2020

휴원기간 보강

백 인 대 장

수학(상)

-평면 좌표 : 점과 직선-

100人대장

'Quality Education Creation'

▶ 평면좌표에서의 기본배경지식

(1) 두 점 사이의 거리

좌표평면 위의 두 점 $A(x_1,\ y_1)$, $B(x_2,\ y_2)$ 에서

$$\overline{AB}=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$$

(2) 중선정리

삼각형 ABC에서 변 BC의 중점을 M이라 할 때, 다음이 성립한다.

$$\overline{AB}^2+\overline{AC}^2=2(\overline{AM}^2+\overline{BM}^2)$$

(3) 내분점과 외분점

두 점 $A(x_1,\ y_1)$, $B(x_2,\ y_2)$ 를 $m:n$ $(m>0,\ n>0)$ 으로 내분하는 점을 P, 외분하는 점을 Q 라 하면

$$P\left(\frac{mx_2+nx_1}{m+n},\ \frac{my_2+ny_1}{m+n}\right)$$

$$Q\left(\frac{mx_2-nx_1}{m-n},\ \frac{my_2-ny_1}{m-n}\right)\ \text{(단, } m\neq n\text{)}$$

(4) 직선의 방정식

① 기울기가 m이고 점$(x_1,\ y_1)$을 지나는 직선의 방정식

$$y-y_1=m(x-x_1)$$

② 두 점 $(x_1,\ y_1)$, $(x_2,\ y_2)$를 지나는 직선의 방정식

$$\begin{cases} y-y_1=\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x-x_1) & (x_1\neq x_2) \\ x=x_1 & (x_1=x_2) \end{cases}$$

(5) 두 직선의 위치관계

두 직선 $ax+by+c=0,\ a'x+b'y+c'=0$ 에 대하여

① 평행 : $\dfrac{a}{a'}=\dfrac{b}{b'}\neq\dfrac{c}{c'}$

② 일치 : $\dfrac{a}{a'}=\dfrac{b}{b'}=\dfrac{c}{c'}$

③ 수직 : $aa'+bb'=0$

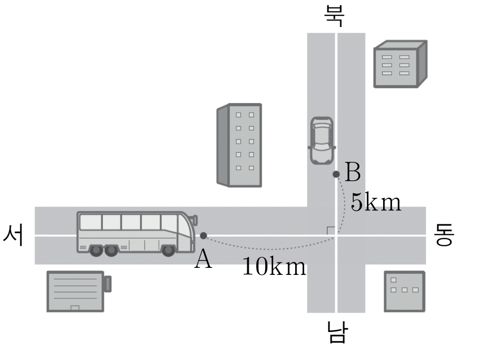
(6) 점과 직선사이의 거리

점 $(x_1,\ y_1)$과 직선 $ax+by+c=0$ 사이의 거리 d는

$$d=\frac{|ax_1+by_1+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

두 점사이의 거리, 선분의 내/외분점

1. 다음 그림과 같이 수직으로 만나는 두 직선 도로 위의 두 지점 A, B에서 각각 버스와 승용차가 동시에 출발하여 다음 조건을 만족시키면서 달린다. 버스와 승용차 사이의 거리가 가장 가까워지는 것은 출발 후 t분이 지났을 때이다. t의 값은?
(단, 버스와 승용차의 크기와 도로의 폭은 무시한다.)



 : A 지점에서 출발하여 동쪽으로 매분 $1\mathrm{km}$의 속력으로 달린다.
 : B 지점에서 출발하여 남쪽으로 매분 $2\mathrm{km}$의 속력으로 달린다.

① 2　　② 3　　③ 4　　④ 5　　⑤ 6

2. 좌표평면 위의 점 $(x,\ y)$에 대하여 다음 식의 최솟값은?

$$\sqrt{x^2+y^2}+\sqrt{(x+6)^2+(y-8)^2}$$

① 9　　② $9\sqrt{3}$　　③ 10　　④ $10\sqrt{2}$　　⑤ 11

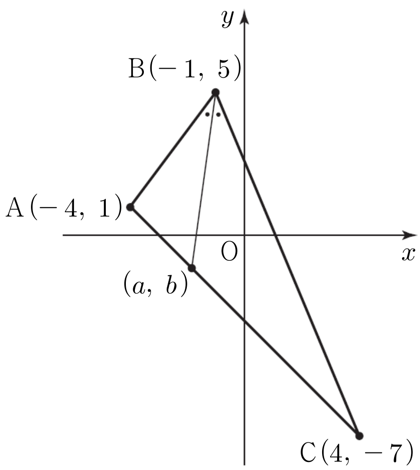
3. 좌표평면 위의 두 점 $\mathrm{A}(-2,\ 5)$, $\mathrm{B}(6,\ -3)$을 잇는 선분 AB를 $t:(1-t)$로 내분하는 점이 제1사분면에 있을 때, t의 값의 범위가 $a<t<b$일 때, $a+b$의 값은? 단, $0<t<1$)

① $\frac{7}{8}$　② $\frac{6}{7}$　③ $\frac{5}{6}$　④ $\frac{4}{5}$　⑤ $\frac{3}{4}$

4. 삼각형 ABC에서 선분 BC를 $1:2$로 내분하는 점을 D, 선분 BC를 $3:2$으로 외분하는 점을 E, 선분 AB를 $1:2$로 외분하는 점을 F라 하자. 삼각형 FBE의 넓이는 삼각형 ABD 넓이의 k배이다. 실수 k의 값은?

① 10　② 12　③ 14　④ 16　⑤ 18

5. 그림과 같이 세 점 $\mathrm{A}(-4,\ 1)$, $\mathrm{B}(-1,\ 5)$, $\mathrm{C}(4,\ -7)$를 꼭짓점으로 하는 삼각형 ABC에 대하여 각 B의 이등분선이 변 AC와 만나는 점의 좌표를 $(a,\ b)$라 할 때, $a+b$의 값을 구하시오.



삼각형의 무게중심

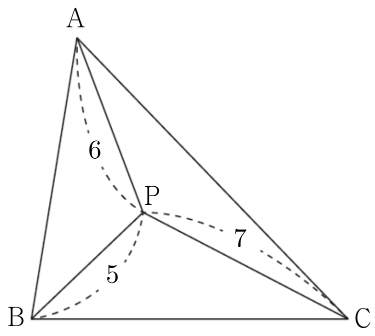
6. $\mathrm{A}(1,\ 3)$, $\mathrm{B}(3,\ 1)$, $\mathrm{C}(4,\ 6)$과 좌표평면 위를 움직이는 점 $\mathrm{P}(x,\ y)$에 대하여 $\overline{\mathrm{AP}}^2+\overline{\mathrm{BP}}^2+\overline{\mathrm{CP}}^2$의 값이 최소가 될 때의 점 P의 좌표가 $(a,\ b)$라고 한다. 상수 a, b의 합 $a+b$의 값은?

① $\dfrac{16}{3}$　② $\dfrac{17}{3}$　③ 6　④ $\dfrac{19}{3}$　⑤ $\dfrac{20}{3}$

7. 삼각형 ABC의 세 꼭짓점의 좌표를 각각 $\mathrm{A}(a,\ 3)$, $\mathrm{B}(-1,\ b)$, $\mathrm{C}(4,\ -5)$라고 하자. 세 변 AB, BC, CA를 $2:1$로 외분하는 점을 각각 D, E, F라 할 때, 삼각형 DEF의 무게중심의 좌표가 $(4,\ 0)$이다. $a-b$의 값을 구하시오. (단, a, b는 상수이다.)

중선정리

8. $\triangle ABC$의 내부의 넓이가 3등분이 되도록 점 P를 잡았더니 $\overline{AP}=6$, $\overline{BP}=5$, $\overline{CP}=7$ 이었다. 이때, 선분 BC의 길이는?



① $2\sqrt{7}$ ② $3\sqrt{7}$ ③ $4\sqrt{7}$ ④ $5\sqrt{7}$ ⑤ $6\sqrt{7}$

9. $\angle B=90°$, $\overline{AB}=2$, $\overline{BC}=4$인 직각삼각형 ABC에서 점 P가 변 AC 위를 움직일 때, $5\left(\overline{PB}^2+\overline{PC}^2\right)$의 최솟값은?

① 45 ② 46 ③ 47 ④ 48 ⑤ 49

직선의 방정식

10. 좌표평면 위의 세 점 $\mathrm{A}(3,\ 0)$, $\mathrm{B}(1,\ 4)$, $\mathrm{C}(1,\ -2)$를 꼭짓점으로 하는 삼각형 ABC의 외심의 좌표를 구하시오.

11. 두 점 $\mathrm{A}(2,\ -1)$, $\mathrm{B}(-1,\ 3)$을 이은 선분 AB와 직선 $mx-y+3m-2=0$이 만나도록 하는 상수 m의 값의 범위는 $\alpha \le m \le \beta$일 때, $\alpha\beta$의 값은?

① -3　② -1　③ $-\frac{1}{2}$　④ 1　⑤ $\frac{1}{2}$

12. 두 직선 $l : ax - y + a + 2 = 0$, $m : 4x + ay + 3a + 8 = 0$ 에 대하여 <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? (단, a 는 실수이다.)

〈 보 기 〉

ㄱ. 직선 l 은 a 의 값에 관계없이 항상 점 $(1,\ 2)$을 지난다.
ㄴ. $a = 0$ 일 때, 두 직선 l 과 m 은 서로 수직이다.
ㄷ. 두 직선 l 과 m 이 평행이 되기 위한 a 의 값은 존재하지 않는다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄴ ④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄴ, ㄷ

13. 세 점 $\mathrm{A}(1,\ -1),\ \mathrm{B}(-4,\ 3),\ \mathrm{C}(2,\ 9)$를 꼭짓점으로 하는 삼각형 ABC의 넓이가 직선 $(k+4)x-(k-3)y-2k-1=0$에 의하여 이등분될 때, 상수 k의 값은?

① $\frac{13}{9}$ ② $\frac{11}{9}$ ③ 1 ④ $\frac{11}{7}$ ⑤ $\frac{13}{7}$

14. 세 직선 $2x+y-3=0$, $3x-2y-1=0$, $y=ax$에 대하여 다음 조건을 만족시키는 상수 a의 값을 모두 구하시오.

(1) 세 직선으로 삼각형이 만들어지지 않는 경우

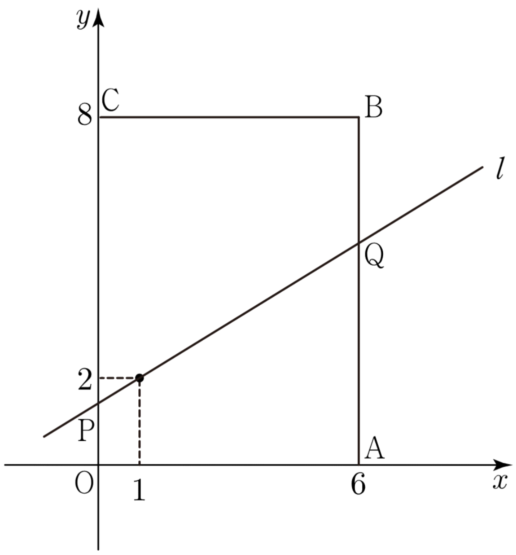
(2) 세 직선으로 직각삼각형이 만들어지는 경우

15. 원점과 직선 $(k+1)x+(k+3)y+2=0$ 사이의 거리의 최댓값을 구하시오.

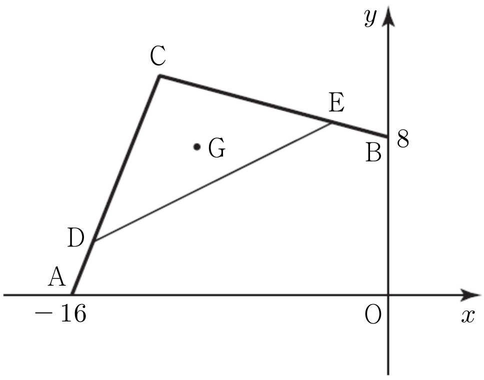
16. 두 직선 $2x-y+1=0$, $x-2y-1=0$이 만나서 이루는 예각의 이등분선의 방정식은?

① $x+y=0$ ② $x-y=0$ ③ $x+y-2=0$
④ $x-y+2=0$ ⑤ $x+y+2=0$

17. 그림과 같이 네 점 $\mathrm{O}(0,\ 0)$, $\mathrm{A}(6,\ 0)$, $\mathrm{B}(6,\ 8)$, $\mathrm{C}(0,\ 8)$를 꼭짓점으로 하는 직사각형 OABC가 있다. 점 $(1,\ 2)$를 지나는 직선 l과 $\overline{\mathrm{OC}}$, $\overline{\mathrm{AB}}$가 만나는 점을 각각 P, Q라 하면 사각형 OAQP와 사각형 PQBC의 넓이의 비가 $1:2$일 때, 직선 l의 기울기를 구하시오.



18. 그림과 같이 두 점 $\mathrm{A}(-16,\ 0)$, $\mathrm{B}(0,\ 8)$와 제2사분면 위에 있는 점 $\mathrm{C}(a,\ b)$가 $\overline{\mathrm{AC}}=\overline{\mathrm{BC}}$를 만족시킨다. 두 선분 AC, BC를 $1:3$으로 내분하는 점을 각각 D, E라 할 때, 삼각형 CDE의 무게중심을 G라 하자. 선분 CG의 길이가 $2\sqrt{5}$일 때, $3a+b$의 값을 구하시오.



정답 및 해설

1) ③

두 도로가 만나는 점을 원점 $O(0,\ 0)$이라 하자.
그러면 시간에 따른 버스의 위치 $A(-10+t,\ 0)$ 이고, 승용차의 위치$B(0,\ 5-2t)$이다.
$\overline{AB}=\sqrt{(t-10)^2+(5-2t)^2}=\sqrt{5t^2-40t+125}$ 이 최소가 되었을 때의 시각 t를 구하자.
$\therefore t=\dfrac{40}{2\times5}=4$ 일 때, 최솟값 을 갖는다.

2) ③

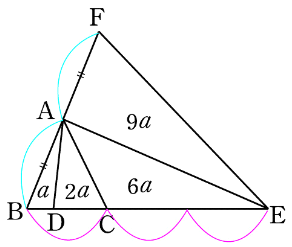
$\sqrt{x^2+y^2}$ 은 점 $(x,\ y)$와 점 $(0,\ 0)$사이의 거리와 같고,
$\sqrt{(x+6)^2+(y-8)^2}$ 은 점 $(x,\ y)$와 점 $(-6,\ 8)$사이의 거리와 같다.
따라서 주어진 식의 최솟값은 $(0,\ 0)$과 $(-6,\ 8)$사이의 거리와 같고 그 값은 10이다.

3) ①

$A(-2,\ 5)$, $B(6,\ -3)$을 $t:(1-t)$로 내분하는 점P의 좌표는
$P=(8t-2,\ -8t+5)$. 점P가 1사분면 위의 점이므로
$8t-2>0 \Leftrightarrow t>\dfrac{1}{4}$, $-8t+5>0 \Leftrightarrow t<\dfrac{5}{8}$
$a=\dfrac{1}{4},\ b=\dfrac{5}{8}$

4) ⑤

삼각형 ABD의 넓이를 a라고 하면
선분 BC를 $1:2$로 내분하였으므로 삼각형 $\triangle ADC$의 넓이는 $2a$, 선분 BC를 $3:2$으로 외분하였으므로
$\triangle ACE$의 넓이는 $6a$, 선분 AB를 $1:2$로 외분하였으므로 $\triangle FAE$의 넓이는 $9a$
따라서 삼각형 FBE는 삼각형 ABD넓이의 18배이다.



5) -3

$\overline{AB}=\sqrt{(-4+1)^2+(1-5)^2}=5$
$\overline{BC}=\sqrt{(4+1)^2+(-7-5)^2}=13$
$\therefore\ \overline{AB}:\overline{BC}=5:13,\ \overline{AO}:\overline{OC}=5:13$
점 $O(a,\ b)$는 $\overline{AB}$를 $3:13$으로 내분한 점
$A(-4,\ 1)$, $C(4,\ -7)$
$O\left(\dfrac{20-52}{18},\ \dfrac{-35+13}{18}\right)=\left(-\dfrac{16}{9},\ -\dfrac{11}{9}\right)$
$\therefore\ a+b=\dfrac{-27}{9}=-3$

6) ③

7) 7

일정비로 내/외분한 점들로 만든 삼각형의 무게중심은 원래 무게중심과 일치
$\left(\dfrac{a-1+4}{3},\ \dfrac{3+b-5}{3}\right)=(4,\ 0)$
$\therefore\ a=9,\ b=2,\ a-b=7$

8) ③

삼각형 넓이를 3등분 하기 때문에 점 P는 무게중심이 되며 선분 AP의 연장선과 선분 BC의 교점을 M이라 하면 점 M은 선분 BC의 중점이고, 선분 PM의 길이는 3이다.
따라서 삼각형 BPC에서 파푸스의 중선정리를 사용하면
$\overline{BP}^2+\overline{CP}^2=2\left(\overline{BM}^2+\overline{PM}^2\right)$, $25+49=2(x^2+9)$
$x^2=28,\ x=2\sqrt{7}$ 따라서 선분 BC의 길이는 $4\sqrt{7}$

9) ④

$5(PB^2+PC^2)=5\times2\left(CM^2+PM^2\right)=5\times2\left(4+PM^2\right)=48$
$PM^2\min=\left(\dfrac{2}{\sqrt{5}}\right)^2=\dfrac{4}{5}$

10) $(0,\ 1)$

외심은 삼각형의 각 꼭짓점에 이르는 거리가 같으므로 외심의 좌표를 $(a,\ b)$라 하면
$(a-3)^2+b^2=(a-1)^2+(b-4)^2=(a-1)^2+(b-2)^2$을 만족한다.
$(a-1)^2+(b-4)^2=(a-1)^2+(b-2)^2$ 에서 $b=1$
$(a-3)^2+b^2=(a-1)^2+(b-4)^2$에서 $b=1$을 대입하여 정리하면 $a=0$
따라서 외심의 좌표는 $(0,\ 1)$이다.

11) ⑤

$y=m(x+3)-2$는 기울기가 m이고 $(-3,\ -2)$을 지나는 직선이다.
선분 AB와 이 직선이 만나려면 m이 최소일 때 직선이 점 $(2,\ -2)$를 지나고, m이 최대일 때 직선이 점 $(-1,\ 3)$을 지난다.
$\therefore \dfrac{1}{5}\le m\le\dfrac{5}{2}$, $\alpha\beta=\dfrac{1}{2}$

12) ⑤

ㄱ. $l : a(x+1)+(-y+2)=0,\ (-1,\ 2)$
ㄴ. $a=0,\ l : y=2,\ m : x=-2$
ㄷ. $l \mathbin{/\!/} m \Leftrightarrow \dfrac{a}{4}=\dfrac{-1}{a}\ne\dfrac{a+2}{3a+8}$, $a^2=-4$ (존재×)

13) ①

직선은 k값에 관계없이 $(1,\ -1)$을 지난다.

$\overline{\mathrm{BC}}$의 중점을 지나면 $\triangle\mathrm{ABC}$의 넓이를 이등분한다.

$\overline{\mathrm{BC}}$의 중점 $(-1,\ 6)$을 직선에 대입하면 $k=\dfrac{13}{9}$

14) (1) $a=-2,\ 1,\ \dfrac{3}{2}$ (2) $a=-\dfrac{2}{3},\ \dfrac{1}{2}$

(1)

기울기가 평행한 경우 $a=-2,\ a=\dfrac{3}{2}$

한 점에서 만나는 경우 $2x+y-3=0,\ 3x-2y-1=0$ 의 교점이 $(1,\ 1)$ 이므로 $a=1$

(2)

기울기의 곱이 -1 이여야 하므로 $-2a=-1,\ \dfrac{3}{2}a=-1$

따라서 $a=\dfrac{1}{2},\ a=-\dfrac{2}{3}$

15) $\sqrt{2}$

$(x+y)k+(x+3y+2)=0$

$(0,\ 0)\sim(1,\ -1)=\sqrt{2}$

16) ②

두 직선이 만나서 이루는 예각의 이등분선의 방정식 l이라 하자.

두 직선 $2x-y+1=0,\ x-2y-1=0$ 의 교점은 $(-1,\ -1)$.

l의 기울기를 m이라 하면 $y=mx+(m-1)$.

각의 이등분선의 성질에 의해 l위의 임의의 점에서 주어진 두 직선사이에 이르는 거리는 각각 같다.

즉, $(0,\ m-1)$와 $2x-y+1=0$의 거리 $d_1=\dfrac{|-m+2|}{\sqrt{5}}$

$(0,\ m-1)$와 $x-2y-1=0$의 거리 $d_2=\dfrac{|-2m+1|}{\sqrt{5}}$

$d_1=d_2$이므로 이를 정리하면 $m^2=1$. 그런데 l의 기울기는 양수이므로 $m=1$. 따라서 $l:x-y=0$

17) $\dfrac{1}{3}$

직선 l의 방정식은 $y=m(x-1)+2$

사각형 OABC의 넓이가 48이므로 사다리꼴 OAQP의 넓이는

$48\times\dfrac{1}{3}=16$

$\mathrm{P}(0,\ -m+2),\ \mathrm{Q}(6,\ 5m+2)$이므로 사다리꼴의 넓이는

$\dfrac{1}{2}\times6\times(4m+4)=16$

따라서 $m=\dfrac{1}{3}$

18) -24

$\overline{\mathrm{AC}}=\overline{\mathrm{BC}}$이므로 $(a+16)^2+b^2=a^2+(b-8)^2\Leftrightarrow b=-2a-12$

점D와 점E의 중점을 M이라하자. G가 삼각형 CDE의 무게중심이므로 CM의 길이는 $3\sqrt{5}$이다.

점 $\mathrm{D}\left(\dfrac{a-48}{4},\ \dfrac{b}{4}\right)$, 점 $\mathrm{E}\left(\dfrac{a}{4},\ \dfrac{b+24}{4}\right)$ 이므로

$\mathrm{M}\left(\dfrac{a-24}{4},\ \dfrac{b+12}{4}\right)$이다,

따라서 $\overline{\mathrm{AM}}^2=\left(a-\dfrac{a-24}{4}\right)^2+\left(b-\dfrac{b+12}{4}\right)^2=45.$

$b=-2a-12$ 을 대입하여 정리하면 $(a+8)^2=16$

$\therefore a=-4$ or $a=-12$

그런데 점 C가 2사분면 위의 점이므로 $a=-12,\ b=12$이다.

$3a+b=-24$