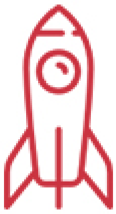
2020. 08. 24
개념 수업 #6, 7 - 미분의 활용

고2 강서반

미적분

개념 수업#6


Passion


Challenge


Professional


Action

접선의 방정식

(1) 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $\mathrm{P}(a,\ f(a))$에서의 접선의 방정식

$$y-f(a)=f'(a)(x-a)$$

(2) 곡선 $y=f(x)$에 접하고 기울기가 m인 직선 $m=f'(a)$를 만족하는 a의 값을 구하여 접점의 좌표를 구한다.

(3) 곡선 $y=f(x)$에 접하고 외부의 점 $(x_1,\ y_1)$을 지나는 직선 $y_1-f(a)=f'(a)(x_1-a)$를 만족하는 a의 값을 구하여 접점의 좌표를 구한다.

(4) 두 곡선의 공통접선을 구할 때 두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$가

① 점 $(a,\ b)$에서 접하면

❶ 함숫값이 같아야 한다. ⇨ $f(a)=g(a)$

❷ 기울기가 같아야 한다. ⇨ $f'(a)=g'(a)$

② 점 $(a,\ b)$에서 수직이면 $f(a)=g(a)=b$, $f'(a)g'(a)=-1$

(5) 매개변수로 나타낸 곡선의 접선의 방정식

매개변수로 나타낸 곡선 $x=f(t)$, $y=g(t)$ 에서 두 함수 $f(t)$, $g(t)$ 가 미분 가능할 때, $t=a$ 에 대응하는 곡선 위의 점 $(f(a),\ g(a))$ 에서의 접선의 기울기는 매개변수로 나타낸 함수의 미분법을 이용하여

$$\frac{dy}{dx}=\frac{g'(t)}{f'(t)}\ \ (\text{단 } f'(t)\neq 0)$$

을 구하고 $t=a$ 를 대입하여 구한다. 따라서 곡선 $x=f(t)$, $y=g(t)$ 위의 점 $(f(a),\ g(a))$ 에서의 접선의 방정식은 다음과 같다.

$$y-g(a)=\frac{g'(a)}{f'(a)}(x-f(a))$$

(6) 음함수로 나타낸 곡선의 접선의 방정식

음함수 미분법을 이용하여 $\frac{dy}{dx}$를 구하고 $\frac{dy}{dx}$에 $x=a$, $y=b$를 대입하여 접선의 기울기 m을 구한다. 따라서 곡선 $f(x,\ y)=0$ 위의 점 $(a,\ b)$에서의 접선의 방정식은 다음과 같다.

$$y-b=m(x-a)$$

7 도함수의 활용 (2)

함수의 극대와 극소 판정

위로 볼록과 아래로 볼록 그리고 변곡점

예제1 다항함수 $f(x)$에 대하여 다음 표는 x의 값에 따른 $f(x)$, $f'(x)$, $f''(x)$의 변화 중 일부를 나타낸 것이다.

x	$x<1$	$x=1$	$1<x<3$	$x=3$
$f'(x)$		0		1
$f''(x)$	$+$		$+$	0
$f(x)$		$\frac{\pi}{2}$		π

함수 $g(x)=\sin(f(x))$에 대하여 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 모두 고르시오.

<보 기>

ㄱ. $g'(3)=-1$

ㄴ. $1<a<b<3$이면 $-1<\dfrac{g(b)-g(a)}{b-a}<0$이다.

ㄷ. 점 $\mathrm{P}(1,\ 1)$은 곡선 $y=g(x)$의 변곡점이다.

함수의 그래프 그리기

예제1 $f(x)=xe^{-x}$

예제2 $f(x)=x^2e^{-x}$

예제3 $f(x)=\dfrac{2x}{x^2+1}$

예제4 $f(x)=\ln(1+x^2)$

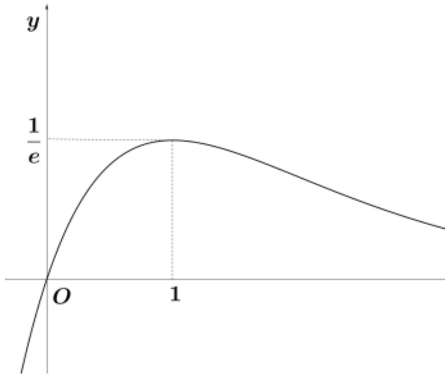
예제5 $f(x)=\dfrac{2x^2}{x^2-1}$

예제6 $f(x)=\dfrac{e^x}{x}$

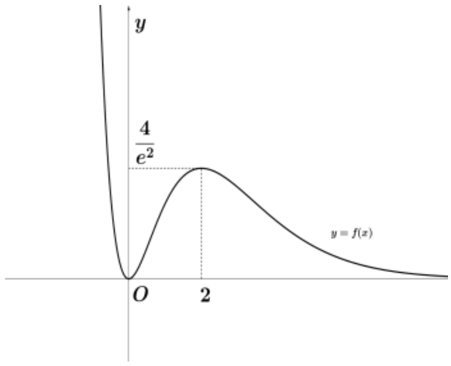
예제7 $f(x)=\dfrac{\ln x}{x^2}$

예제8 $f(x)=\dfrac{x}{\ln x}$

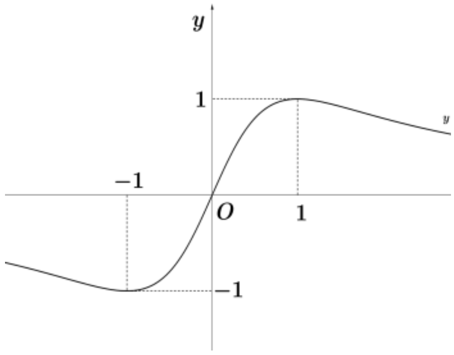
예제1)



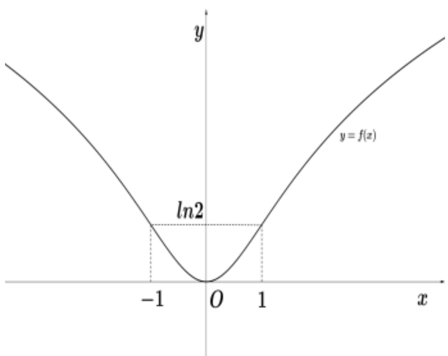
예제2)



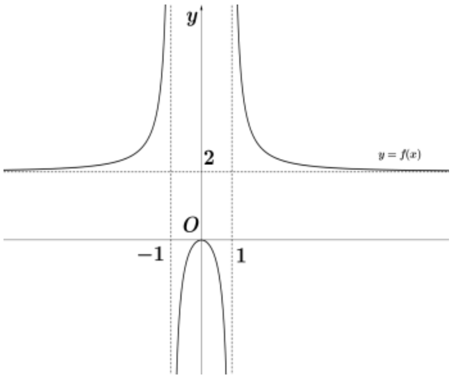
예제3)



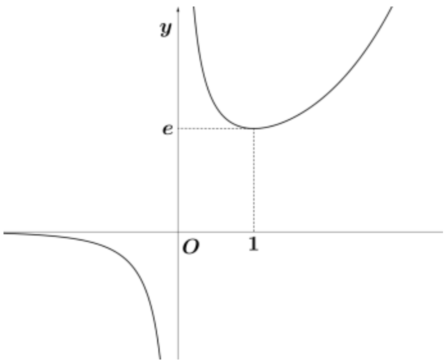
예제4)



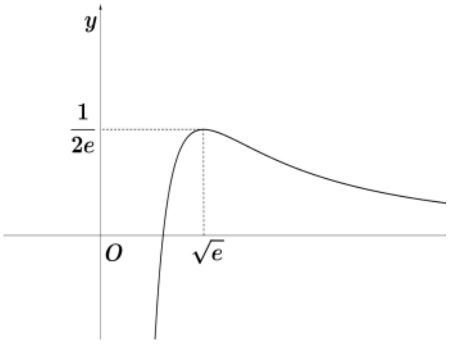
예제5)



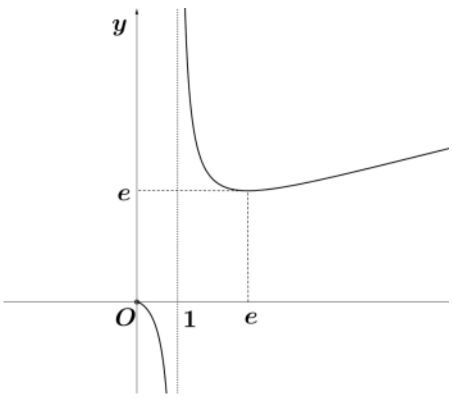
예제6)



예제7)



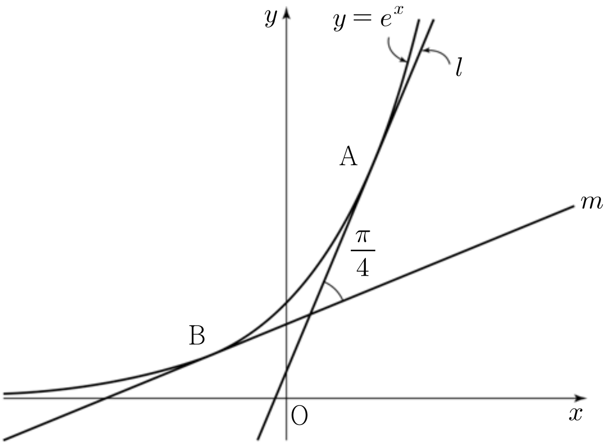
예제8)



Practice

[2018. 04. 경기교육청]

1. 그림과 같이 곡선 $y=e^x$ 위의 두 점 $\mathrm{A}(t,\ e^t)$, $\mathrm{B}(-t,\ e^{-t})$에서의 접선을 각각 $l,\ m$이라 하자. 두 직선 l과 m이 이루는 예각의 크기가 $\frac{\pi}{4}$일 때, 두 점 A, B를 지나는 직선의 기울기는? (단, $t>0$) [4점]



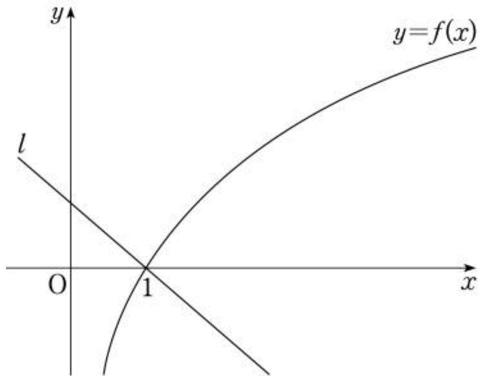
① $\dfrac{1}{\ln(1+\sqrt{2})}$　② $\dfrac{1}{\ln 2}$

③ $\dfrac{4}{3\ln(1+\sqrt{2})}$　④ $\dfrac{7}{6\ln 2}$

⑤ $\dfrac{3}{2\ln(1+\sqrt{2})}$

[2015. 10. 서울교육청]

2. 좌표평면에 함수 $f(x)=\sqrt{3}\ln x$의 그래프와 직선 $l: y=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}x+\dfrac{\sqrt{3}}{2}$이 있다. 곡선 $y=f(x)$ 위의 서로 다른 두 점 $\mathrm{A}(\alpha,\ f(\alpha))$, $\mathrm{B}(\beta,\ f(\beta))$에서의 접선을 각각 m, n이라 하자. 세 직선 $l,\ m,\ n$으로 둘러싸인 삼각형이 정삼각형일 때, $6(\alpha+\beta)$의 값을 구하시오. [4점]



[2016. 10. 서울교육청]

3. 곡선 $x^2+5xy-2y^2+11=0$ 위의 점 $(1,\ 4)$에서의 접선과 x축 및 y축으로 둘러싸인 부분의 넓이는? [4점]

① 1　② 2　③ 3

④ 4　⑤ 5

4. 함수 $f(x)=kx-\sin x$의 역함수가 존재하도록 하는 상수 k의 최솟값은? (단, $k>0$) [3점]

① $\frac{1}{\pi}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ 1
④ 2 ⑤ π

[2013. 03. 서울교육청]

5. 열린 구간 $(0,\ 2\pi)$에서 정의된 함수 $f(x)=\frac{\sin x}{e^{2x}}$가 $x=a$에서 극솟값을 가질 때, $\cos a$의 값은? [4점]

① $-\frac{2\sqrt{5}}{5}$ ② $-\frac{\sqrt{5}}{5}$ ③ 0
④ $\frac{\sqrt{5}}{5}$ ⑤ $\frac{2\sqrt{5}}{5}$

[2014. 09. 평가원]

6. 3 이상의 자연수 n에 대하여 함수 $f(x)$가

$$f(x)=x^ne^{-x}$$

일 때, <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

<보 기>

ㄱ. $f\left(\frac{n}{2}\right)=f'\left(\frac{n}{2}\right)$
ㄴ. 함수 $f(x)$는 $x=n$에서 극댓값을 갖는다.
ㄷ. 점 $(0,\ 0)$은 곡선 $y=f(x)$의 변곡점이다.

① ㄴ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

[2012. 대학수학능력시험]

7. 정의역이 $\{x \mid 0 \le x \le \pi\}$인 함수 $f(x) = 2x\cos x$에 대하여 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은? [4점]

<보 기>

ㄱ. $f'(a) = 0$이면 $\tan a = \dfrac{1}{a}$이다.

ㄴ. 함수 $f(x)$가 $x = a$에서 극댓값을 가지는 a가 구간 $\left(\dfrac{\pi}{4},\ \dfrac{\pi}{3}\right)$에 있다.

ㄷ. 구간 $\left[0,\ \dfrac{\pi}{2}\right]$에서 방정식 $f(x) = 1$의 서로 다른 실근의 개수는 2이다.

① ㄱ　　② ㄷ　　③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ　　⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

빠른 정답

1. ①
2. 32
3. ①
4. ③
5. ①
6. ③
7. ⑤

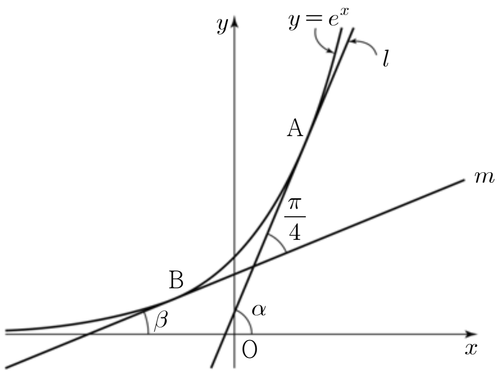
정답 및 해설

1. ①

$y' = e^x$이므로 곡선 $y = e^x$ 위의

두 점 $\mathrm{A}(t,\ e^t)$, $\mathrm{B}(-t,\ e^{-t})$에서의

접선 l, m의 기울기는 각각 e^t, e^{-t}이다.



두 직선 l, m이 x축의 양의 방향과 이루는

각의 크기를 각각 α, β라 하면

$\tan\alpha = e^t$, $\tan\beta = e^{-t}$

$$\tan\frac{\pi}{4} = \tan(\alpha - \beta)$$

$$= \frac{\tan\alpha - \tan\beta}{1 + \tan\alpha\tan\beta}$$

$$= \frac{e^t - e^{-t}}{1 + e^t e^{-t}} = 1$$

$e^t - e^{-t} = 2$

$(e^t)^2 - 2e^t - 1 = 0$

$e^t > 0$이므로 $e^t = 1 + \sqrt{2}$

$\therefore\ t = \ln(1 + \sqrt{2})$

따라서 직선 AB의 기울기는

$$\frac{e^t - e^{-t}}{t - (-t)} = \frac{1}{\ln(1 + \sqrt{2})}$$

2. 32

직선 l 의 기울기가 $-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ 이고, 세 직선 l, m, n으로 둘러싸인

삼각형이 정삼각형이므로 두 접선 m, n과 직선 l 이 이루는 예각의

크기는 $60°$ 이다.

직선 l 과 이루는 예각의 크기가 $60°$ 인 직선의 기울기를 k 라 하면

삼각함수의 덧셈정리에 의하여

$$\left| \frac{-\frac{\sqrt{3}}{2} - k}{1 - \frac{\sqrt{3}}{2}k} \right| = \sqrt{3},\ k = \frac{\sqrt{3}}{5} \text{ 또는 } k = 3\sqrt{3}$$

$f(x) = \sqrt{3}\ln x$ 에서 $f'(x) = \dfrac{\sqrt{3}}{x}$ 이므로

$$\frac{\sqrt{3}}{\alpha} = \frac{\sqrt{3}}{5},\ \frac{\sqrt{3}}{\beta} = 3\sqrt{3}$$

$\alpha = 5$, $\beta = \dfrac{1}{3}$ 이므로 $6(\alpha + \beta) = 32$

3. ①

$x^2 + 5xy - 2y^2 + 11 = 0$ 의 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$2x + 5y + 5x\frac{dy}{dx} - 4y\frac{dy}{dx} = 0$$

$$(5x - 4y)\frac{dy}{dx} = -2x - 5y$$

점 $(1,\ 4)$ 에서의 접선의 기울기는 2 이므로

접선의 방정식 $y = 2x + 2$의

x 절편은 -1, y 절편은 2 이다.

따라서 구하는 넓이는 $\dfrac{1}{2} \times 2 \times |-1| = 1$

4. ③

5. ①

$f(x) = \dfrac{\sin x}{e^{2x}} = e^{-2x}\sin x$이므로

$$\begin{aligned} f'(x) &= -2e^{-2x}\sin x + e^{-2x}\cos x \\ &= e^{-2x}(-2\sin x + \cos x) \text{이고} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f''(x) &= -2e^{-2x}(-2\sin x + \cos x) + e^{-2x}(-2\cos x - \sin x) \\ &= e^{-2x}(3\sin x - 4\cos x) \end{aligned}$$

이다.

이때, 함수 $f(x)$는 $x = a$에서 극솟값을 가지므로

$f'(a) = 0,\quad f''(a) > 0$

이어야 한다.

이때, $e^{-2a} > 0$이므로

$-2\sin a + \cos a = 0$ …… ㉠

$3\sin a - 4\cos a > 0$ …… ㉡

이 성립해야 한다.

㉠에서 $\cos a = 2\sin a$이므로 $\tan a = \dfrac{1}{2}$

㉠을 ㉡에 대입하면 $-5\sin a > 0$

따라서 $\tan a > 0$이고, $\sin a < 0$이므로 $\pi < a < \dfrac{3}{2}\pi$

$$\sec^2 a = 1 + \tan^2 a = 1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{5}{4}$$

$$\cos a = \frac{1}{\sec a} = \pm\frac{2}{\sqrt{5}}$$

$$\therefore \cos a = -\frac{2\sqrt{5}}{5} \quad \left(\because\ \pi < a < \frac{3}{2}\pi\right)$$

[다른 풀이]

미분가능한 함수 $f(x)$가 $x = a$에서 극값을 가지므로

$f'(a) = 0$이어야 한다.

$f(x) = \dfrac{\sin x}{e^{2x}} = e^{-2x}\sin x$이므로

$$f'(x) = -2e^{-2x}\sin x + e^{-2x}\cos x$$

$=-e^{-2x}(2\sin x-\cos x)$

이때 $-e^{-2a}(2\sin a-\cos a)=0$에서 $\tan a=\dfrac{1}{2}$

i) $0<a<\dfrac{\pi}{2}$일 때

$0<x<a$이면

$\sin x<\sin a$이고 $\cos x>\cos a$이므로

$2\sin x-\cos x<2\sin a-\cos a=0$

$\therefore f'(x)>0$

$a<x<\dfrac{\pi}{2}$이면

$\sin x>\sin a$이고 $\cos x<\cos a$이므로

$2\sin x-\cos x>2\sin a-\cos a=0$

$\therefore f'(x)<0$

따라서 함수 $f(x)$는 $x=a$에서 극댓값을 갖는다.

ii) $\pi<a<\dfrac{3}{2}\pi$일 때

$\pi<x<a$이면

$\sin x>\sin a$이고 $\cos x<\cos a$이므로

$2\sin x-\cos x>2\sin a-\cos a=0$

$\therefore f'(x)<0$

$a<x<\dfrac{3\pi}{2}$이면

$\sin x<\sin a$이고 $\cos x>\cos a$이므로

$2\sin x-\cos x<2\sin a-\cos a=0$

$\therefore f'(x)>0$

따라서 $x=a$에서 극솟값을 갖는다.

$\sec^2 a=1+\tan^2 a=\dfrac{5}{4}$에서

$\sec a=-\dfrac{\sqrt{5}}{2}\ (\because \pi<a<\dfrac{3}{2}\pi)$

$\therefore \cos a=-\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$

[다른 풀이]

$f(x)=\dfrac{\sin x}{e^{2x}}$는 미분가능한 함수이므로 몫의 미분법을 사용하면

$f'(x)=\dfrac{e^{2x}\cos x-2e^{2x}\sin x}{(e^{2x})^2}=-\dfrac{2\sin x-\cos x}{e^{2x}}$

이때 삼각함수의 합성에 의해서

$2\sin x-\cos x=\sqrt{5}\sin(x-\alpha)$ 이므로

(단, $\cos\alpha=\dfrac{2}{\sqrt{5}}$, $\sin\alpha=\dfrac{1}{\sqrt{5}}$)

$f'(x)=-\dfrac{\sqrt{5}\sin(x-\alpha)}{e^{2x}}$

이때 $f'(x)=0$에서 $\sin(x-\alpha)=0$이므로

$x-\alpha=0$ 또는 $x-\alpha=\pi$

$\therefore x=\alpha$ 또는 $x=\pi+\alpha$

이때 증가와 감소를 나타내는 표는 다음과 같다.

x	(0)	$\cdots$	α	$\cdots$	$\pi+\alpha$	$\cdots$	(2π)
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\nearrow$	$f(\alpha)$	$\searrow$	$f(\pi+\alpha)$	$\nearrow$	

그러므로 함수 $f(x)$는 $x=\pi+\alpha$에서 극솟값을 갖는다.

$\therefore a=\pi+\alpha$

$\therefore \cos a=\cos(\pi+\alpha)=-\cos\alpha=-\dfrac{2}{\sqrt{5}}=-\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$

6. ③

$f(x)=\dfrac{x^n}{e^x}$

$f'(x)=\dfrac{nx^{n-1}e^x-e^x x^n}{(e^x)^2}=\dfrac{x^{n-1}(n-x)}{e^x}$

ㄱ. $f\left(\dfrac{n}{2}\right)=\dfrac{\left(\dfrac{n}{2}\right)^n}{e^{\frac{n}{2}}}$ 에서

$f'\left(\dfrac{n}{2}\right)=\dfrac{\left(\dfrac{n}{2}\right)^{n-1}\left(n-\dfrac{n}{2}\right)}{e^{\frac{n}{2}}}=\dfrac{\left(\dfrac{n}{2}\right)^n}{e^{\frac{n}{2}}}$

따라서 $f\left(\dfrac{n}{2}\right)=f'\left(\dfrac{n}{2}\right)$ $\quad\therefore$ 참

ㄴ. $f'(x)=-x^{n-1}(x-n)e^{-x}$

i) n이 홀수일 때

x	$\cdots$	0	$\cdots$	n	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\nearrow$		$\nearrow$		$\searrow$

ii) n이 짝수일 때

x	$\cdots$	0	$\cdots$	n	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$

$\therefore$ 참

ㄷ. $f''(x)=e^{-x}x^{n-2}(x^2-2nx+n(n-1))$, $f''(0)=0$

i) n이 홀수일 때 $x<0\to f''(x)<0$

$x>0\to f''(x)>0$

ii) n이 짝수일 때 $x<0\to f''(x)>0$

$x>0\to f''(x)>0$

n 이 짝수일 때 $x=0$ 좌우에서 $f''(x)$ 의 부호 변화가 없다

$\therefore$ 거짓

[참고]

ㄴ에서 n 이 짝수일 때는 $x=0$ 에서 극솟값을 가지므로 $(0,\ 0)$ 에서 변곡점이 될 수 없다.

7. ⑤

ㄱ. $f(x)=2x\cos x$에서 $f'(x)=2\cos x-2x\sin x$

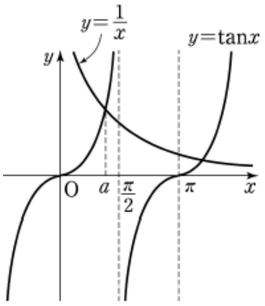
$f'(a)=2\cos a-2a\sin a=0$

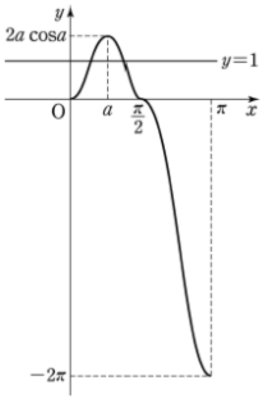
$\therefore\ \tan a=\dfrac{\sin a}{\cos a}=\dfrac{\sin a}{a\sin a}=\dfrac{1}{a}$ (참)

ㄴ. $f'(x)=2\cos x(1-x\tan x)=0$에서

$\cos x=0$ 또는 $\tan x=\dfrac{1}{x}$

$\tan x=\dfrac{1}{x}$의 근을 a라 하면 $0<a<\dfrac{\pi}{2}$





증감표를 그려보면

	0		a		$\frac{\pi}{2}$		π
$f'(x)$	2	$+$	0	$-$	0	$-$	-2
$f(x)$	0	↗	$2a\cos a$	↘	0	↘	-2π

$\therefore\ f(x)$는 $x=a$에서 극댓값을 가진다.

구간 $\left(0,\ \dfrac{\pi}{2}\right)$에서 $y=\dfrac{1}{x}$은 감소함수,

$y=\tan x$는 증가함수이므로

$g(x)=\tan x-\dfrac{1}{x}$은 증가함수 $g\left(\dfrac{\pi}{4}\right)=1-\dfrac{4}{\pi}<0$,

$g\left(\dfrac{\pi}{3}\right)=\sqrt{3}-\dfrac{3}{\pi}>0$이므로

중간값 정리에 의해 $\dfrac{\pi}{4}<a<\dfrac{\pi}{3}$ (참)

ㄷ. $f\left(\dfrac{\pi}{3}\right)=\dfrac{2}{3}\pi\cdot\dfrac{1}{2}>1$이므로 $f(a)>1$

$\therefore$ 구간 $\left[0,\ \dfrac{\pi}{2}\right]$에서 $f(x)=1$은 서로 다른 두 실근을 갖는다.

(참)

따라서 ㄱ, ㄴ, ㄷ 모두 옳다.