2020

휴원기간 보강

백 인 대 장

수학(상)
원의 방정식

100人대장

'Quality Education Creation'

- 백인대장 훈련소-

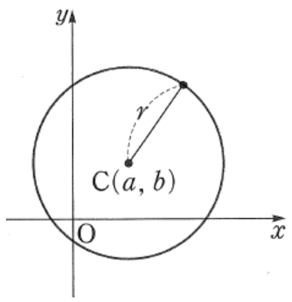
원의 방정식

중심이 점 (a, b)이고 반지름의 길이가 r인 원의 방정식은

$$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$$

특히, 중심이 원점이고 반지름의 길이가 r인 원의 방정식은

$$x^2+y^2=r^2$$



Ex. 점 $(2, 4)$를 중심으로 하고 반지름의 길이가 4인 원의 방정식은

$(x-2)^2+(y-4)^2=4^2$ 이다.

이차방정식 $x^2+y^2+Ax+By+C=0$ 이 나타내는 도형은

주어진 이차방정식을 변형하여

$$\left(x+\frac{A}{2}\right)^2+\left(y+\frac{B}{2}\right)^2=\frac{A^2+B^2-4C}{4}$$

로 만들면

(i) $A^2+B^2-4C>0$ 이면 중심이 $\left(-\frac{A}{2}, -\frac{B}{2}\right)$, 반지름이 $\frac{\sqrt{A^2+B^2-4C}}{2}$ 인 원

(ii) $A^2+B^2-4C=0$ 이면 점 $\left(-\frac{A}{2}, -\frac{B}{2}\right)$: 원이 아니다.

(iii) $A^2+B^2-4C<0$ 을 만족하는 실수 x, y는 존재하지 않는다.

▷ 기출 확인하기

[내신대장 215p.6]

1. $x^2+y^2-2x+8y+k^2-16k=0$이 원을 나타내도록 하는 자연수 k의 개수는?

① 14 ② 15 ③ 16 ④ 17 ⑤ 18

[내신대장 215p.7]

2. 방정식

$$x^2+y^2-4kx-2y+3k+1=0$$

이 나타내는 도형이 제1 사분면에 있는 원일 때,
양수 k의 값의 범위는 $p<k\le q$이다. 이때, 실수 p, q의 합 $p+q$의 값을 구하시오.
(단, 제1 사분면에 있는 원은 x축 또는 y축에 접하는 경우도 포함한다.)

☑ **Check point!**

제1사분면의 원이 되려면

(1) 중심의 좌표가 제1사분면에 있어야 한다.
(2) 반지름은 양수가 되어야 한다.
(3) |중심의 y좌표| 가 반지름의 길이보다 작거나 같아야 한다!
(단, 축을 포함할 경우)

이차방정식의 꼴로 주어진 경우,
반드시 $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$ 꼴로 바꾸어 중심과 반지름을 파악하도록 하자!

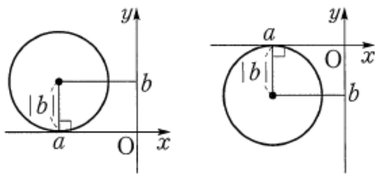
좌표축에 접하는 원의 방정식

(1) x축에 접하는 방정식

중심이 (a, b)인 원이 x축에 접하면

(반지름의 길이) $= |b|$

$(x-a)^2+(x-b)^2 = b^2$

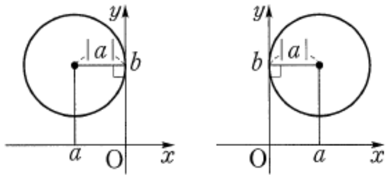


(2) y축에 접하는 방정식

중심이 (a, b)인 원이 y축에 접하면

(반지름의 길이) $= |a|$

$(x-a)^2+(x-b)^2 = a^2$



▷ 기출 확인하기

[내신대장 216p.10]

3. 중심이 직선 $x+ay+b=0$ 위에 있고 x 축과 y 축에 동시에 접하는 원이 한 개 존재한다.
그 원의 넓이가 4π일 때, $a+b$의 최댓값은?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

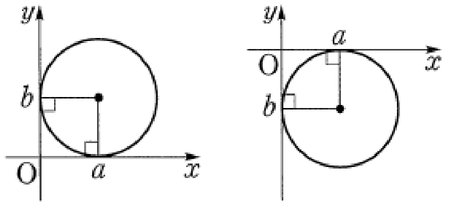
(3) x, y축에 동시에 접하는 방정식

중심이 (a, b)인 원이 x축, y축에 동시에 접하면

(반지름의 길이) $= |a| = |b|$

(i) $a=b$일 때, $(x-a)^2+(x-a)^2 = a^2$

(ii) $a=-b$일 때, $(x-a)^2+(x+a)^2 = a^2$

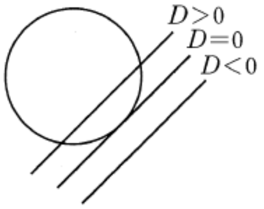


원과 직선의 위치관계

(1) 판별식을 이용

원과 직선의 방정식을 연립하여 얻은 이차방정식의 판별식을 D라 하면

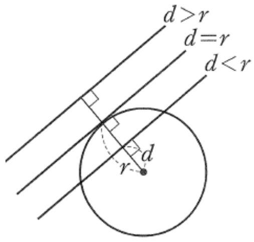
$D>0$ 서로 다른 두 점에서 만난다.
$D=0$ 한 점에서 만난다. (접한다)
$D<0$ 만나지 않는다.



(2) 중심과 직선사이의 거리를 이용

원의 중심과 직선 사이의 거리를 d, 반지름의 길이를 r이라 하면

$d<r$ 서로 다른 두 점에서 만난다.
$d=r$ 한 점에서 만난다. (접한다)
$d<r$ 만나지 않는다.



▷ 기출 확인하기

[내신대장 219p.19]

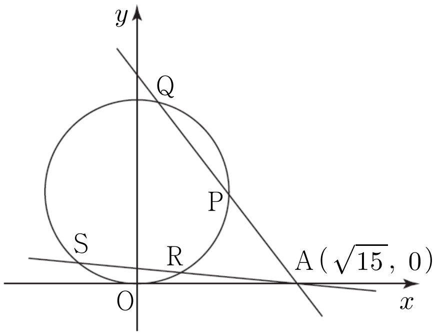
4. 원 $x^2+y^2-2x+2y=0$ 위의 한 점 $\mathrm{P}(x,\ y)$에 대하여 $\dfrac{y+3}{x+2}$의 최댓값을 M, 최솟값을 m이라 할 때, $M+m$의 값은?

① $\dfrac{6}{7}$ ② $\dfrac{8}{7}$ ③ $\dfrac{10}{7}$ ④ $\dfrac{12}{7}$ ⑤ $\dfrac{15}{7}$

[내신대장 221p.23]

점과 직선사이의 거리를 활용하자!

5. 다음 그림과 같이 점 $\mathrm{A}(\sqrt{15},\ 0)$를 지나는 두 직선이 원 $x^2+(y-3)^2=9$과 $\mathrm{P},\ \mathrm{Q},\ \mathrm{R},\ \mathrm{S}$에서 만난다. $\overline{\mathrm{AP}}=\overline{\mathrm{AR}}=3$일 때, 두 직선의 기울기의 합을 구하시오. (단, O는 원점이다.)



[내신대장 222p.27]

점과 직선사이의 거리를 활용하자!

6. 좌표평면 위의 두 점 $\mathrm{A}(-4,\ 0)$, $\mathrm{B}(0,\ -3)$과 원 $(x-3)^2+(y-4)^2=9$ 위를 움직이는 점 P에 대하여 삼각형 ABP의 넓이가 자연수가 되도록 하는 점 P의 개수는?

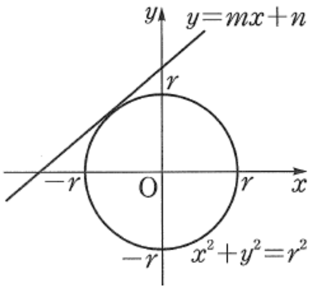
① 10 ② 15 ③ 20 ④ 25 ⑤ 30

원의 접선의 방정식

(1) 기울기가 주어진 경우

좌표평면에서 원 $x^2+y^2=r^2$에 접하고 기울기가 m인 접선의 방정식은

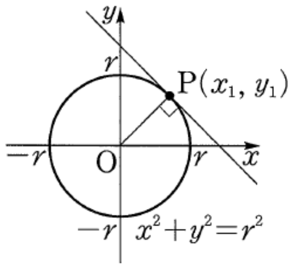
$$y=mx\pm r\sqrt{m^2+1}$$



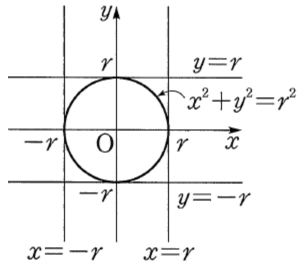
(2) 원 위의 점이 주어진 경우

원 위의 점 (x_1, y_1)에서의 접선의 방정식은

$$xx_1+yy_1=r^2$$



(i) $x_1y_1\neq 0$



(ii) $x_1=0,\ y_1=0$

▷ 기출 확인하기

[내신대장 224p.35]

원의 중심이 원점이 아닐 때는 How?

7. 원 $x^2+y^2=25$ 위의 점 $(-4,\ 3)$에서의 접선이 원 $x^2+y^2-4x-2y-k=0$에 접할 때, 실수 k의 값을 구하시오.

[내신대장 225p.37]

원 밖의 한 점에서 그은 접선의 방정식

8. 점 $\mathrm{A}(3,\ 0)$에서 원 $x^2+y^2=4$에 그은 접선의 기울기를 k라 할 때, 모든 k의 값의 곱을 구하시오.

[내신대장 235p.74]

접선의 방정식 활용

9. 좌표평면 위의 직선 l에 대하여 직선 l과 원 $(x-1)^2+(y+3)^2=4$가 점 A에서 접하고,
직선 l과 원 $(x-6)^2+(y-2)^2=9$가 점 B에서 접한다.
$\overline{\mathrm{AB}}=k$일 때, 모든 실수 k의 값의 합을 구하시오.

[내신대장 223p.29]

원의 방정식 활용

10. 좌표평면에 원 $C: x^2+y^2=5$와 두 점 $\mathrm{A}(-1, 8)$, $\mathrm{B}(5, 0)$이 있다.
원 C 위의 점 P에 대하여 $\overline{\mathrm{PA}}^2+\overline{\mathrm{PB}}^2$의 값이 최대일 때와 최소일 때,
삼각형 PAB의 넓이를 각각 M, m이라 하자. $M\times m$의 값은?

① 275 ② 300 ③ 325 ④ 350 ⑤ 375

정답 및 해설

정답 확인하기

1. ③	2. $\frac{7}{4}$	3. ⑤	4. ④	5. $-\frac{6}{7}\sqrt{15}$
6. ⑤	7. 31	8. $-\frac{4}{5}$	9. 12	10. ①

1.

$(x-1)^2+(y+4)^2-17+k^2-16k=0$

$\Rightarrow (x-1)^2+(y+4)^2=-k^2+16k+17$

$-k^2+16k+17$은 원의 반지름 제곱이므로 양수

$-k^2+16k+17>0$

$\Rightarrow k^2-16k-17<0$

$\Rightarrow (k-17)(k+1)<0$

$\Rightarrow -1<k<17$

따라서 자연수 k의 개수는 16

3.

x축과 y축에 동시에 접하는 원의 중심은 $y=x$ 또는 $y=-x$ 위에 존재한다.

따라서 직선 $x+ay+b=0$과 $y=x$ 또는 $y=-x$와의 교점의 개수는 1개여야 한다.

a 값으로 가능한 것은 1 또는 -1이다.

첫째, $a=1$인 경우 원의 반지름이 2이므로 $(2,\ 2)$ 또는 $(-2,\ -2)$를 지나야 한다.

이때의 b 값은 각각 -4와 4다.

둘째, $a=-1$인 경우 $(2,\ -2)$ 또는 $(-2,\ 2)$를 지나야 한다.

이때의 b 값은 각각 -4와 4다.

그러므로 구하고자 하는 $a+b$의 최댓값은 $1+4=5$

5.

$\overline{AQ}^2=\overline{AP}\times(\overline{AQ})$, $(\sqrt{15})^2=3(3+\overline{QP})$

$5=3+\overline{QP} \quad \therefore\ \overline{QP}=2$

$\overline{PQ}$의 중점과 원의 중심 $(0,\ 3)$거리 $d=2\sqrt{2}$

직선 $\overline{AQ}$: $y=m(x-\sqrt{15})$, $mx-y-\sqrt{15}m=0$

직선 $\overline{AQ}$와 원의 중심 $(0,\ 3)$거리

$\Rightarrow \dfrac{|-3-\sqrt{15}m|}{\sqrt{m^2+1}}=2\sqrt{2}$

$15m^2+6\sqrt{15}m+9=8m^2+8$

$7m^2+6\sqrt{15}m+1=0$, m의 값의 합 $=-\dfrac{6\sqrt{15}}{7}$

2.

$(x-2k)^2+(y-1)^2=4k^2-3k$가 원이어야 하므로 반드시 $4k^2-3k>0$이어야 한다. 즉, $k>\frac{3}{4}$이고 또한 1사분면에 있거나 축에 접하는 상황이어야 한다.

$2k>\frac{3}{2}$이므로 $1\ge 4k^2-3k$

$(4k+1)(k-1)\le 0$, $\frac{3}{4}<k\le 1$

$p+q=\frac{7}{4}$

4.

$\dfrac{y+3}{x+2}=\dfrac{y-(-3)}{x-(-2)}$이므로 점 $(-2,\ -3)$과 점 $(x,\ y)$를 지나는 직선의 기울기이다.

따라서 $\dfrac{y+3}{x+2}$은 점 $(-2,\ -3)$을 지나면서

원 $x^2+y^2-2x+2y=0$과 만나는 직선의 기울기이다.

점 $(-2,\ -3)$을 지나면서 기울기가 k인 직선은

$y=k(x+2)-3$, 즉 $kx-y+2k-3=0$

이 직선과 원 $x^2+y^2-2x+2y=0$과 만나므로 원의 중심 $(1,\ -1)$과 직선 사이의 거리는 원의 반지름 $\sqrt{2}$ 보다 작거나 같다.

$\dfrac{|3k-2|}{\sqrt{k^2+1}}\le\sqrt{2}$ 양변을 제곱하여 정리하면 $7k^2-12k+2\le 0$

근과 계수의 관계에서 $M+m=\dfrac{12}{7}$

6. AB의 직선의 방정식은 $3x+4y+12=0$이고 $\overline{AB}=5$이다.

원의 중심 $(3,\ 4)$에서 직선 사이의 거리가 $\dfrac{|9+16+12|}{\sqrt{25}}=\dfrac{37}{5}$

따라서 $\triangle ABP$의 높이의 범위 $\dfrac{22}{5}\le h\le\dfrac{52}{5}$

$\triangle ABP$의 넓이가 자연수가 되려면 h의 분자가 짝수

$h=\dfrac{22}{5},\ \dfrac{52}{5}$ 각 1개

그 외 $\dfrac{24}{5},\ \dfrac{26}{5},\ \cdots,\ \dfrac{50}{5}$ 각 2개

$\therefore$ 30개

7.

$-4x+3y=25 \sim (2,\ 1)=\sqrt{k+5}$

$(x-2)^2+(y-1)^2=k+5$

$\dfrac{|-8+3-25|}{5}=\sqrt{k+5}=6$

$k+5=36,\ k=31$

8.

$(3,\ 0)$을 지나는 직선을 $y=k(x-3)$이라 두면 $kx-y-3k=0$으로 쓸 수 있다.

이 직선이 원 $x^2+y^2=4$와 접하려면 중심인 원점과 직선 사이의 거리가 반지름의 길이인 2와 같아야 하므로 $\dfrac{|-3k|}{\sqrt{k^2+1}}=2$이다. 정리하면

$5k^2-4=0$이므로 두 기울기의 곱은 $-\dfrac{4}{5}$

9.

10.

선분 AB의 중점을 M이라고 하면 중선정리에 의하여

$\overline{\mathrm{PB}}^2+\overline{\mathrm{PA}}^2=2\left(\overline{\mathrm{PM}}^2+\overline{\mathrm{AM}}^2\right)$

여기서 선분 AM의 길이가 일정하므로 PM이 최대일 때 $\overline{\mathrm{PA}}^2+\overline{\mathrm{PB}}^2$값이 최댓값 갖는다.

선분 PM의 길이가 최대일때는 선분 OM의 거리에 반지름의 길이를 더한 것이다.

점 O와 중점 M을 지나는 직선의 방정식을 구하면

$y=2x$

$x^2+4x^2=5 \qquad \therefore\ x=\pm 1$

삼각형의 넓이는 점 $\mathrm{P}(1,\ 2)$일 때 최소, 점 $\mathrm{P}(-1,\ -2)$일 때 최대가 된다.

점 $\mathrm{P}(1,\ 2)$에서 직선 AB까지의 거리는 $\dfrac{|4+6-20|}{5}=2$

삼각형의 넓이는 $\dfrac{1}{2}\times 2\times 10=10$

점 $\mathrm{P}(-1,\ -2)$에서 직선 AB까지의 거리를 구하면

$\dfrac{|-4-6-20|}{5}=6$

삼각형의 넓이는 $\dfrac{1}{2}\times 6\times 10=30$

그러므로 $M\times m=300$