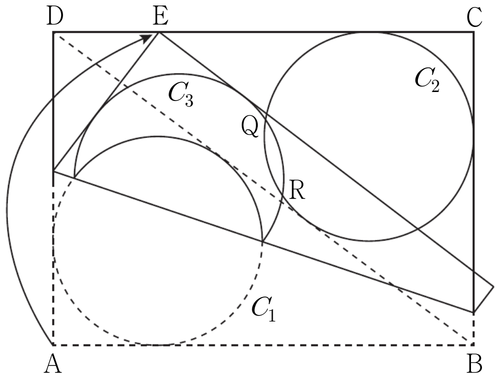


① 4 ② 5 ③ 7
④ 9 ⑤ 10

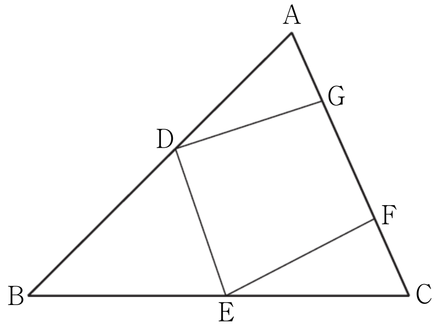
도움!

C의 x좌표는 t이다.
A, B의 좌표를 계산해본다.

14. 그림과 같이 직사각형 모양의 종이가 있다. 이 종이의 각 꼭짓점을 A, B, C, D라 하면 $\overline{AB}=20$, $\overline{BC}=15$이고, 두 삼각형 ABD, BCD에 내접하는 원을 각각 C_1, C_2라 하자.
점 A가 선분 CD를 $3:1$로 내분하는 점 E에 놓이도록 이 종이를 접었을 때, 원 C_1이 옮겨진 도형을 C_3라 하자. 두 도형 C_2, C_3의 서로 다른 두 교점을 각각 Q, R라 할 때, $\overline{QR}^2$의 값을 구하시오.



15. 그림과 같이 $\overline{AB} = 4\sqrt{2}$, $\overline{BC} = 6$, $\angle ABC = 45°$인 삼각형 ABC의 두 변 AB와 BC 위에 각각 D와 E가 있고 변 AC 위에 $\overline{FG} = \sqrt{5}$를 만족하는 두 점 F, G가 있다. 사각형 DEFG의 둘레의 길이의 최솟값은? (단, $\overline{AG} < \overline{AF}$)



① $5\sqrt{19} + \sqrt{10}$　② $5\sqrt{19} + \sqrt{5}$　③ $\frac{19}{5}\sqrt{10} + \sqrt{5}$

④ $\frac{19}{5}\sqrt{5} + \sqrt{10}$　⑤ $\frac{19}{10}\sqrt{10} + \sqrt{5}$

정답 및 해설

1) ③

중선 정리에 의해

$\overline{PB}^2+\overline{PC}^2=2(\overline{PM}^2+\overline{CM}^2)$

$\therefore\ 2\overline{CM}^2=\overline{PB}^2+\overline{PC}^2-2\overline{PM}^2\ \cdots$ ㉠

직사각형 ABCD에서 피타고라스의 정리에 의해

$\overline{PA}^2+\overline{PC}^2=\overline{PB}^2+\overline{PD}^2$

$\therefore\ \overline{PB}^2=\overline{PA}^2+\overline{PC}^2-\overline{PD}^2\ \cdots$ ㉡

㉡을 ㉠에 대입하면

$2\overline{CM}^2=\overline{PA}^2+2\overline{PC}^2-\overline{PD}^2-2\overline{PM}^2$

$\therefore\ a+b+c+d=0$

2) ③

점 F는 $\triangle ABC$의 무게중심이므로 $\triangle CEF$의 넓이와 $\triangle BDF$의 넓이는 같다.

$\overline{GH}$는 각 BFD와 각 CFE의 이등분선이고,

$\overline{BF}=\frac{2}{3}$, $\overline{FE}=\frac{1}{3}$, $\overline{CF}=\frac{8}{3}$, $\overline{FD}=\frac{4}{3}$이므로

$\triangle FDG:\triangle FBG=2:1$, $\triangle FEH:\triangle FCH=1:8$

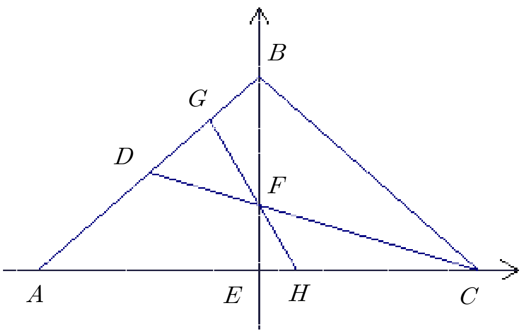
따라서 $\triangle FDG:\triangle FEH=6:1$

[다른 풀이]

$\triangle ABC$는 이등변삼각형이므로 $\overline{AC}$와 $\overline{BE}$는 수직이고

$\overline{AE}=\overline{CE}=\sqrt{7}$이다. 따라서 $\overline{BE}=\sqrt{8-7}=1$

E를 원점, $\overline{BE}$를 y축 위에 오게 좌표축을 도입하면



D는 $\overline{AB}$의 중점이므로 $D\left(-\frac{\sqrt{7}}{2},\ \frac{1}{2}\right)$

$\overline{CD}$ 직선은 $y=-\frac{1}{3\sqrt{7}}(x-\sqrt{7})=-\frac{\sqrt{7}}{21}x+\frac{1}{3}$이고

$F\left(0,\ \frac{1}{3}\right)$이다.

$\overline{EF}=\frac{1}{3}$, $\overline{CF}=\frac{8}{3}$ 그리고 $\angle EFH=\angle CFH$이므로

$\overline{EH}:\overline{HC}=\overline{EF}:\overline{CF}=1:8$이다.

따라서 $H\left(\frac{\sqrt{7}}{9},\ 0\right)$이다.

그러므로 $S_1=\frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{7}}{9}\times\frac{1}{3}=\frac{\sqrt{7}}{54}$이다.

$\overline{GH}$ 직선은 $\frac{9}{\sqrt{7}}x+3y=1$

$\overline{AB}$ 직선은 $-\frac{1}{\sqrt{7}}x+y=1$

이므로 이들의 교점은 $x=-\frac{\sqrt{7}}{6}$, $y=\frac{5}{6}$

따라서 $G\left(-\frac{\sqrt{7}}{6},\ \frac{5}{6}\right)$이다.

$\overline{AB}$ 직선 $x-\sqrt{7}y+\sqrt{7}=0$과 $F\left(0,\ \frac{1}{3}\right)$의 거리는? $\frac{\sqrt{14}}{6}$이므로

$S_2=\frac{1}{2}\times\frac{2\sqrt{2}}{3}\times\frac{\sqrt{14}}{6}=\frac{\sqrt{7}}{9}$이다.

따라서 $\frac{S_2}{S_1}=\frac{\frac{\sqrt{7}}{9}}{\frac{\sqrt{7}}{54}}=6$이다.

3) $\frac{\sqrt{15}}{3}$

$P(p,\ p)$, $Q(q,\ -q)$라 하면 $\overline{PQ}=\sqrt{6}$에서

$(q-p)^2+(-q-p)^2=(\sqrt{6})^2$

$\therefore\ p^2+q^2=3\qquad\cdots\cdots$ ㉠

이때 R의 좌표는 $\left(\frac{2p+q}{3},\ \frac{2p-q}{3}\right)$이므로

$\alpha=\frac{2p+q}{3}\qquad\therefore\ p=\frac{3\alpha-q}{2}$

이 식을 ㉠에 대입하면

$\left(\frac{3a-q}{2}\right)^2+q^2=3$

$5q^2-6ap+9a^2-12=0$

이때 실수 q가 존재해야 하므로 이 이차방정식의 판별식을 D가 $D\geq 0$이어야 한다.

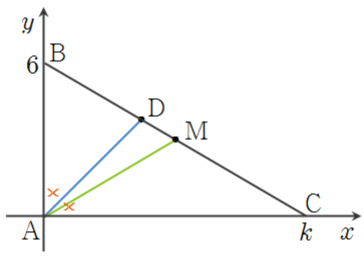
$\frac{D}{4}=(-3a)^2-5(9a^2-12)\geq 0$

$3a^2-5\leq 0$

$\therefore\ -\frac{\sqrt{15}}{3}\leq a\leq\frac{\sqrt{15}}{3}$

따라서 실수 a의 최댓값은 $\frac{\sqrt{15}}{3}$이다.

4) ④



$\overline{BC}=a$로 두면

$\overline{AD}$는 $\angle BAC$의 이등분선 이므로

$\overline{BD}:\overline{DC}=\overline{AB}:\overline{AC}=6:k$

$\therefore\ \overline{BD}=\frac{6a}{k+6}$

점M 은 빗변 $\overline{BC}$ 중점이므로 $\overline{AM}=\overline{BM}=\dfrac{a}{2}$

(∵ 빗변의 중심은 직각삼각형의 외심)

$\overline{MD}=\overline{BM}-\overline{BD}=\dfrac{6a}{k+6}-\dfrac{a}{2}$

$\overline{AB}^2+\overline{AC}^2=\overline{BC}^2=a^2$ 이므로

$\overline{AB}^2+\overline{AC}^2=2\overline{AM}^2+8\overline{MD}^2$ 에 대입하면

$a^2=2\times\left(\dfrac{a}{2}\right)^2+8\times\left(\dfrac{6a}{k+6}-\dfrac{a}{2}\right)^2$

$a^2=\dfrac{a^2}{2}+\dfrac{2a^2(k-6)^2}{(k+6)^2}$

양변을 a^2으로 나누면

$1=\dfrac{1}{2}+\dfrac{2(k-6)^2}{(k+6)^2},\ (k+6)^2=4(k-6)^2$

$k^2-20k+36=0$

만족하는 모든 k의 값의 합은 20

5) $\dfrac{10}{3}$

① 점 P는 수선의 교점이므로 수심이다.

$\overline{AD}$의 방정식 : 점 $A(8,\ 6)$을 지나고 기울기는 $\overline{OB}$에 수직이므로 수직 조건에 의하여 $\dfrac{1}{3}$, 따라서 $\overline{AD}$의 방정식은 $y=\dfrac{1}{3}(x-8)+6$

$\therefore\ x-3y+10=0$

$\overline{OC}$의 방정식 : 원점을 지나고 기울기는 $\overline{AB}$에 수직이므로 수직 조건에 의하여 2, 따라서 $\overline{OC}$의 방정식은 $y=2x$

두 방정식을 연립하면 $x=2,\ y=4$이므로 점 P의 좌표는 $(2,\ 4)$이다.

② 점 G는 무게중심이므로

$G\left(\dfrac{0+8+(-4)}{3},\ \dfrac{0+6+12}{3}\right)=\left(\dfrac{4}{3},\ 6\right)$

$\triangle$ OPG의 넓이는 $\overline{OP}$를 밑변으로 하면 높이는 점 G와 직선 OP 사이의 거리와 같다.

$\overline{OP}$의 방정식은 $2x-y=0$이고,

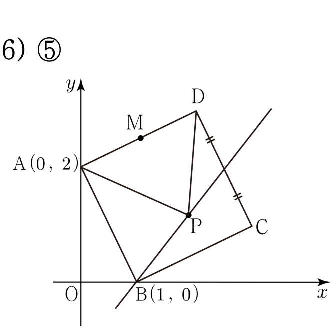
$\overline{OP}=\sqrt{2^2+4^2}=2\sqrt{5}$ 이다.

높이는 점과 직선 사이의 거리 공식에 의하여

$\dfrac{\left|\dfrac{8}{3}-6\right|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}=\dfrac{2\sqrt{5}}{3}$

따라서 $\triangle\,\mathrm{OPG}=\dfrac{1}{2}\times2\sqrt{5}\times\dfrac{2\sqrt{5}}{3}=\dfrac{10}{3}$

6) ⑤



DC의 중점과 B를 지나는 직선을 l이라 하자.

AD의 중점을 M이라고 하자. $M=\left(1,\ \dfrac{5}{2}\right)$

중선정리에 의하여

$\overline{AP}^2+\overline{DP}^2=2(\overline{AM}^2+\overline{MP}^2)=2\left(\dfrac{5}{4}+\overline{MP}^2\right)$

그러므로 $\overline{MP}$가 최소일 때, $\overline{AP}^2+\overline{DP}^2$이 최소가 된다. $\overline{MP}$가 최소가 되려면 M과 직선 l과의 최단거리일 때, 즉, P가 M의 수선의 발일 때이다.

$l:\ y=\dfrac{2-0}{\dfrac{5}{2}-1}(x-1)+0$

$=\dfrac{4}{3}x-\dfrac{4}{3}$

$\therefore\ l:4x-3y-4=0$

$\overline{MP}^2\ \geq\ \dfrac{\left(4-3\cdot\dfrac{5}{2}-4\right)^2}{4^2+3^2}=\dfrac{\dfrac{225}{4}}{25}=\dfrac{9}{4}$

$\therefore\ \overline{AP}^2+\overline{DP}^2=2\left(\dfrac{5}{4}+\dfrac{9}{4}\right)=7$

[다른 풀이]

$y=\dfrac{4}{3}x-\dfrac{4}{3}$을 지나므로 $P\left(x,\ \dfrac{4}{3}x-\dfrac{4}{3}\right)$

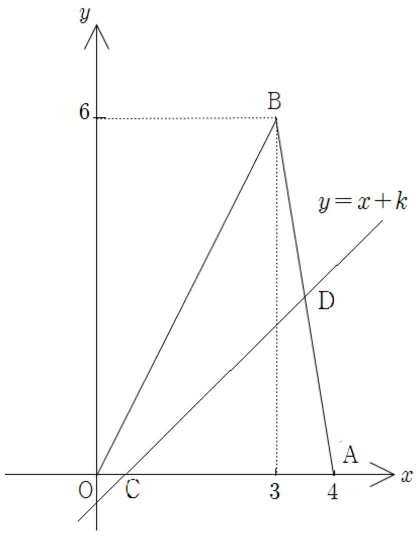
$\overline{AP}^2=x^2+\left(\dfrac{4}{3}x-\dfrac{10}{3}\right)^2$

$\overline{DP}^2=(x-2)^2+\left(\dfrac{4}{3}x-\dfrac{13}{3}\right)^2$

따라서 두 값의 합의 최솟값은 이차방정식의 최솟값과 같다.

7) ④

$y=x+k$와 x축, $\overline{AB}$와 만나는 점을 각각 C, D라 하자.



$y=x+k$의 x절편은 $-k$이므로 $C(-k,\ 0)$

직선 AB의 방정식은 $y=-6(x-4)$

$\therefore\ y=-6x+24$

이 직선과 $y=x+k$의 교점은

$D\left(\dfrac{24-k}{7},\ \dfrac{6k+24}{7}\right)$

$\triangle OAB = 4\times 6\times \frac{1}{2} = 12$

$\triangle ACD = (4+k)\times \frac{6k+24}{7}\times \frac{1}{2} = 6$

$(k+4)^2 = 14$

$k+4 = \pm\sqrt{14}$

$k = -4\pm\sqrt{14}$

$\therefore\ k = -4+\sqrt{14}\quad (\because\ -4<k<0)$

8) ②

① C는 $\overline{AB}$의 수직이등분선 위에 있고 그 직선은

$y=5(x-10)+2=5x-48$이므로 $b=5a-48$이다.

② $\overline{CE}=\overline{EQ}=2\overline{BQ}$

③ E에서 $\overline{PQ}$와 평행한 직선이 $\overline{AC}$와 만나는 점을 G, $\overline{CD}$와 만나는 점을 H라 하자.

중점 연결정리에 의해 G는 $\overline{PC}$의 중점이고

$\triangle FGE$와 $\triangle FPQ$의 닮음비는 $1:2$이다.

따라서 $\overline{FH}=\overline{DF}\times\frac{1}{2}=\frac{2}{5}\sqrt{26}$

$\overline{DH}=\overline{DF}+\overline{FH}=\frac{6}{5}\sqrt{26}$

또한 $\overline{CH}=\overline{DH}=\frac{6}{5}\sqrt{26}$이므로

$\overline{CD}=\overline{CH}+\overline{DH}=\frac{12}{5}\sqrt{26}$

④ $\triangle ABC$와 $\triangle PQC$의 닮음비는 $5:4$이므로 $\overline{CD}$ 직선과 $\overline{AB}$의 교점을 I라 하면

$\overline{CI}=\overline{CD}\times\frac{5}{4}=3\sqrt{26}$이다.

따라서 $C(a,b)$와 $\overline{AB}$ 직선 $\frac{x}{20}+\frac{y}{4}=1$의 거리가 $3\sqrt{26}$이다.

$\frac{|a+5b-20|}{\sqrt{26}}=3\sqrt{26}$에서 $|a+5b-20|=78$

⑤ $b=5a-48$과 $|a+5b-20|=78$을 연립하면

$a=13$ 또는 7이다.

$a=13$이면 $b=17$, $a=7$이면 $b=-13$이고

$b>0$이므로 $a=13,\ b=17$이다.

따라서 $a+b=30$이다.

9) ③

원의 중심을 $E(2k,k)$ 라 하자.

$2(\angle ABC+\angle BCD)=\angle AEC+\angle BED=120^\circ$이므로

$\angle CED=\angle AEB=120^\circ$이다.

따라서 원의 반지름이 $k(>0)$이므로 원의 중심 E 에서 직선 $y=ax$ 와 직선 $y=bx$ 에 이르는 거리는 $\frac{k}{2}$ 이다.

$\frac{k}{2}=\frac{|2ka-k|}{\sqrt{a^2+1}} \Leftrightarrow \sqrt{a^2+1}=2|2a-1|$

$\Leftrightarrow 15a^2-16a+3=0$ (마찬가지로 b 에 대하여서도 성립)

따라서 두 상수 곱 $ab=\frac{3}{15}=\frac{1}{5}$이다.

10) ②

점 $A(-1,\ 0)$, $B(1,\ 0)$에 대하여 $\overline{PA}:\overline{PB}=t:1$를 만족하는 점 P는 점 A와 B는 $t:1$로 내분하는 점과 외분하는 점을 지름의 양끝으로 하는 원이 된다.

즉,

내분점 $\left(\frac{t-1}{t+1},\ 0\right)$,

외분점 $\left(\frac{t+1}{t-1},\ 0\right)$

내분점과 외분점의 중점이 원의 중심이고 두 점 사이의 거리가 지름이 된다.

따라서, 원의 중심은 $\left(\frac{t^2+1}{t^2-1},\ 0\right)$이고

반지름의 길이는 $\frac{2t}{t^2-1}$

한편,

직선 $\frac{x}{5}+\frac{\sqrt{2}}{5}y=1$과 도형 S_t가 접하려면

원의 중심과 직선 사이의 거리가 반지름의 길이와 같아야 한다.

$\therefore\ \frac{\left|\frac{t^2+1}{t^2-1}-5\right|}{\sqrt{1+(\sqrt{2})^2}}=\frac{2t}{t^2-1}\quad (t>1)$

$\left|\frac{6-4t^2}{t^2-1}\right|=\frac{2\sqrt{3}t}{t^2-1}\qquad\cdots(*)$

이때,

(i) $6-4t^2>0$이면

$6-4t^2=2\sqrt{3}t$

$2t^2+\sqrt{3}t-3=0$

$\therefore\ t=-\sqrt{3}$ 또는 $t=\frac{\sqrt{3}}{2}$

이는 $t>1$을 만족하지 않는다.

(ii) $6-4t^2<0$이면

$(*)$에서

$4t^2-2\sqrt{3}t-6=0$

$\therefore\ t=\frac{\sqrt{3}\pm\sqrt{27}}{4}$

$\therefore\ t=\sqrt{3}$ 또는 $t=-\frac{\sqrt{3}}{2}$

$t>1$일 때, $t=\sqrt{3}$

$\therefore\ r=\sqrt{3}$이므로 원의 넓이는 3π

11) ④

l_1과 l_3의 기울기의 곱이 -1이므로 서로 수직으로 만난다. l_1은 항상 $(2,\ 0)$을 지나고, l_3는 항상 $(5,\ 3)$을 지나므로 l_1과 l_3의 교점의 자취는 $(2,\ 0)$과 $(5,\ 3)$을 지름의 양끝으로 하는 원이다.

마찬가지로 l_2과 l_3의 기울기의 곱이 -1이므로 서로 수직으로 만난다.

l_2은 항상 $(\frac{k}{2},\ 2)$를 지나고, l_3는 항상 $(5,\ 3)$을 지나므로 l_1과 l_3의 교점의 자취는 $(\frac{k}{2},\ 2)$와 $(5,\ 3)$을 지름의 양끝으로 하는 원이다.

두 원의 넓이가 같으므로 지름의 길이도 같다.

$\sqrt{(5-2)^2+(3-0)^2}=\sqrt{\left(\frac{k}{2}-5\right)^2+(2-3)^2}$

$k=10\pm 2\sqrt{17}$

k값들이 합은 20

12) (1) 3 (2) 1개

(1) 직선 PQ의 방정식은

$y=\frac{a^2-b^2}{a-b}(x-a)+a^2,$

$(a+b)x-y-ab=0$이 된다.

직선 PQ는 원과 접하므로 원의 중심과의 거리는 반지름과 같다.

$\therefore\ \frac{|-2-ab|}{\sqrt{(a+b)^2+1}}=1$

양 변을 제곱해서 정리하면

$(a-b)^2-a^2b^2=3\ \cdots\cdots$ ㉠

(2) 점 R의 x좌표를 c라고 하면 (1)번과 마찬가지로

$(a-c)^2-a^2c^2=3\ \cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡의 두 식의 관계에서 에서 $b,\ c$는

이차방정식 $(a-x)^2-a^2x^2-3=0$의 두 근이다.

이 이차방정식을 x에 대하여 내림차순으로 정리하면

$(1-a^2)x^2-2ax+a^2-3=0$

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의해

$b+c=\frac{2a}{1-a^2},\ bc=\frac{a^2-3}{1-a^2}\ \cdots\cdots$ ㉢

직선 QR의 방정식은

$y=\frac{b^2-c^2}{b-c}(x-b)+b^2,$

$(b+c)x-y-bc=0$

직선 QR과 원의 중심과의 거리는

$\frac{|-2-bc|}{\sqrt{(b+c)^2+1}}$ 이고 ㉢의 식을 대입하면

$$\frac{|-2-bc|}{\sqrt{(b+c)^2+1}}=\frac{\left|-2-\frac{a^2-3}{1-a^2}\right|}{\sqrt{\left(\frac{2a}{1-a^2}\right)^2+1}}$$

$$=\frac{|a^2+1|}{\sqrt{(a^2+1)^2}}=1$$

$\therefore$ 직선 QR과 원의 중심과의 거리 반지름 1과 같으므로 직선 QR 원과 접하고 교점의 개수는 1개다.

13) ②

점 $\mathrm{C}(t,\ tm)$이라고 하면 점 $\mathrm{A}(tm,\ t)$이고 삼각형 OAB가 이등변삼각형이므로 점 $\mathrm{B}(0,\ 2t)$임을 쉽게 알 수 있다. 선분 AB의 직선의 방정식을 세우면 $y=-\frac{1}{m}x+2t$이고 $y=mx$와 서로 수직임을 알 수 있으므로 삼각형 ODE는 직각삼각형, 외접원의 지름이 곧 선분 OD가 된다.

점 D는 $y=x$와 $y=-\frac{1}{m}x+2t$의 교점이므로 $\mathrm{D}\left(\frac{2tm}{m+1},\ \frac{2tm}{m+1}\right)$

$\overline{\mathrm{OD}}=\frac{2\sqrt{2}\,tm}{m+1}$

외접원의 넓이 : $\frac{2m^2}{m^2+2m+1}t^2\pi$

$a=2,\ b=1,\ c=2$

$a+b+c=5$

14) 15

$C_1:(x-5)^2+(y-5)^2=5^2$

$C_2:(x-15)^2+(y-10)^2=5^2$

C_3는 C_1을 $x+3y-25=0$인 l직선에 대하여 대칭

$(5,\ 5)$를 l에 선대칭하면 $(6,8)$이므로

C_2와 C_3의 중심 사이의 거리가 $\sqrt{85}$이므로

$\frac{\overline{\mathrm{QR}}}{2}=\sqrt{5^2-\left(\frac{\sqrt{85}}{2}\right)^2}=\sqrt{\frac{15}{4}}$

$\therefore\ \overline{\mathrm{QR}}^2=15$

15) ⑤

$\mathrm{A}(4,\ 4),\ \mathrm{B}(0,\ 0)\,\mathrm{C}(6,\ 0)$이라 하자.

그러면 $\overline{\mathrm{AB}}$의 직선의 방정식은 $y=x$

$\overline{\mathrm{AC}}$의 직선의 방정식은 $y=-2x+12$이다.

$\mathrm{G}(a,\ -2a+12),\ \mathrm{F}(a+1,\ -2a+10)$이라 하자.

G를 $y=x$ 대칭이동한 점 $\mathrm{G}'(-2a+12,\ a)$

F를 x축에 대칭이동한 점 $\mathrm{F}'(a+1,\ 2a-10)$

$\overline{\mathrm{G'F'}}=\sqrt{(3a-11)^2+(a-10)^2}=\sqrt{10a^2-86a+221}$

$\therefore\ a=\frac{43}{10}$일 때, $\overline{\mathrm{G'F'}}$의 최소 $=\frac{19}{10}\sqrt{10}$

$\therefore$ □DEFG의 둘레의 최소는 $\frac{19}{10}\sqrt{10}+\sqrt{5}$