논술의 핵심은 답이 아니라, 답을 찾는 과정

백인대장에서 엄선한 최신 기출과
교과 과정에 맞춘 자체 제작 예상 문제로
2021학년도 논술에 정면승부!

이기는 수리논술

Day. 4

수열의 극한과 급수

기본

100人대장
'Quality Education Creation'

Day. 4 수열의 극한과 급수

수리논술 실력늘리기

- **출발은 모방 !** 필기를 열심히 하자. 모범답안, 해설 등을 이해하고 비슷하게 써보려 노력하자.
- **완성은 실전 연습 !** 완벽하지 않더라도 일단 써보자.

교과과정 01 개념정리

개념 ▪ 1 수열의 극한의 기본 성질

두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$이 각각 수렴하고 $\lim_{n\to\infty} a_n=\alpha$, $\lim_{n\to\infty} b_n=\beta$(단, α, β는 유한확정값)일 때

① $\lim_{n\to\infty}(a_n \pm b_n)=\lim_{n\to\infty} a_n \pm \lim_{n\to\infty} b_n=\alpha\pm\beta$

(복부호동순)

② $\lim_{n\to\infty}(c\cdot a_n)=c\lim_{n\to\infty} a_n=c\alpha$(단, c는 상수)

③ $\lim_{n\to\infty} a_n b_n=\lim_{n\to\infty} a_n \lim_{n\to\infty} b_n=\alpha\beta$

④ $\lim_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{b_n}=\dfrac{\lim_{n\to\infty} a_n}{\lim_{n\to\infty} b_n}=\dfrac{\alpha}{\beta}$(단, $b_n\neq 0$, $\beta\neq 0$)

개념 ▪ 2 수열의 극한과 대소 관계

(1) 수열 $\{a_n\},\{b_n\}$이 각각 α,β에 수렴할 때 $a_n \le b_n\,(n=1,2,3,\cdots)$이면 $\alpha\le\beta$

(2) 수열 $\{a_n\},\{b_n\},\{c_n\}$에 대하여 $a_n \le b_n \le c_n\,(n=1,2,3,\cdots)$이고

$\lim_{n\to\infty} a_n=\lim_{n\to\infty} c_n=\alpha$(일정)이면 수열 $\{b_n\}$도 수렴하고 $\lim_{n\to\infty} b_n=\alpha$(샌드위치 정리)

개념 ▪ 3 급수의 수렴, 발산과 일반항의 극한

① 급수 $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ 이 수렴하면 $\lim_{n\to\infty} a_n=0$ 이다. ② $\lim_{n\to\infty} a_n\neq 0$ 이면 급수 $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ 는 발산한다.

Note

예제 1

다음 극한값을 구하시오.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sum_{k=1}^{n}k^6}{\sum_{k=1}^{2n}k^2\sum_{k=2n+1}^{4n}k^3}$$

Note

예제 ■ 2

첫째항이 1인 수열 $\{a_n\}$이 있다. 모든 자연수 n 에 대하여

$$a_{n+1} = \left(\cos\frac{\pi}{2^{n+1}}\right)a_n$$

일 때, 다음 물음에 답하시오.

(1) $a_4 = \dfrac{1}{2^3 \sin\dfrac{\pi}{2^4}}$ 임을 보이시오.

(2) 모든 자연수 n 에 대하여 $a_n = \dfrac{1}{2^{n-1}\sin\dfrac{\pi}{2^n}}$ 이 성립함을 수학적 귀납법을 이용하여 보이시오.

(3) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ 의 값을 구하시오.

Note

예제 ■ 3

다음 제시문을 읽고 질문에 답하시오.

> 자연수 n에 대하여 곡선 $y=\sqrt{2x}$ 위의 점 A_n 과 x축 위의 점 B_n 은 다음과 같이 정의한다.
>
> (가) 점 B_1은 원점이고 $\overline{\mathrm{B}_1\mathrm{B}_n}=\frac{1}{2}n(n-1)$이다. (단, $n \geq 2$이다.)
>
> (나) 점 B_n을 지나면서 y축에 평행한 직선이 곡선 $y=\sqrt{2x}$ 와 만나는 점이 A_n 이다.

삼각형 $\mathrm{A}_n\mathrm{B}_n\mathrm{B}_{n+1}$의 넓이를 S_n , 선분 $\mathrm{B}_n\mathrm{B}_{n+1}$의 길이를 l_n 이라 할 때, $\lim_{n\to\infty}\frac{{l_n}^2}{S_n}$ 의 값을 구하시오. (단, $n \geq 2$이다.)

Note

예제 4

3개의 주머니 A, B, C 안에 각각 1에서부터 n 까지의 번호가 쓰여진 카드가 들어있다. 각 주머니에서 임의로 한 개의 카드를 꺼낼 때, A 주머니에서 꺼낸 카드의 번호가 다른 주머니 B와 C에서 꺼낸 카드의 번호보다 작을 확률을 P_n 이라 하자.

(1) 자연수 n 에 대하여 확률 P_n 을 수식으로 나타내어라.

(2) 정적분과 급수와의 관계를 이용하여 극한값 $\lim_{n \to \infty} P_n$ 을 구하여라.

Note

기출문제 02 풀어보기

1. 2018년 서강대학교

1)(1) $a_n = \sqrt[n]{\dfrac{(3n)!}{(2n)!n^n}}$ 일 때, $\lim\limits_{n\to\infty} \ln a_n$의 값을 구하시오.

(2) $x > 4$ 일 때 $\sqrt{x} > \ln x$ 가 성립함을 보이고, 이를 이용하여 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\ln n}{n} = 0$ 임을 보이시오.

(3) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n} \sum\limits_{k=1}^{n} \left\{ \dfrac{n+1-k}{n} \ln\left(\dfrac{n+k}{n}\right) \right\} = \int_0^1 (1-x)\ln(1+x)\,dx$ 임을 보이시오.

(4) $a_n = (n+1)^n (n+2)^{n-1} (n+3)^{n-2} \cdots (2n-1)^2 (2n)$ 일 때, $\lim\limits_{n\to\infty} \ln\left(\dfrac{\sqrt[n^2]{a_n}}{\sqrt{n}}\right)$ 의 값을 구하시오.

Note

2. 2020년 연세대학교 모의

자연수 1부터 n까지의 합은 $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$ 이다.

(1) $\sum_{k=1}^{n} k(k+1)$을 위와 같이 가장 간단한 모양으로 나타내시오.

(2) $\sum_{k=1}^{n} k(k+1)(k+2)\cdots(k+m)$ 의 가장 간단한 모양을 추론하고 이를 증명하시오. (단, m은 자연수이다.)

※ 참고 : 수학적 귀납법

자연수 n에 대한 명제 $P(n)$이 모든 자연수 n에 대하여 성립함을 증명하려면 다음 두 가지를 증명하면 된다.

[1] $n=1$일 때, 명제 $P(n)$이 성립한다.

[2] $n=k$일 때, 명제 $P(n)$이 성립한다고 가정하면

$n=k+1$일 때에도 명제 $P(n)$이 성립한다.

이와 같은 방법으로 어떤 명제가 참임을 증명하는 방법을 수학적 귀납법이라고 한다.

Note

3. 2018학년도 인하대학교

다음 제시문을 읽고 질문에 답하시오.

> 양의 실수 a, b에 대하여 산술평균 $\frac{a+b}{2}$와 기하평균 $\sqrt{ab}$는
>
> $$\sqrt{ab} \le \frac{a+b}{2} \text{ (단, 등호는 } a=b \text{ 일 때 성립한다.)}$$
>
> 을 만족한다. 마찬가지로 n 개의 양의 실수 x_1, x_2, $\cdots$, x_n 에 대하여
>
> $$\sqrt[n]{x_1 x_2 \cdots x_n} \le \frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n} \text{ 또는 } x_1 x_2 \cdots x_n \le \left(\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}\right)^n$$
>
> (단, 등호는 $x_1=x_2=\cdots=x_n$ 일 때 성립한다.)
>
> 이 성립한다. 이 부등식을 산술·기하평균 부등식이라 한다.

수열 $\{a_n\}$, $a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ 에 대하여,

(1) 함수 $y=\ln(1+x)$ $(x \ge 0)$의 그래프를 이용하여 $a_n < a_{n+1}$임을 보이시오.

(2) 제시문과 $x_1=x_2=\cdots=x_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)$ 그리고 $x_{n+1}=1$을 이용하여 $a_n < a_{n+1}$임을 보이시오.

Note

실전!! 03 연습문제

2019년 숙명여자대학교 모의

아래와 같이 귀납적으로 정의된 수열 $\{b_n\}$에 대하여 다음 문제에 답하시오.

$$b_1 = 2,\ b_{n+1} = b_n^2 - 3b_n + 3\ (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

(1) 임의의 자연수 n에 대하여 b_n이 3의 배수가 아님을 수학적 귀납법을 이용하여 증명하시오.

(2) 수열 $\{b_n\}$은 서로소 수열임을 증명하시오.

Note

실전!! 03 연습문제

2019년 산업기술대학교 모의

다음 제시문을 읽고 질문에 답하시오.

(가) 자연수 n에 대하여 열린 구간 $(0,\ 1)$에서 함수 $g(x)$를 $g(x)=[n\sqrt{x}\ ]$라 하자.
(단, 실수 x에 대하여 $[x]$는 x보다 크지 않은 최대의 정수이다.)

(나) 함수 $f(x)$는 다음 두 조건을 만족시키는 가장 낮은 차수의 다항함수이다.
(1) $f(x)$ 의 최고차항의 계수는 1이다.
(2) $f(x)g(x)$는 열린 구간 $(0,\ 1)$에서 연속이다.

제시문 (나)의 다항함수 $f(x)$ 을 구하고 방정식 $f(x)=0$의 모든 해의 합을 S_n 라 할 때, $\lim_{n\to\infty}\frac{S_n}{n}$ 의 값을 구하시오.

Note

Note

Note

논술의 핵심은 답이 아니라, 답을 찾는 과정

백인대장에서 엄선한 최신 기출과
교과 과정에 맞춘 자체 제작 예상 문제로
2021학년도 논술에 정면승부!

이기는 수리논술

Day. 4

수열의 극한과 급수

기본

해설편

100人대장
'Quality Education Creation'

1) 예제 1 단국대 20

답: $\dfrac{1}{1120}$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sum_{k=1}^{n}k^6}{\sum_{k=1}^{2n}k^2\sum_{k=2n+1}^{4n}k^3}=\frac{\int_0^1 x^6dx}{\int_0^2 x^2dx\times\int_2^4 x^3dx}$$

2) 예제 2 이화여대 18

(1) $a_1=1$, $a_2=\cos\dfrac{\pi}{4}$, $a_3=\cos\dfrac{\pi}{8}\times a_2=\cos\dfrac{\pi}{8}\cos\dfrac{\pi}{4}$, $a_4=\cos\dfrac{\pi}{16}\cos\dfrac{\pi}{8}\cos\dfrac{\pi}{4}$

그런데 $\sin2\theta=2\sin\theta\cos\theta$이므로 $\cos\theta=\dfrac{\sin2\theta}{2\sin\theta}$이다. 그러므로

$$a_4=\cos\frac{\pi}{16}\cos\frac{\pi}{8}\cos\frac{\pi}{4}=\frac{\sin\frac{\pi}{8}}{2\sin\frac{\pi}{16}}\times\frac{\sin\frac{\pi}{4}}{2\sin\frac{\pi}{8}}\times\frac{\sin\frac{\pi}{2}}{2\sin\frac{\pi}{4}}=\frac{1}{2^3\sin\frac{\pi}{2^4}}$$

(2) $n=1$일 때 : $a_1=1=\dfrac{1}{\sin\frac{\pi}{2}}$이므로 성립한다.

$n=k$일 때 : $a_k=\dfrac{1}{2^{k-1}\sin\frac{\pi}{2^k}}$가 성립한다고 가정 하면

$$a_{k+1}=\cos\frac{\pi}{2^{k+1}}\times a_k=\cos\frac{\pi}{2^{k+1}}\times\frac{1}{2^{k-1}\sin\frac{\pi}{2^k}}$$

$$=\frac{\cos\frac{\pi}{2^{k+1}}}{2^k\sin\frac{\pi}{2^{k+1}}\cos\frac{\pi}{2^{k+1}}}=\frac{1}{2^k\sin\frac{\pi}{2^{k+1}}}$$

따라서 $n=k+1$일 때도 성립한다.

그러므로 모든 자연수 n에 대하여 $a_n=\dfrac{1}{2^{n-1}\sin\frac{\pi}{2^n}}$이 성립한다.

(3) $a_n=\dfrac{1}{2^{n-1}\sin\frac{\pi}{2^n}}=\dfrac{2}{\pi}\times\dfrac{\frac{\pi}{2^n}}{\sin\frac{\pi}{2^n}}$, $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x}=1$ 이므로 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_n=\frac{2}{\pi}$

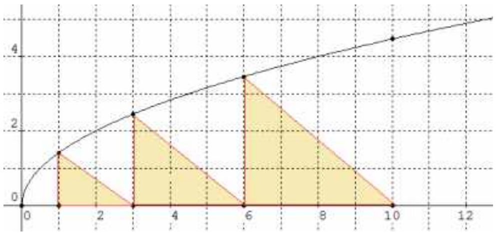
3) 예제 3 산업기술대19 모의

[2-1] $B_1(0,\,0)$, $\overline{B_1B_n}=\dfrac{1}{2}n(n-1)$ 이므로

$$B_n\left(\frac{1}{2}n(n-1),\,0\right),\ B_{n+1}=\frac{1}{2}n(n+1),\ A_n=\sqrt{n(n-1)}$$

따라서 $l_n=n$, $S_n=\dfrac{1}{2}\sqrt{n^3(n-1)}$ 이고

$$\lim_{n\to\infty}\frac{{l_n}^2}{S_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{2n^2}{\sqrt{n^3(n-1)}}=2$$



4) 예제 4 한기교 20 모의

(1) A에서 꺼낸 카드의 번호가 k이면 B와 C에서는 k보다 큰 숫자의 카드이므로

구하는 확률은 $P_n=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n}\left(1-\frac{k}{n}\right)^2$ 이다.

(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}P_n=\lim_{n\to\infty}\sum_{k}^{n}\frac{1}{n}\left(1-\frac{k}{n}\right)^2=\int_0^1(1-x)^2dx=\left[-\frac{1}{3}(1-x)^3\right]_0^1=\frac{1}{3}$

1) 기출 1 서강대 18

(1) $\displaystyle\ln a_n=\ln\sqrt[n]{\frac{(3n)!}{(2n)!n^n}}=\frac{1}{n}\ln\frac{(2n+1)(2n+2)\cdots(3n)}{n^n}=\frac{1}{n}\sum_{k-1}^{n}\ln\left(2+\frac{k}{n}\right)$

$$\lim_{n\to\infty}\ln a_n=\int_2^3\ln x\,dx=[x\ln x-x]_2^3=\ln\frac{27}{4e}$$

(2) $f(x)=\sqrt{x}-\ln x$ 라 하면

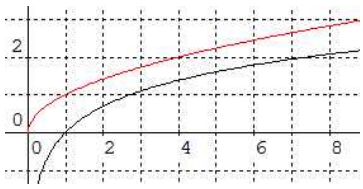
$$f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}-\frac{1}{x}=\frac{\sqrt{x}-2}{2x}>0\quad(x>4)$$

이므로 $f(x)$는 증가함수이고, $f(4)=2-\ln 4=2(1-\ln 2)>0$

따라서 $f(x)>0$, 즉 $\sqrt{x}>\ln x$가 성립한다.

이것으로부터 $0<\dfrac{\ln x}{x}<\dfrac{1}{\sqrt{x}}$ 이고, $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{1}{\sqrt{x}}=0$ 이다.

함수와 극한의 대소관계에서 $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{\ln x}{x}=0$ 이다.



(3) $\displaystyle\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left\{\frac{n+1-k}{n}\ln\left(\frac{n+k}{n}\right)\right\}=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left\{\frac{n-k}{n}\ln\left(\frac{n+k}{n}\right)\right\}+\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left\{\frac{1}{n}\ln\left(\frac{n+k}{n}\right)\right\}$

여기서 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left\{\frac{1}{n}\ln\left(\frac{n+k}{n}\right)\right\}=\int_1^2\ln x\,dx=[x\ln x-x]_1^2=\ln\frac{4}{e}$, $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$ 이므로

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left\{\frac{1}{n}\ln\left(\frac{n+k}{n}\right)\right\}=0$$ 이고

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left\{\frac{n-k}{n}\ln\left(\frac{n+k}{n}\right)\right\}=\int_0^1(1-x)\ln(1+x)dx$$ 이다.

$$\therefore\ \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left\{\frac{n+1-k}{n}\ln\left(\frac{n+k}{n}\right)\right\}=\int_0^1(1-x)\ln(1+x)dx$$

(4) $\ln a_n=n\ln(n+1)+(n-1)\ln(n+2)+(n-2)\ln(n+3)+\cdots+2\ln(2n-1)+\ln(2n)$

$$=\sum_{k=1}^{n}(n+1-k)\ln(n+k)=\sum_{k=1}^{n}(n+1-k)\ln\frac{n+k}{n}+\frac{n(n+1)}{2}\ln n$$

따라서 $\ln\sqrt[n^2]{a_n}=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{n-k+1}{n}\ln\frac{n+k}{n}+\frac{n(n+1)}{2n^2}\ln n$, $\ln\sqrt{n}=\frac{1}{2}\ln n$ 이므로

$$\ln\left(\frac{\sqrt[n^2]{a_n}}{\sqrt{n}}\right)=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{n-k+1}{n}\ln\frac{n+k}{n}+\frac{1}{2n}\ln n$$

(2)와 (3) 에서 $\lim_{n\to\infty}\ln\left(\frac{\sqrt[n^2]{a_n}}{\sqrt{n}}\right)=\int_0^1(1-x)\ln(1+x)dx$

$$\int_0^1(1-x)\ln(1+x)dx=\int_1^2(2-t)\ln t\,dt$$
$$=\left[(2t-\frac{1}{2}t^2)\ln t-(2t-\frac{1}{4}t^2)\right]_1^2$$
$$=\ln 4-\frac{5}{4}$$

2) 기출 2 연세대 20

(1) $\sum_{k=1}^{n}k(k+1)=\sum_{k=1}^{n}(k^2+k)=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)+\frac{1}{2}n(n+1)$

$$=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1+3)=\frac{1}{3}n(n+1)(n+2)$$

(2) **추론 :** $\sum_{k=1}^{n}k(k+1)(k+2)\cdots(k+m)=\frac{1}{m+2}n(n+1)\cdots(n+m+1)$

증명 1 : $f(k)=k(k+1)(k+2)\cdots(k+m)(k+m+1)$이라고 하면

$$k(k+1)(k+2)\cdots(k+m)=\frac{1}{m+2}k(k+1)(k+2)\cdots(k+m)\{(k+m+1)-(k-1)\}$$
$$=\frac{1}{m+2}\{f(k)-f(k-1)\}$$

$$\sum_{k=1}^{n}k(k+1)(k+2)\cdots(k+m)=\frac{1}{m+2}\sum_{k=1}^{n}\{f(k)-f(k-1)\}$$
$$=\frac{1}{m+2}\{(f(1)-f(0))+(f(2)-f(1))+(f(3)-f(2))+\cdots+(f(n)-f(n-1))\}$$
$$=\frac{1}{m+2}\{f(n)-f(0)\}=\frac{1}{m+2}n(n+1)(n+2)\cdots(n+m+1)$$

증명 2 : 수학적 귀납법

(1) $n=1$일 때, (좌)$=1\times2\times\cdots\times(1+m)$, (우)$=\dfrac{1\times2\times\cdots\times(2+m)}{m+2}=1\times2\times\cdots\times(1+m)$

이므로 성립한다.

(2) $n=l$일 때, $\displaystyle\sum_{k=1}^{l}k(k+1)(k+2)\cdots(k+m)=\frac{1}{m+2}l(l+1)\cdots(l+m+1)$ 이 성립한다고 하면

$$\begin{aligned}&\sum_{k=1}^{l+1}k(k+1)(k+2)\cdots(k+m)\\&=\sum_{k=1}^{l}k(k+1)(k+2)\cdots(k+m)+\{(l+1)(l+2)\cdots(l+1+m)\}\\&=\frac{1}{m+2}l(l+1)\cdots(l+m+1)+\{(l+1)(l+2)\cdots(l+1+m)\}\\&=\frac{1}{m+2}(l+1)(l+2)\cdots(l+m+1)(l+m+2)\end{aligned}$$

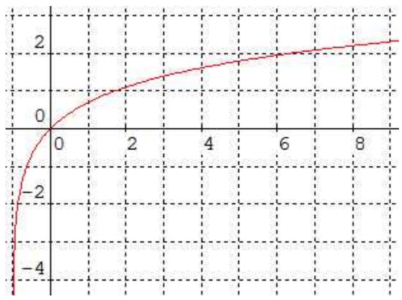
이므로 $n=l+1$일 때도 성립한다.

(1), (2)에 의하여 모든 자연수 n에 대하여

$$\sum_{k=1}^{n}k(k+1)(k+2)\cdots(k+m)=\frac{1}{m+2}n(n+1)\cdots(n+m+1)$$

이 성립한다.

3) 기출 3 인하대 18



(1) $y=\ln(1+x)$의 그래프는 그림과 같이 원점을 지나고 증가하면서 위로 볼록이다.

따라서 $0<\dfrac{1}{n+1}<\dfrac{1}{n}$이므로, 원점과 곡선 $y=\ln(1+x)$ 위의 x좌표가 $\dfrac{1}{n+1}$, $\dfrac{1}{n}$인 점을 지나는 직선의 기울기에서

$$\frac{\ln\left(1+\frac{1}{n+1}\right)}{\frac{1}{n+1}}>\frac{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n}},\ \ln\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}>\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}$$

$\therefore\ a_{n+1}>a_n$

(2) $x_1x_2\cdots x_nx_{n+1}\le\left(\dfrac{x_1+x_2+\cdots+x_n+x_{n+1}}{n}\right)^n$ 으로부터

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\times1\le\left(\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)+\left(1+\frac{1}{n}\right)+\cdots+\left(1+\frac{1}{n}\right)+1}{n+1}\right)^{n+1}=\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}$$

$\therefore\ a_n<a_{n+1}$

4) 실전 1 숙대 19 모의

(1) $b_1 = 2$ 이므로 b_1은 3의 배수가 아니다.

b_k 가 3의 배수가 아니라고 가정하면

$b_{k+1} = b_k^2 - 3b_k + 3$ 에서 $b_{k+1} - 3 = b_k(b_k - 3)$ 이다.

여기서 b_k와 $b_k - 3$ 가 3의 배수가 아니므로 그 곱도 3의 배수가 아니다.

따라서 b_{k+1}도 3의 배수가 아니다.

그러므로 수학적 귀납법에 의하여 임의의 자연수 n에 대하여 b_n은 3의 배수가 아니다.

(2) 임의의 두 자연수 n과 m $(n > m)$에 대하여 b_n과 b_m이 서로소 인지를 확인해 보자.

$b_n - 3 = b_{n-1}(b_{n-1} - 3)$이므로 이 과정을 반복하면

$$b_n - 3 = b_{n-1}b_{n-2} \cdots b_m(b_m - 3),\ b_n - b_{n-1}b_{n-2} \cdots b_m(b_m - 3) = 3$$

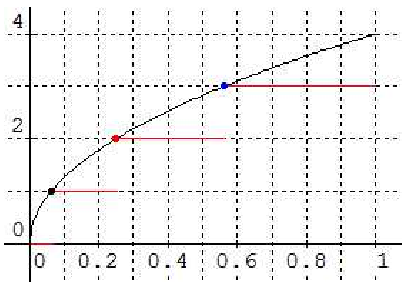
여기서 b_n과 b_m의 공약수를 k라고 하면, k는 3의 약수이다.

그런데 b_n은 3의 배수가 아니므로 $k = 1$이다. 즉 b_n과 b_m은 서로소이고 수열 $\{b_n\}$은 서로소 수열이다.

5) 실전 2 산업기술대 18 모의

$g(x)$는 $n\sqrt{x} = k$ (k는 정수), $x = \left(\frac{k}{n}\right)^2$일 때 불연속이다.

그림은 $n = 4$일 때의 예를 보인 것이다.



따라서 조건 (나)를 만족하는 함수 $f(x)$는 $x = \left(\frac{k}{n}\right)^2$일 때 $f(x) = 0$이어야 한다. 가장 낮은 차수의 다항함수이므로 방정식 $f(x) = 0$의 해는 $x = \left(\frac{k}{n}\right)^2$ $(1 \le k \le n-1)$이다.

따라서 $S_n = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{k^2}{n^2} = \frac{(n-1)n(2n-1)}{6n^2}$ 이고

$\lim_{n\to\infty} \frac{S_n}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n-1)n(2n-1)}{6n^3} = \frac{1}{3}$ 이다.