2020. 09. 12

고3 이과 9월 평가원 모의고사 대비

수Ⅰ

주요 논점 정리

'Quality Education Creation'

#1 도형 활용 (사인법칙 & 코사인법칙)

(1) 비례식

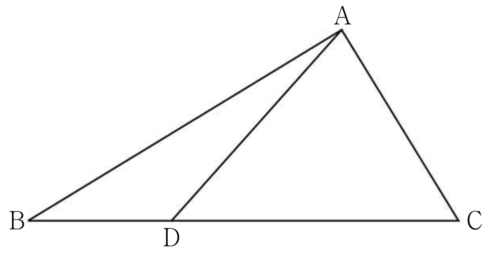
(2) 다른 도형의 성질 이용

#1

1. 그림과 같이 삼각형 ABC에서 선분 BC를 $1:2$로 내분하는 점을 D라 하자.

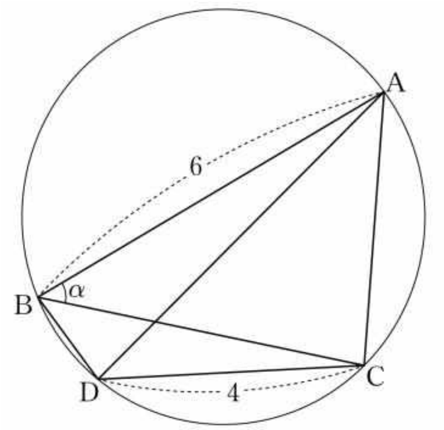
$\overline{\mathrm{AD}}=1$, $\overline{\mathrm{AB}}+\overline{\mathrm{BD}}=\overline{\mathrm{AC}}+\overline{\mathrm{CD}}=2$일 때, $\overline{\mathrm{BC}}=\frac{q}{p}$이다.

$p+q$의 값을 구하시오. (단, p, q는 서로소인 자연수이다.)



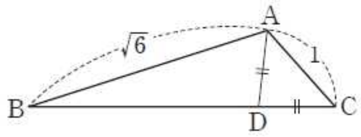
#1

2. 그림과 같이 예각삼각형 ABC가 한 원에 내접하고 있다. $\overline{\mathrm{AB}}=6$이고, $\angle\mathrm{ABC}=\alpha$라 할 때 $\cos\alpha=\frac{3}{4}$이다. 점 A를 지나지 않는 호 BC 위의 점 D에 대하여 $\overline{\mathrm{CD}}=4$이다.
두 삼각형 ABD, CBD의 넓이를 각각 S_1, S_2라 할 때, $S_1:S_2=9:5$이다. 삼각형 ADC의 넓이를 S라 할 때, S^2의 값을 구하시오.



#1

3. 그림과 같이 $\overline{AB}=\sqrt{6}$, $\overline{AC}=1$인 삼각형 ABC가 있다. 선분 BC를 $3:1$로 내분하는 점을 D라 하자. $\overline{AD}=\overline{CD}$일 때, 선분 BC의 길이는?

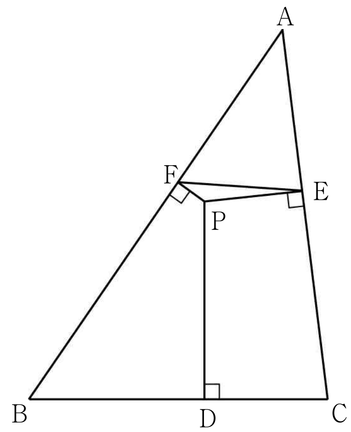


① $\frac{8}{3}$ ② $\frac{17}{6}$ ③ 3

④ $\frac{19}{6}$ ⑤ $\frac{10}{3}$

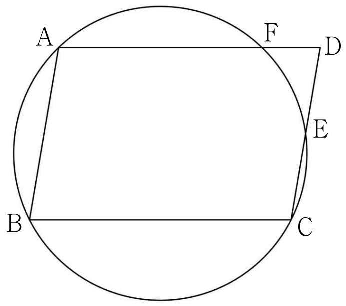
#1

4. 그림과 같이 $\overline{AB}=6$, $\overline{BC}=4$, $\overline{CA}=5$ 인 삼각형 ABC 의 내부의 한 점 P 에서 세 변 BC, CA, AB 에 내린 수선의 발을 각각 D, E, F 라 한다. $\overline{PD}=\sqrt{7}$, $\overline{PE}=\frac{\sqrt{7}}{2}$ 일 때, 삼각형 EFP 의 넓이는 $\frac{q}{p}\sqrt{7}$ 이다. $p+q$ 의 값을 구하시오. (단, p, q 는 서로소인 자연수이다.)



#1

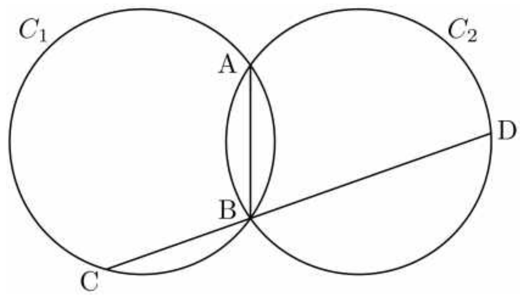
5. 그림과 같이 $\overline{\mathrm{AB}}=2$, $\overline{\mathrm{BC}}=3$인 평행사변형 ABCD에 대하여 삼각형 ABC의 외접원이 두 선분 CD, DA와 만나는 점을 각각 E, F라 하자. 점 E가 선분 CD의 중점일 때, 선분 EF의 길이는?



① $\dfrac{\sqrt{10}}{3}$　② $\dfrac{\sqrt{11}}{3}$　③ $\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$　④ $\dfrac{\sqrt{13}}{3}$　⑤ $\dfrac{\sqrt{14}}{3}$

#1

6. 그림과 같이 반지름의 길이가 1인 두 원 C_1, C_2가 두 점 A, B에서 만난다. 원 C_1 위에 $\overline{\mathrm{BA}}=\overline{\mathrm{BC}}$가 되도록 점 A가 아닌 점 C를 잡고, 직선 BC가 원 C_2와 만나는 점 중 점 B가 아닌 점을 D라 하자. $\overline{\mathrm{AB}}=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$일 때, $\overline{\mathrm{BD}}^2=\dfrac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.)



#2 수열과 수열의 합

(1) 등차 /등비수열과 수열의 합

(2) 점화식을 이용한 규칙성 찾기

(3) 점화식을 이용한 수열의 합 구하기

#2

1. 공차가 양수인 등차수열 $\{a_n\}$ 이 다음 조건을 만족시킬 때, a_{14} 의 값은?

(가) $\sum_{n=1}^{2m-1} a_n = 0$ 을 만족시키는 자연수 m 이 존재한다.

(나) $2\sum_{n=1}^{15} a_n = \sum_{n=1}^{15} |a_n| = 90$

① 6　② 8　③ 10
④ 12　⑤ 14

#2

2. 공차가 양수인 등차수열 $\{a_n\}$과 공차가 음수인 등차수열 $\{b_n\}$의 첫째항부터 n째 항까지의 합을 각각 S_n과 T_n이라 하자. 다음이 성립할 때, a_{20}과 b_{20}의 곱 $a_{20}b_{20}$의 값은?

$$\begin{cases} a_1 = b_1 + 1 \\ S_n^2 - T_n^2 = n^2(n+1) \quad (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots) \end{cases}$$

① -108　② -105　③ -102
④ -99　⑤ -96

#2

3. 수열 $\{a_n\}$은 $a_1 = 7$이고, 모든 자연수 n에 대하여

$$a_{n+1} = \begin{cases} \dfrac{a_n}{2} + 1 & (a_n = \text{짝수}) \\ 2a_n & (a_n = \text{홀수}) \end{cases}$$

를 만족시킨다. $\sum_{n=1}^{30} a_n$의 값을 구하시오.

#2

4. 첫째항이 양수이고 공차가 -1 보다 작은 등차수열 $\{a_n\}$ 에 대하여 수열 $\{b_n\}$ 은 다음과 같다.

$$b_n = \begin{cases} a_{n+1} - \dfrac{n}{2} & (a_n \geq 0) \\ a_n + \dfrac{n}{2} & (a_n < 0) \end{cases}$$

수열 $\{b_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라 할 때, 수열 $\{b_n\}$은 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $b_5 < b_6$
(나) $S_5 = S_9 = 0$

$S_n \leq -70$ 을 만족시키는 자연수 n 의 최솟값은?

① 13 ② 15 ③ 17 ④ 19 ⑤ 21

#2

5. 수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $a_{2n} = a_n - 1$
(나) $a_{2n+1} = 2a_n + 1$

$a_{20} = 1$일 때, $\sum_{n=1}^{63} a_n$의 값은?

① 704 ② 712 ③ 720
④ 728 ⑤ 736

#2

6. 다음 조건을 만족시키는 모든 수열 $\{a_n\}$ 에 대하여 $\sum_{k=1}^{100} a_k$ 의 최댓값과 최솟값을 각각 $M,\ m$ 이라 할 때, $M-m$ 의 값은?

(가) $a_5 = 5$
(나) 모든 자연수 n 에 대하여

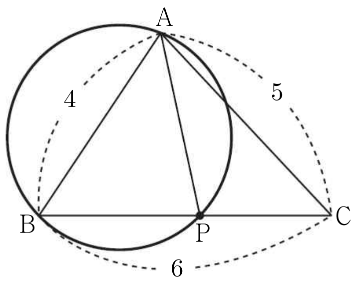
$$a_{n+1} = \begin{cases} a_n - 6 & (a_n \geq 0) \\ -2a_n + 3 & (a_n < 0) \end{cases}$$

이다.

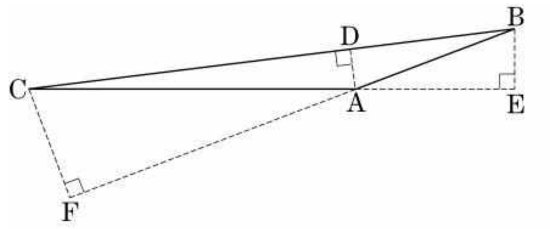
① 64 ② 68 ③ 72
④ 76 ⑤ 80

Level 1

1 $\overline{AB}=4$, $\overline{BC}=6$, $\overline{CA}=5$인 삼각형 ABC에 대하여 선분 $\overline{BC}$ 위의 동점 P가 있다. 삼각형 ABP의 외접원의 넓이의 최솟값을 m, 최댓값을 M이라 할 때, $M+m=\frac{q}{p}\pi$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p, q는 서로소인 자연수이다.)



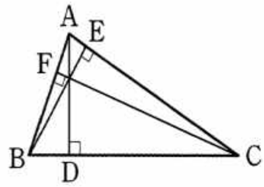
2 그림과 같이 $A>90°$인 삼각형 ABC의 세 꼭짓점 A, B, C에서 세 직선 BC, CA, AB에 내린 수선의 발을 각각 D, E, F라 하자. $\overline{AD}:\overline{BE}:\overline{CF}=2:3:4$일 때, 삼각형 ABC에서 $\cos C$의 값은? [4점]



① $\frac{5}{6}$ ② $\frac{41}{48}$ ③ $\frac{7}{8}$

④ $\frac{43}{48}$ ⑤ $\frac{11}{12}$

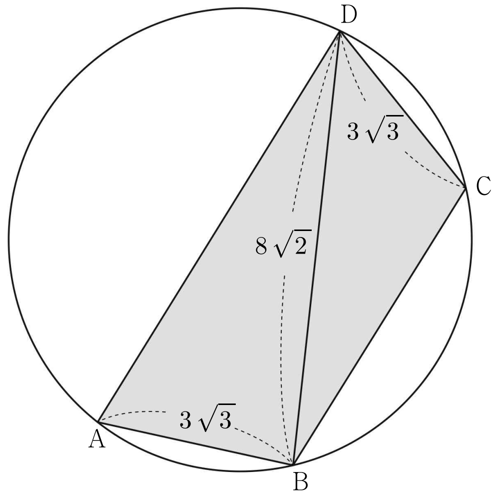
3 오른쪽 그림과 같이 $\triangle \mathrm{ABC}$의 세 꼭짓점 A, B, C에서 변 BC, CA, AB에 내린 수선의 발을 각각 D, E, F라 하자.



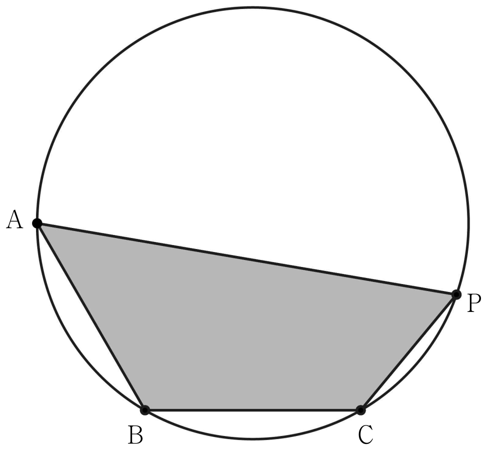
$\overline{\mathrm{AD}} : \overline{\mathrm{BE}} : \overline{\mathrm{CF}} = 3 : 4 : 6$일 때, $\sin A : \sin B : \sin C$를 구하시오.

4 그림과 같이 반지름의 길이가 6인 원에 내접하는 사각형 ABCD에 대하여 $\overline{\mathrm{AB}} = \overline{\mathrm{CD}} = 3\sqrt{3}$, $\overline{\mathrm{BD}} = 8\sqrt{2}$일 때, 사각형 ABCD의 넓이를 S라 하자. $\dfrac{S^2}{13}$의 값을 구하시오.

[4점]

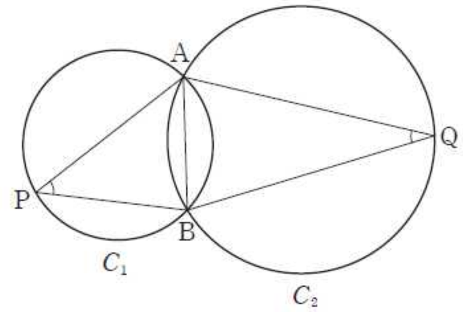


5 반지름의 길이가 3 인 원의 둘레를 6 등분하는 점 중에서 연속된 세 개의 점을 각각 A , B , C 라 하자.
점 B 를 포함하지 않는 호 AC 위의 점 P 에 대하여
$\overline{\mathrm{AP}}+\overline{\mathrm{CP}}=8$ 이다. 사각형 ABCP 의 넓이는? [4점]



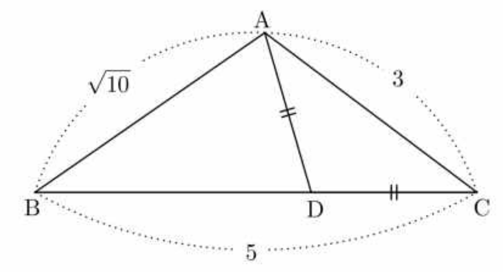
① $\frac{13\sqrt{3}}{3}$ ② $\frac{16\sqrt{3}}{3}$ ③ $\frac{19\sqrt{3}}{3}$
④ $\frac{22\sqrt{3}}{3}$ ⑤ $\frac{25\sqrt{3}}{3}$

6 그림과 같이 반지름의 길이가 각각 r_1, r_2인 두 원 C_1, C_2가 두 점 A, B에서 만난다. 원 C_1 위의 점 P와 원 C_2 위의 점 Q에 대하여 $\sin(\angle \mathrm{APB})=\sqrt{2}\sin(\angle \mathrm{AQB})$이고, 두 원 C_1, C_2의 넓이의 합이 9π일 때, r_1r_2의 값은?



① $2\sqrt{3}$ ② $\sqrt{14}$ ③ 4
④ $3\sqrt{2}$ ⑤ $2\sqrt{5}$

7 그림과 같이 $\overline{\mathrm{AB}}=\sqrt{10}$, $\overline{\mathrm{BC}}=5$, $\overline{\mathrm{AC}}=3$인 삼각형 ABC가 있다. 선분 BC위의 점 D에 대하여 $\overline{\mathrm{AD}}=\overline{\mathrm{CD}}$일 때, 삼각형 ABD의 넓이는?



① $\dfrac{33}{16}$ ② $\dfrac{9}{4}$ ③ $\dfrac{39}{16}$
④ $\dfrac{21}{8}$ ⑤ $\dfrac{45}{16}$

8 등차수열 $\{a_n\}$에 대하여

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}a_k,\ T_n=\sum_{k=1}^{n}|a_k|$$

라 할 때, S_n, T_n은 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $S_7=T_7$
(나) 6 이상의 모든 자연수 n에 대하여
$S_n+T_n=84$이다.

T_{15}의 값은?

① 96 ② 102 ③ 108
④ 114 ⑤ 120

9 수열 $\{a_n\}$은 $a_1 = 3$이고, 모든 자연수 n에 대하여

$$\begin{cases} a_{2n} = \dfrac{2}{3}a_n + 1 \\ a_{2n+1} = \dfrac{1}{3}a_n - 1 \end{cases}$$

을 만족시킨다. $\displaystyle\sum_{n=1}^{2^k-1} a_n = f(k)$라고 할 때, $\displaystyle\sum_{k=1}^{10} f(k)$의 값을 구하시오.

10 첫째항이 모두 자연수인 두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여 $a_{n+1} = a_n + b_n$, $b_{n+1} = (-1)^{a_n}$ 을 만족시킬 때, <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

〈 보 기 〉

ㄱ. $a_1 = 3$, $b_1 = 1$이면 $a_{10} + b_{10} = 3$이다.

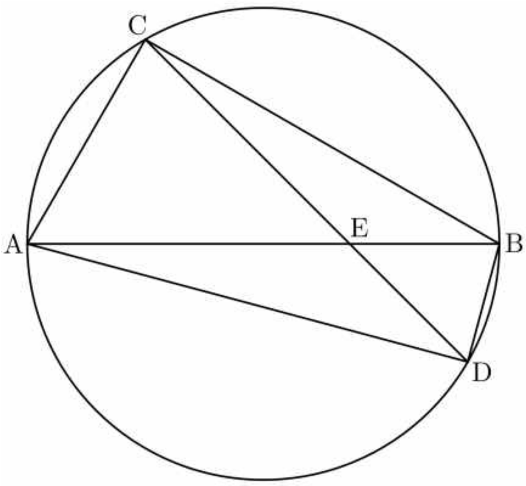
ㄴ. $a_2 = 10$, $a_4 > 10$이면 $\displaystyle\sum_{k=1}^{10}(a_k + b_k) = 113$이다.

ㄷ. $a_2 > a_4$이면 $a_3 > a_{10}$이다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

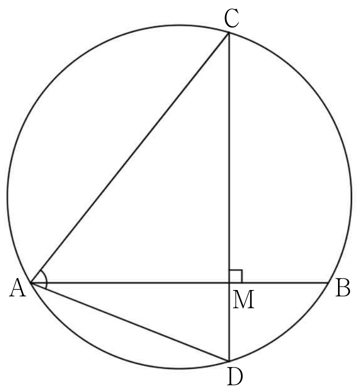
Level 2

1 그림과 같이 길이가 2인 선분 AB를 지름으로 하는 원 위에 두 점 C, D가 있다. 두 선분 AB와 CD가 점 E에서 만나고 $\overline{\mathrm{AC}}=1$, $\overline{\mathrm{CE}}=\dfrac{\sqrt{6}}{2}$일 때, $\overline{\mathrm{AD}}+\sqrt{3}\times\overline{\mathrm{BD}}$의 값은?

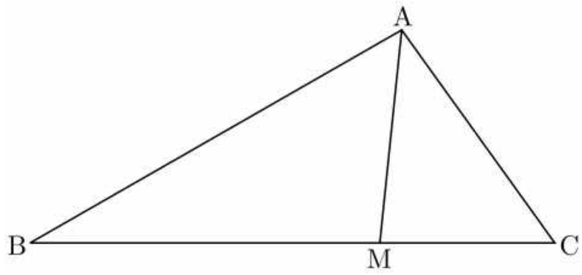


① $\sqrt{2}$　② 2　③ $2\sqrt{2}$
④ $2\sqrt{3}$　⑤ 4

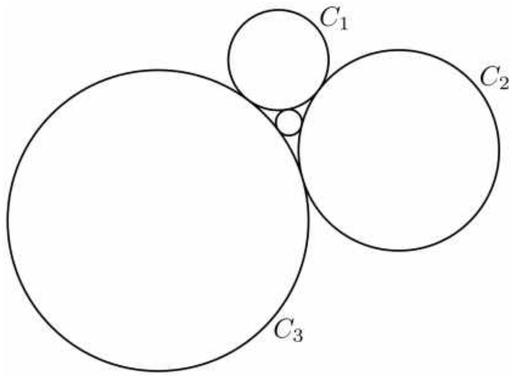
2 그림과 같이 원 위의 두 점 A, B에 대하여 선분 AB를 $2:1$로 내분하는 점 M을 지나고 선분 AB와 수직인 직선이 원과 만나는 두 점을 각각 C, D라 하자. $\overline{\mathrm{AB}}=6$, $\cos\angle\mathrm{CAD}=\dfrac{1}{2\sqrt{3}}$일 때, 원의 반지름의 길이를 r이라 하자. r^2의 값을 구하시오.



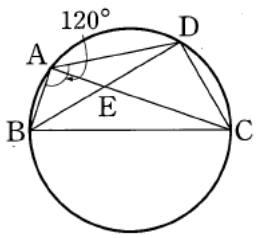
3 그림과 같이 $\overline{\mathrm{BC}}=6$, $\overline{\mathrm{CA}}=3$인 삼각형 ABC에 대하여 선분 BC를 $2:1$로 내분하는 점을 M이라 하자. 삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이를 r_1, 삼각형 AMC의 외접원의 반지름의 길이를 r_2라 할 때, $r_1=2r_2$이다. $\overline{\mathrm{AB}}^2$의 값을 구하시오.



4 그림과 같이 반지름의 길이가 각각 1, 2, 3인 세 원 C_1, C_2, C_3가 서로 외접하고 있다. 세 원 C_1, C_2, C_3와 모두 외접하는 원의 반지름의 길이가 $\dfrac{q}{p}$일 때, $p+q$의 값을 구하시오. (단, p, q는 서로소인 자연수이다.)

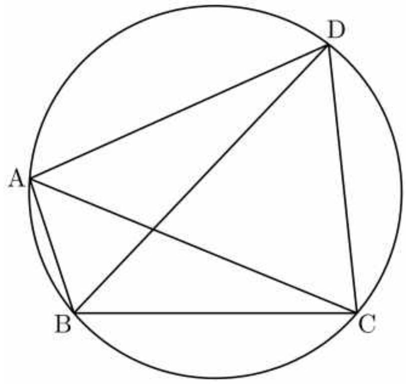


5 그림과 같이 원에 내접하는 사각형 ABCD에서 $2\overline{\mathrm{AB}}=\overline{\mathrm{AD}}$, $\angle \mathrm{BAD}=120°$가 성립한다. 대각선 $\overline{\mathrm{AC}}$, $\overline{\mathrm{BD}}$의 교점 E가 선분 BD를 $3:4$로 내분할 때, $\overline{\mathrm{AB}}:\overline{\mathrm{BC}}:\overline{\mathrm{CD}}$의 값은?



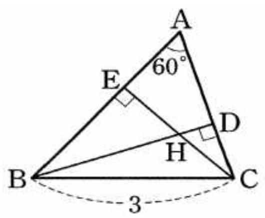
① $1:2:3$　② $1:3:2$　③ $2:1:3$
④ $2:3:1$　⑤ $3:2:1$

6 그림과 같이 원에 내접하는 사각형 ABCD가 있다. $\overline{\mathrm{AB}}=2$, $\overline{\mathrm{BC}}=4$, $\overline{\mathrm{CA}}=5$이고 두 삼각형 ABC, DBC의 넓이를 각각 S_1, S_2라 할 때, $S_2=2S_1$이다. $\overline{\mathrm{DB}}-\overline{\mathrm{DC}}$의 값은? (단, $\overline{\mathrm{DB}}>\overline{\mathrm{DC}}$)



① 1　② $\sqrt{2}$　③ $\sqrt{3}$
④ 2　⑤ $\sqrt{5}$

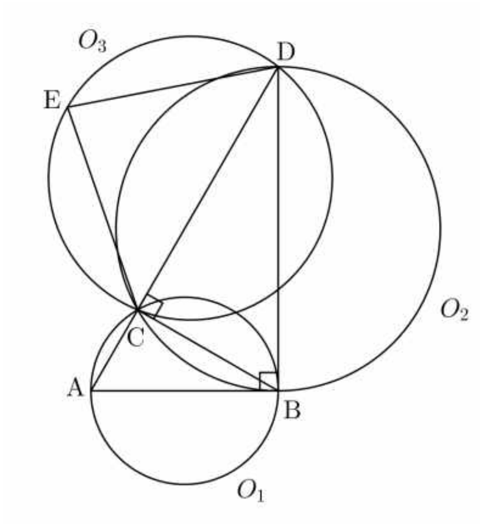
7. 그림과 같은 예각삼각형 ABC의 꼭짓점 B, C에서 변 AC, AB에 내린 수선의 발을 각각 D, E라 하고, 선분 BD, CE의 교점을 H라 하자. $\angle \mathrm{A} = 90°$, $\overline{\mathrm{BC}} = 3$일 때, $\overline{\mathrm{AH}}$의 길이를 구하시오.



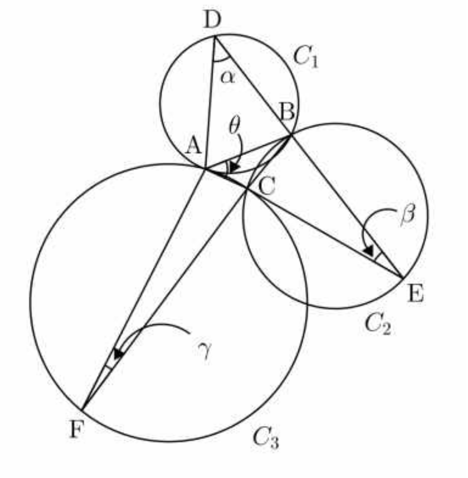
8. 그림과 같이 한 평면 위에 있는 세 삼각형 ABC, BCD, CDE에 외접하는 원을 각각 O_1, O_2, O_3라 할 때, 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) $\overline{\mathrm{AB}} = 4$, $\angle \mathrm{ABD} = \angle \mathrm{BCD} = \dfrac{\pi}{2}$
>
> (나) 두 삼각형 ABC, BCD의 넓이의 비는 $1 : 3$이다.
>
> (다) $\overline{\mathrm{CE}} = \overline{\mathrm{DE}}$, $\cos(\angle \mathrm{CED}) = \dfrac{1}{7}$

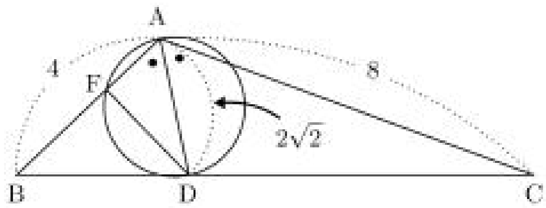
세 원 O_1, O_2, O_3의 중심을 꼭짓점으로 하는 삼각형의 넓이는 $\dfrac{q}{p}\sqrt{3}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, 점 C는 선분 AD위에 있고, p와 q는 서로소인 자연수이다.)



7 그림과 같이 삼각형 ABC와 세 점 D, E, F에 대하여 삼각형 ABD의 외접원을 C_1, 삼각형 BCE의 외접원을 C_2, 삼각형 CAF의 외접원을 C_3라 하자. 세 원 C_1, C_2, C_3의 넓이의 비가 $9:16:36$이고, $\angle \mathrm{ADB}=\alpha$, $\angle \mathrm{BEC}=\beta$, $\angle \mathrm{CFA}=\gamma$라 할 때, $\sin\alpha:\sin\beta:\sin\gamma=16:9:4$이다. $\angle \mathrm{BAC}=\theta$라 할 때, $\cos\theta=\dfrac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.)



8 그림과 같이 $\overline{\mathrm{AB}}=4$, $\overline{\mathrm{AC}}=8$인 삼각형 ABC가 있다. 선분 BC위의 점 D에 대하여 $\angle \mathrm{BAD}=\angle \mathrm{CAD}$이고 $\overline{\mathrm{AD}}=2\sqrt{2}$일 때, 선분 AD를 지름으로 하는 원이 선분 AB와 만나는 점 중에서 A가 아닌 점을 F라 하자. $\overline{\mathrm{AF}}$의 길이는?



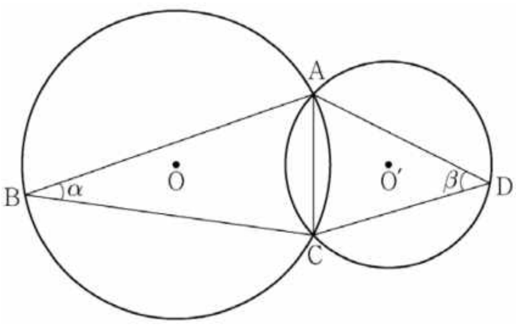
① $\dfrac{9}{8}$ ② $\dfrac{5}{4}$ ③ $\dfrac{11}{8}$

④ $\dfrac{3}{2}$ ⑤ $\dfrac{13}{8}$

9 그림과 같이 한 평면 위에 있는 두 삼각형 ABC, ACD 의 외심을 각각 O, O' 이라 하고 $\angle \mathrm{ABC} = \alpha$, $\angle \mathrm{ADC} = \beta$ 라 할 때,

$$\frac{\sin\beta}{\sin\alpha} = \frac{3}{2},\ \cos(\alpha+\beta) = \frac{1}{3},\ \overline{\mathrm{OO}'} = 1$$

이 성립한다. 삼각형 ABC 의 외접원의 넓이가 $\frac{q}{p}\pi$ 일 때, $p+q$ 의 값을 구하시오. (단, p 와 q 는 서로소인 자연수이다.)



10 첫째항이 30이고 공차가 $-d$ 인 등차수열 $\{a_n\}$에 대하여 등식

$$a_m + a_{m+1} + a_{m+2} + \cdots + a_{m+k} = 0$$

을 만족시키는 두 자연수 m , k가 존재하도록 하는 자연수 d의 개수는?

① 11 ② 12 ③ 13 ④ 14 ⑤ 15

11 공차가 0이 아닌 등차수열 $\{a_n\}$이 있다. 수열 $\{b_n\}$은

$$b_1 = a_1$$

이고, 2이상의 자연수 n에 대하여

$$b_n = \begin{cases} b_{n-1} + a_n & (n\text{이 } 3\text{의 배수가 아닌경우}) \\ b_{n-1} - a_n & (n\text{이 } 3\text{의 배수인경우}) \end{cases}$$

이다. $b_{10} = a_{10}$일 때, $\dfrac{b_8}{b_{10}} = \dfrac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오.

(단, p와 q는 서로소인 자연수이다.)

12 첫째항이 자연수이고 공차가 음의 정수인 등차수열 $\{a_n\}$과 첫째항이 자연수이고 공비가 음의 정수인 등비수열 $\{b_n\}$이 다음 조건을 만족시킬 때, $a_7 + b_7$의 값을 구하시오.

(가) $\displaystyle\sum_{n=1}^{5} (a_n + b_n) = 27$

(나) $\displaystyle\sum_{n=1}^{5} (a_n + |b_n|) = 67$

(다) $\displaystyle\sum_{n=1}^{5} (|a_n| + |b_n|) = 81$

13 첫째항이 같은 자연수인 두 등차수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$이 다음 조건을 만족시킬 때, a_5+b_5의 값을 구하시오.

(가) $\displaystyle\sum_{n=1}^{7} a_{(b_n)} = 413$

(나) $\displaystyle\sum_{n=1}^{7} b_{(a_n)} = 343$

(다) a_2, b_2는 모두 자연수이고 $3 < a_2 - b_2 < 10$이다.

14 수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $a_{2n} = -a_n - n$

(나) $a_{2n+1} = 3a_n$

$\displaystyle\sum_{n=16}^{31} a_n = 28$일 때, a_{120}의 값은?

① -369 ② -371 ③ -373
④ -375 ⑤ -377

한 눈에 보는 정답

#1 #2 #3

#1 1. 43	2. 63	3. ③	4. 103	5. ②	6. 127
#2 1. ④	2. ④	3. 154	4. ④	5. ④	6. ③

Level 1

1. 99	2. ④	3. 4 : 3 : 2	4. 192	5. ②
6. ④	7. ⑤	8. ④	9. 165	10. ⑤

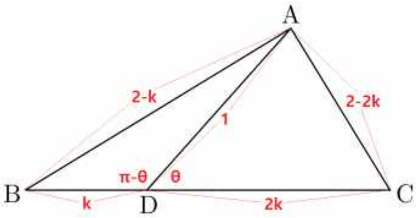
Level 2

1. ③	2. 12	3. 24	4. 29	5. ②	
6. ②	7. $\sqrt{3}$	8. 7	9. 27	10. ④	
11. 26	12. ②	13. 13	14. 117	15. 42	16. ①

정답 및 해설

1. 43

$\overline{\mathrm{BD}}=k$, $\overline{\mathrm{DC}}=2k$, $\angle\mathrm{ADC}=\theta$라 하자.



두 삼각형 ABD, ACD에서 각각 코사인법칙을 이용하면

$(2-k)^2=k^2+1+2k\cos\theta$

$(2-2k)^2=4k^2+1-4k\cos\theta$

위의 두 식을 연립하면 $k=\dfrac{9}{16}$, $\cos\theta=\dfrac{2}{3}$

$\overline{\mathrm{BC}}=3k=\dfrac{27}{16}=\dfrac{q}{p}$

$p+q=16+27=43$

2. 63

$\angle\mathrm{BAD}$ 와 $\angle\mathrm{BCD}$ 는 같은 호에 대한 원주각이므로

그 크기가 같다.

$\angle\mathrm{BAD}=\angle\mathrm{BCD}=\theta$, $\overline{\mathrm{AD}}=a$, $\overline{\mathrm{CB}}=b$ 라 하면

삼각형 ABD 의 넓이 S_1 은

$S_1=\dfrac{1}{2}\times\overline{\mathrm{AB}}\times\overline{\mathrm{AD}}\times\sin\theta=\dfrac{1}{2}\times6\times a\times\sin\theta=3a\sin\theta$

삼각형 CBD의 넓이 S_2 는

$S_2=\dfrac{1}{2}\times\overline{\mathrm{CB}}\times\overline{\mathrm{CD}}\times\sin\theta=\dfrac{1}{2}\times b\times4\times\sin\theta=2b\sin\theta$

$S_1:S_2=9:5$ 이므로 $3a:2b=9:5$

$a:b=6:5$ 이므로 $a=6k$, $b=5k$ $(k>0)$라고 하자.

삼각형 ABC 에서 코사인법칙에 의해

$\overline{\mathrm{AC}}^2=6^2+(5k)^2-2\times6\times5k\times\cos\alpha$ …… ㉠

$\angle\mathrm{ABC}$ 와 $\angle\mathrm{ADC}$ 는 같은 호에 대한 원주각이므로

$\angle\mathrm{ABC}=\angle\mathrm{ADC}=\alpha$

삼각형 ADC 에서 코사인법칙에 의하여

$\overline{\mathrm{AC}}^2=(6k)^2+4^2-2\times6k\times4\times\cos\alpha$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하면

$11k^2+9k-20=0$, $(11k+20)(k-1)=0$

$k>0$ 이므로 $k=1$ 이고 $a=6k=6$

$\sin\alpha=\sqrt{1-\cos^2\alpha}=\sqrt{1-\left(\dfrac{3}{4}\right)^2}=\dfrac{\sqrt{7}}{4}$

삼각형 ADC 의 넓이 S는

$S=\dfrac{1}{2}\times\overline{\mathrm{AD}}\times\overline{\mathrm{CD}}\times\sin\alpha=\dfrac{1}{2}\times6\times4\times\dfrac{\sqrt{7}}{4}=3\sqrt{7}$

따라서 $S^2=(3\sqrt{7})^2=63$

3. ③

$\overline{AD}=\overline{CD}=a$라 하면 $\overline{BC}=4a$이다.

삼각형 ADC는 이등변삼각형이므로

$\cos(\angle ACD)=\dfrac{\frac{1}{2}}{a}=\dfrac{1}{2a}$ …… ㉠

한편 삼각형 ABC에서 코사인법칙에 의해

$\cos(\angle ACD)=\dfrac{\overline{AC}^2+\overline{BC}^2-\overline{AB}^2}{2\times\overline{AC}\times\overline{BC}}$

$=\dfrac{1^2+(4a)^2-(\sqrt{6})^2}{2\times1\times4a}=\dfrac{16a^2-5}{8a}$ …… ㉡

㉠, ㉡에서 $\dfrac{1}{2a}=\dfrac{16a^2-5}{8a}$

$a>0$이므로 $a=\dfrac{3}{4}$

따라서 $\overline{BC}=4a=3$

4. 103

$\cos A=\dfrac{6^2+5^2-4^2}{2\times6\times5}=\dfrac{3}{4}$ 이므로 $\sin A=\dfrac{\sqrt{7}}{4}$ 이다.

$\triangle\mathrm{ABC}$ 의 넓이$=\dfrac{1}{2}\times6\times5\times\dfrac{\sqrt{7}}{4}=\dfrac{15\sqrt{7}}{4}$

$\overline{\mathrm{PF}}=x$ 라 하면

$\dfrac{15\sqrt{7}}{4}=\dfrac{1}{2}\left(6x+4\sqrt{7}+\dfrac{5\sqrt{7}}{2}\right)$ $\quad\therefore\ x=\dfrac{\sqrt{7}}{6}$

$\triangle\mathrm{EFP}=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{\sqrt{7}}{6}\times\dfrac{\sqrt{7}}{2}\sin(\pi-\mathrm{A})=\dfrac{7\sqrt{7}}{96}$

$\therefore\ p+q=103$

5. ②

$\overline{\mathrm{FD}}=\dfrac{2}{3}$, $\overline{\mathrm{FC}}=2$

6. 127

$(\overline{\mathrm{BD}}=\dfrac{10}{3\sqrt{3}})$

각 ABC를 θ라 두면

먼저 삼각형 ABC에서 사인법칙을 쓰면 $AC=AD=2\sin\theta$

삼각형 ABC에서 코사인법칙을 이용하면 $\cos\theta=-\dfrac{1}{3}$

삼각형 ABC와 삼각형 ACD가 닮음이므로 닮음비로..

1. ④

등차수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항을 a, 공차를 d 라 하자.

조건 (가)에 의하여

$\displaystyle\sum_{n=1}^{2m-1}a_n=\frac{(2m-1)\{2a+(2m-2)d\}}{2}$

$=(2m-1)\{a+(m-1)d\}=0$

$2m-1>0$ 이므로 $a+(m-1)d=0$

즉, $a_m=0$

조건 (나)에 의하여

$\sum_{n=1}^{15} a_n \neq \sum_{n=1}^{15} |a_n|$ 이고 $\sum_{n=1}^{15} a_n > 0$ 이므로

$a_m = 0$ 을 만족시키는 m 의 범위는 $m \le 7$

수열의 항	항의 개수
$-(m-1)d, \cdots, -2d, -d$	$(m-1)$ 개
$0(=a_m)$	1 개
$d,\ 2d, \cdots, (m-1)d$	$(m-1)$ 개
$md, (m+1)d, \cdots, a_{15}$	$(16-2m)$ 개

$\sum_{n=1}^{2m-1} a_n = 0$ 이므로

$\sum_{n=1}^{15} a_n = \frac{(16-2m)\{2md+(15-2m)d\}}{2}$

$= 15(8-m)d = 45$

즉, $(8-m)d = 3$

$\sum_{n=1}^{15} |a_n|$

$= 2 \times \frac{(m-1)\{d+(m-1)d\}}{2} + 15(8-m)d$

$= (m-1)md + 45 = 90$

$2\sum_{n=1}^{15} a_n = \sum_{n=1}^{15} |a_n|$ 이므로

$15(8-m)d = (m-1)md$

$m^2 + 14m - 120 = 0$

$(m-6)(m+20) = 0$

m 은 자연수이므로 $m = 6$

$\sum_{n=1}^{15} a_n = 30d = 45$ 즉, $d = \frac{3}{2}$

따라서 $a_{14} = a_6 + 8d = 0 + 12 = 12$

2. ④

수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$이 등차수열이므로 수열 $\{a_n + b_n\}$, $\{a_n - b_n\}$도 등차수열이다.

$\sum_{k=1}^{n}(a_k + b_k) = \sum_{k=1}^{n} a_k + \sum_{k=1}^{n} b_k = S_n + T_n$,

$\sum_{k=1}^{n}(a_k - b_k) = \sum_{k=1}^{n} a_k - \sum_{k=1}^{n} b_k = S_n - T_n$이고

$S_n^2 - T_n^2 = (S_n + T_n)(S_n - T_n)$이므로

$(S_n + T_n)(S_n - T_n) = n^2(n+1)$ ...... ㉠

등차수열의 공차가 0일 때, 이 수열의 합은 n에 대한 1차식이고,
등차수열의 공차가 0이 아닐 때, 이 수열의 합은 상수항이 없는 n에 대한 2차식이다.

그런데 두 등차수열의 합 $S_n + T_n$, $S_n - T_n$을 곱한 값이 $n^2(n+1)$이므로 수열 $\{a_n + b_n\}$의 공차는 0이다.

($\because$ 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$의 공차는 서로 다른 부호)

즉, $a_n + b_n$은 일정한 값을 갖는다.

㉠의 양변에 $n = 1$을 대입하면

$(S_1 + T_1)(S_1 - T_1) = (a_1 + b_1)(a_1 - b_1) = 2$이고

$a_1 - b_1 = 1$이므로 $a_1 + b_1 = 2$

$\therefore\ a_n + b_n = 2,\ S_n + T_n = 2n$ ...... ㉡

㉡을 ㉠에 대입하여 정리하면 $S_n - T_n = \frac{n(n+1)}{2}$

$\therefore\ a_n - b_n = n$

$a_{20} - b_{20} = 20,\ a_{20} + a_{20} = 2$이므로 $a_{20}b_{20} = \frac{2^2 - 20^2}{4} = -99$

3. 154

$a_1 = 7$

$a_2 = 14$

$a_3 = 8$

$a_4 = 5$

$a_5 = 10$

$a_6 = 6$

$a_7 = 4$

$a_8 = 3$

$a_9 = 6$

$\vdots$

이후에 6,4,3 계속반복

$7 + 14 + 8 + 5 + 10 + (6 + 4 + 3) \times 8 + 6 = 154$

4. ④

등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공차를 d라 하자.

$a > 0,\ d < -1$이므로 $n \le k$일 때 $a_n \ge 0,\ n \ge k+1$일 때 $a_n < 0$인 자연수 k가 유일하게 존재한다.

$n \le k$일 때,

$a_n \ge 0,\ b_n = a_{n+1} - \frac{n}{2}$이므로

$b_1 = a_2 - \frac{1}{2},\ b_2 = a_3 - 1, \cdots, b_k = a_{k+1} - \frac{k}{2}$

따라서 수열 $\{b_n\}$은 $n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ k-1$일 때,

$b_{n+1} - b_n = d - \frac{1}{2}$을 만족시킨다.

$n \ge k+1$일 때,

$a_n < 0,\ b_n = a_n + \frac{n}{2}$이므로

$b_{k+1} = a_{k+1} + \frac{k+1}{2},\ b_{k+2} = a_{k+2} + \frac{k+2}{2},$

$b_{k+3} = a_{k+3} + \frac{k+3}{2}, \cdots$

따라서 수열 $\{b_n\}$은 $n = k+1,\ k+2,\ k+3,\ \cdots$일 때,

$b_{n+1} - b_n = d + \frac{1}{2}$을 만족시킨다.

즉, $n \le k-1$일 때, $d - \frac{1}{2} < 0$이므로 $b_n > b_{n+1}$,

$n \ge k+1$일 때, $d + \frac{1}{2} < 0$이므로 $b_n > b_{n+1}$,

$n = k$일 때,

$$b_{k+1}-b_k=\left(a_{k+1}+\frac{k+1}{2}\right)-\left(a_{k+1}-\frac{k}{2}\right)$$
$$=k+\frac{1}{2}>0$$

이므로 $b_n<b_{n+1}$

그러므로 $n=k$일 때만 $b_n<b_{n+1}$이다.

조건 (가)에서 $b_5<b_6$이므로 $k=5$이다.

그러므로 $b_n=\begin{cases} a_{n+1}-\dfrac{n}{2} & (n\le 5) \\ a_n+\dfrac{n}{2} & (n\ge 6)\end{cases}$

조건 (나)에 의하여

$$S_5=b_1+b_2+b_3+b_4+b_5$$
$$=\frac{5(b_1+b_5)}{2}=\frac{5}{2}\times\left\{\left(a_2-\frac{1}{2}\right)+\left(a_6-\frac{5}{2}\right)\right\}$$
$$=\frac{5}{2}\times(2a+6d-3)=0$$

즉, $2a+6d-3=0$ ⋯ ㉠

$$S_9-S_5=b_6+b_7+b_8+b_9$$
$$=\frac{4(b_6+b_9)}{2}=\frac{4}{2}\times\left\{(a_6+3)+\left(a_9+\frac{9}{2}\right)\right\}$$
$$=2\times\left(2a+13d+\frac{15}{2}\right)=0$$

즉, $2a+13d+\dfrac{15}{2}=0$ ⋯ ㉡

㉠, ㉡에 의하여 $a=6,\ d=-\dfrac{3}{2}$이므로

$$a_n=-\frac{3}{2}n+\frac{15}{2}$$

$S_9=0,\ b_{10}=a_{10}+5=-\dfrac{15}{2}+5=-\dfrac{5}{2}$

$n\ge 6$일 때, 수열 $\{b_n\}$은 $b_{n+1}-b_n=d+\dfrac{1}{2}=-1$을 만족시키므로

$$S_n=S_9+(b_{10}+b_{11}+b_{12}+\cdots+b_n)$$
$$=0+\frac{(n-9)\{-5+(n-10)(-1)\}}{2}$$
$$=-\frac{(n-5)(n-9)}{2}\quad(n\ge 10)$$

$S_n\le -70$을 만족시키는 n의 값의 범위는 $n\ge 19$이므로

자연수 n의 최솟값은 19

[참고]

$$b_n=\begin{cases} 6-2n & (n\le 5) \\ \dfrac{15}{2}-n & (n\ge 6)\end{cases}$$

$$S_n=\begin{cases} n(5-n) & (n\le 5) \\ -\dfrac{1}{2}(n-5)(n-9) & (n\ge 6)\end{cases}$$

이므로 $n\le 9$일 때, $S_n\ge 0$

5. ④

$a_{20}=a_{10}-1$에서 $a_{20}=1$이므로

$a_{10}=2$

또, $a_{10}=a_5-1$에서

$a_5=3$

$a_5=2a_2+1$에서

$a_2=1$

$a_2=a_1-1$에서

$a_1=2$

한편,

$a_{2n}+a_{2n+1}=(a_n-1)+(2a_n+1)=3a_n$

이므로

$a_2+a_3=3a_1$

$a_4+a_5+a_6+a_7=3a_2+3a_3=3^2a_1$

$a_8+a_9+\cdots+a_{15}=3a_4+3a_5+\cdots+3a_7=3^3a_1$

$a_{16}+a_{17}+\cdots+a_{31}=3a_8+3a_9+\cdots+3a_{15}=3^4a_1$

$a_{32}+a_{33}+\cdots+a_{63}=3a_{16}+3a_{17}+\cdots+3a_{31}=3^5a_1$

따라서

$$\sum_{n=1}^{63}a_n$$
$$=a_1+(a_2+a_3)+(a_4+\cdots+a_7)+(a_8+\cdots+a_{15})$$
$$+(a_{16}+\cdots+a_{31})+(a_{32}+\cdots+a_{63})$$
$$=a_1(1+3+3^2+3^3+3^4+3^5)$$
$$=2\times\frac{3^6-1}{3-1}=728$$

6. ③

주어진 조건에 의하면 $n\ge 5$일 때 a_n은 한가지 이다

따라서 $a_4,\ a_3,\ a_2,\ a_1$의 값만 확인한다.

$a_n<0$이면 $a_{n+1}=-2a_n+3>0$이므로

수열 $\{a_n\}$의 값이 연속하여 음수인 경우는 없다.

따라서 최댓값은 $a_{n+1}=a_n-6$일 때

즉 $a_4=11,\ a_3=17,\ a_2=23,\ a_1=29$ 일 때이다.

최솟값은 (나)의 관계식이 번갈아 나오는 경우

즉 $a_4=-1,\ a_3=5,\ a_2=-1,\ a_1=5$일 때이다.

$$\therefore\ M-m=(11+17+23+29)-(-1+5-1+5)$$
$$=80-8=72$$

1. 99

$M=\dfrac{64}{7}\pi,\ m=4\pi$

$\therefore M+m=\dfrac{92}{7}\pi$

2. ④

$\overline{\mathrm{BC}}=a,\ \overline{\mathrm{CA}}=b,\ \overline{\mathrm{AB}}=c$, 삼각형 ABC의 넓이를 S라 하면

$$S=\frac{1}{2}\times a\times\overline{\mathrm{AD}}=\frac{1}{2}\times b\times\overline{\mathrm{BE}}=\frac{1}{2}\times c\times\overline{\mathrm{CF}}$$

$a=\dfrac{2S}{\overline{\mathrm{AD}}}$, $b=\dfrac{2S}{\overline{\mathrm{BE}}}$, $c=\dfrac{2S}{\overline{\mathrm{CF}}}$

$$a:b:c=\frac{2S}{\overline{\mathrm{AD}}}:\frac{2S}{\overline{\mathrm{BE}}}:\frac{2S}{\overline{\mathrm{CF}}}$$
$$=\frac{1}{\overline{\mathrm{AD}}}:\frac{1}{\overline{\mathrm{BE}}}:\frac{1}{\overline{\mathrm{CF}}}$$
$$=\frac{1}{2}:\frac{1}{3}:\frac{1}{4}$$
$$=6:4:3$$

$a=6k$, $b=4k$, $c=3k$ (k는 양수)라 하면

$$\cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$$
$$=\frac{(6k)^2+(4k)^2-(3k)^2}{2\times 6k\times 4k}$$
$$=\frac{43}{48}$$

3. 4 : 3 : 2

4. 192

삼각형 ABD에서 $\angle \mathrm{ADB}=\alpha$라 할 때,

삼각형 ABD의 외접원의 반지름의 길이가 6이므로

$$\frac{\overline{\mathrm{AB}}}{\sin\alpha}=12$$

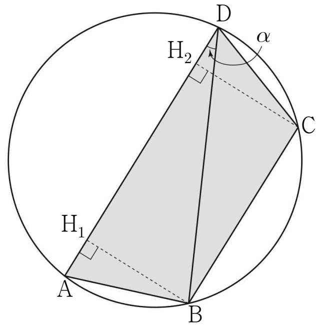
$\sin\alpha=\dfrac{3\sqrt{3}}{12}=\dfrac{\sqrt{3}}{4}$ 이므로

$$\cos\alpha=\sqrt{1-\left(\frac{\sqrt{3}}{4}\right)^2}=\frac{\sqrt{13}}{4}$$

$\overline{\mathrm{AB}}=\overline{\mathrm{CD}}$ 이므로 $\angle \mathrm{ADB}=\angle \mathrm{CBD}$

선분 AD와 선분 BC는 평행하므로

사각형 ABCD는 등변사다리꼴이다.



두 점 B, C에서 선분 AD에 내린 수선의 발을

각각 $\mathrm{H_1}$, $\mathrm{H_2}$라 할 때,

$$\overline{\mathrm{DH_1}}=\overline{\mathrm{BD}}\cos\alpha=8\sqrt{2}\times\frac{\sqrt{13}}{4}=2\sqrt{26}$$

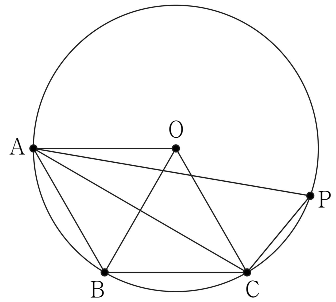
$$\overline{\mathrm{BH_1}}=\overline{\mathrm{BD}}\sin\alpha=8\sqrt{2}\times\frac{\sqrt{3}}{4}=2\sqrt{6}$$

$\overline{\mathrm{AH_1}}=\overline{\mathrm{DH_2}}$ 이므로 사각형 ABCD의 넓이

$$S=\frac{1}{2}\times(\overline{\mathrm{AD}}+\overline{\mathrm{BC}})\times\overline{\mathrm{BH_1}}$$
$$=\frac{1}{2}\times\left\{\left(\overline{\mathrm{DH_1}}+\overline{\mathrm{AH_1}}\right)+\left(\overline{\mathrm{DH_1}}-\overline{\mathrm{DH_2}}\right)\right\}\times\overline{\mathrm{BH_1}}$$
$$=\overline{\mathrm{DH_1}}\times\overline{\mathrm{BH_1}}$$
$$=2\sqrt{26}\times2\sqrt{6}=8\sqrt{39}$$

따라서 $\dfrac{S^2}{13}=192$

5. ②



원의 중심을 O 라 하자.

두 삼각형 OAB 와 OBC 는 정삼각형이므로

$\overline{\mathrm{AB}}=\overline{\mathrm{BC}}=3$

삼각형 ABC 에서 $\angle \mathrm{ABC}=\dfrac{2\pi}{3}$ 이므로

삼각형 ABC 에서 코사인법칙에 의하여

$$\overline{\mathrm{AC}}^{\,2}=3^2+3^2-2\times3\times3\times\cos\frac{2\pi}{3}=27$$

$\overline{\mathrm{AC}}=3\sqrt{3}$

사각형 ABCP 가 원에 내접하므로

$\angle \mathrm{ABC}+\angle \mathrm{APC}=\pi$ 즉, $\angle \mathrm{APC}=\dfrac{\pi}{3}$

$\overline{\mathrm{AP}}=x$, $\overline{\mathrm{CP}}=y$ 라 하면

삼각형 ACP 에서 코사인법칙에 의하여

$$(3\sqrt{3})^2=x^2+y^2-2xy\cos\frac{\pi}{3}$$

$$27=(x+y)^2-3xy$$

$x+y=8$ 이므로 $xy=\dfrac{37}{3}$

삼각형 ABC 의 넓이는

$$\frac{1}{2}\times3\times3\times\sin\frac{2\pi}{3}=\frac{9\sqrt{3}}{4}$$

삼각형 ACP 의 넓이는

$$\frac{1}{2}\times x\times y\times\sin\frac{\pi}{3}=\frac{37\sqrt{3}}{12}$$

따라서 사각형 ABCP 의 넓이는

$$\frac{9\sqrt{3}}{4}+\frac{37\sqrt{3}}{12}=\frac{16\sqrt{3}}{3}$$

6. ④

삼각형 APB에서 사인법칙에 의해

$$\frac{\overline{AB}}{\sin(\angle APB)}=2r_1 \cdots\cdots ㉠$$

삼각형 ABQ에서 사인법칙에 의해

$$\frac{\overline{AB}}{\sin(\angle AQB)}=2r_2 \cdots\cdots ㉡$$

$\sin(\angle APB)=2\sin(\angle AQB)$이므로

㉠, ㉡에서 $\sqrt{2}r_1=r_2$

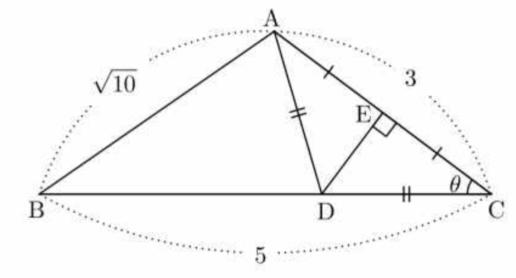
두 원의 넓이의 합이 9π이므로

$9\pi=\pi r_1{}^2+\pi r_2{}^2=\pi r_1{}^2+\pi\left(\sqrt{2}r_1\right)^2=3\pi r_1{}^2$

즉, $r_1{}^2=3$이므로 $r_1=\sqrt{3}$, $r_2=\sqrt{6}$

따라서 $r_1r_2=\sqrt{3}\times\sqrt{6}=3\sqrt{2}$

7. ⑤



$\angle \mathrm{ACB}=\theta$라 하면, $\cos\theta=\dfrac{9+25-10}{2\cdot3\cdot5}=\dfrac{4}{5}$, $\sin\theta=\dfrac{3}{5}$

점 D에서 선분 AC에 내린 수선의 발을 E라 하면,

$\overline{\mathrm{CE}}=\overline{\mathrm{AE}}$이므로 $\overline{\mathrm{CD}}=\dfrac{1}{\cos\theta}\cdot\dfrac{3}{2}=\dfrac{15}{8}$

$\overline{\mathrm{BD}}=5-\dfrac{15}{8}=\dfrac{25}{8}$

이때 삼각형 ABC의 넓이는

$\dfrac{1}{2}\cdot3\cdot5\cdot\sin\theta=\dfrac{9}{2}$이므로

삼각형 ABD의 넓이는 $\dfrac{5}{8}\cdot\dfrac{9}{2}=\dfrac{45}{16}$

8. ④

조건 (가), (나)에 의하여

$S_7=T_7$이고 $S_7+T_7=84$이므로 $S_7=42$

$S_7=T_7$이므로 7 이하의 모든 자연수 n에 대하여

$a_n\ge 0 \cdots ㉠$

조건 (나)에 의하여 6 이상의 모든 자연수 n에 대하여

$(S_{n+1}+T_{n+1})-(S_n+T_n)=0$

$a_{n+1}+|a_{n+1}|=0$

$a_{n+1}\le 0 \cdots ㉡$

㉠, ㉡에 의하여 $0\le a_7\le 0$이므로 $a_7=0$

수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공차를 d라 하자.

$S_7=\dfrac{7(2a+6d)}{2}=42$, $a_7=a+6d=0$에서 $a=12$, $d=-2$

$a_n=14-2n$

$S_{15}=\dfrac{15\times(24-28)}{2}=-30$

$S_{15}+T_{15}=84$

따라서 $T_{15}=84-(-30)=114$

9. 165

10. ⑤

ㄱ. $a_1=3$, $b_1=1$이면

$a_2=3+1=4$, $b_2=(-1)^3=-1$

$a_3=4+(-1)=3$, $b_3=(-1)^4=1$

$a_4=3+1=4$, $b_4=(-1)^3=-1$

⋮

즉, 모든 자연수 n에 대하여

$a_{2n-1}=3$, $a_{2n}=4$, $b_{2n-1}=1$, $b_{2n}=-1$

따라서 $a_{10}+b_{10}=4+(-1)=3$ (참)

ㄴ. a_1이 홀수일 때는 $b_2=-1$이고 $a_3=a_2+b_2=9$, $b_3=1$이므로

$a_4=a_3+b_3=10$이다. 즉, $a_4>10$의 조건을 만족시키지 않는다.

그러므로 a_1은 짝수이므로 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$을 차례로 나열하면 다음과 같다.

	$\{a_n\}$	$\{b_n\}$
$n=1$	a_1 (짝수)	b_1
$n=2$	10	1
$n=3$	11	1
$n=4$	12	-1
$n=5$	11	1
$n=6$	12	-1
⋮	⋮	⋮
$n=11$	11	1

따라서

$$\sum_{k=1}^{10}(a_k+b_k)=\sum_{k=1}^{10}a_{k+1}=10+11\times5+12\times4=113 \text{ (참)}$$

ㄷ. $a_2>a_4$이므로

$a_4=a_3+b_3=(a_2+b_2)+b_3=a_2+(b_2+b_3)$에서 $b_2+b_3<0$이다.

이때 b_2와 b_3은 각각 1 또는 -1이므로 $b_2=b_3=-1$이다. 즉, a_1과 a_2는 홀수인 자연수이므로 b_1은 짝수인 자연수이다.

따라서 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$을 차례로 나열하면 다음과 같다.

	$\{a_n\}$	$\{b_n\}$
$n=1$	a_1 (홀수)	b_1 (짝수)
$n=2$	a_1+b_1 (홀수)	-1
$n=3$	a_1+b_1-1 (짝수)	-1
$n=4$	a_1+b_1-2 (홀수)	1
$n=5$	a_1+b_1-1 (짝수)	-1
$n=6$	a_1+b_1-2 (홀수)	1
⋮	⋮	⋮
$n=10$	a_1+b_1-2 (홀수)	1

$a_3=a_1+b_1-1$, $a_{10}=a_1+b_1-2$이므로 $a_3>a_{10}$이다. (참)
이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

1. ③

2. 12

$\sin\angle\mathrm{CAD}=\sqrt{\dfrac{11}{12}}$

$\overline{\mathrm{CD}}=2\sqrt{r^2-1}=2r\sin\angle\mathrm{CAD}=2r\sqrt{\dfrac{11}{12}}$

$4(r^2-1)=4r^2\times\dfrac{11}{12}$, $r=2\sqrt{3}$

3. 24

$\angle\mathrm{ACB}=\theta$라 하자.

$\overline{\mathrm{AM}}=\sqrt{3^2+2^2-12\cos\theta}=2r_2\sin\theta$

$\overline{\mathrm{AB}}=\sqrt{3^2+6^2-36\cos\theta}=2r_1\sin\theta$

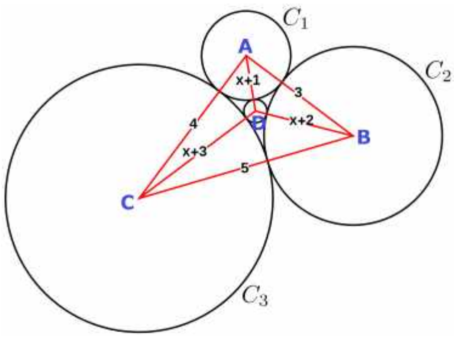
$r_1=2r_2$이므로 $\sqrt{3^2+6^2-36\cos\theta}=2\sqrt{3^2+2^2-12\cos\theta}$ 이다.

양변을 제곱해서 정리하면 $\cos\theta=\dfrac{7}{12}$

$\overline{\mathrm{AB}}^2=3^2+6^2-36\cos\theta=24$

4. 29

세 원 C_1, C_2, C_3의 중심을 각각 A, B, C,
세 원 C_1, C_2, C_3와 모두 외접하는 원의 중심과 반지름의 길이를 각각 D, x라 하자.



$\angle\mathrm{DAC}=\alpha$, $\angle\mathrm{DAB}=\dfrac{\pi}{2}-\alpha$라 하고 두 삼각형 DAC, DAB에서 코사인법칙을 이용하면

$(x+3)^2=16+(x+1)^2-8(x+1)\cos\alpha$,

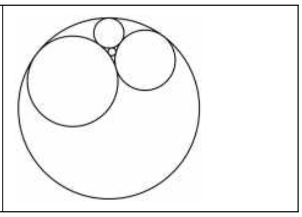
$1-\dfrac{x}{2}=(x+1)\cos\alpha$

$(x+2)^2=9+(x+1)^2-6(x+1)\sin\alpha$, $1-\dfrac{x}{3}=(x+1)\sin\alpha$

위 두 식의 양변을 제곱해서 더하면

$\left(1-\dfrac{x}{2}\right)^2+\left(1-\dfrac{x}{3}\right)^2=(x+1)^2$, $x=-6$ 또는 $x=\dfrac{6}{23}=\dfrac{q}{p}$,

$p+q=29$

[참고] 위 방정식에서 음수해(-6)의 절댓값은 세 원 C_1, C_2, C_3와 모두 접하고 세 원을 포함하는 원의 반지름의 길이이다.	

5. ②

$\overline{\mathrm{AB}}=a$라 하면 $\overline{\mathrm{AD}}=2a$이므로 $\triangle\mathrm{ABD}$에서 제이코사인법칙에 의해

$\overline{\mathrm{BD}}^2=a^2+(2a)^2-2\cdot a\cdot 2a\cdot\cos120^o$
$=a^2+4a^2+2a^2=7a^2$

$\therefore\overline{\mathrm{BD}}=\sqrt{7}a$

$\overline{\mathrm{BE}}:\overline{\mathrm{ED}}=3:4$이므로

$\triangle\mathrm{ABE}:\triangle\mathrm{AED}=\triangle\mathrm{BCE}:\triangle\mathrm{CDE}=3:4$

$\therefore\triangle\mathrm{ABC}:\triangle\mathrm{ADC}=3:4$

따라서 $4\triangle\mathrm{ABC}=3\triangle\mathrm{ADC}$에서

$4\cdot\dfrac{1}{2}\cdot\overline{\mathrm{AB}}\cdot\overline{\mathrm{BC}}\cdot\sin\mathrm{B}=3\cdot\dfrac{1}{2}\cdot\overline{\mathrm{AD}}\cdot\overline{\mathrm{DC}}\cdot\sin\mathrm{D}$

이때 $\sin B=\sin(\pi-D)=\sin D$이므로

$4\cdot\overline{\mathrm{AB}}\cdot\overline{\mathrm{BC}}=3\cdot\overline{\mathrm{AD}}\cdot\overline{\mathrm{DC}}$
$=3\cdot2\overline{\mathrm{AB}}\cdot\overline{\mathrm{DC}}$

$\therefore 2\overline{\mathrm{BC}}=3\overline{\mathrm{DC}}$ 즉, $\overline{\mathrm{BC}}:\overline{\mathrm{DC}}=3:2$

따라서 $\overline{\mathrm{BC}}=3k$, $\overline{\mathrm{DC}}=2k$ $(k>0)$라 하면 $\triangle\mathrm{BCD}$에서 제이코사인법칙에 의하여

$\overline{\mathrm{BD}}^2=(3k)^2+(2k)^2-2\cdot3k\cdot2k\cdot\cos60^o$

$7a^2=13k^2-6k^2=7k^2$ $\quad\therefore a=k$

$\therefore\overline{\mathrm{AB}}:\overline{\mathrm{BC}}:\overline{\mathrm{CD}}=a:3a:2a=1:3:2$

6. ②

$\angle\mathrm{BAC}=\angle\mathrm{BDC}=\theta$, $\overline{\mathrm{DB}}=x$, $\overline{\mathrm{DC}}=y$라 하자.

$S_1=\dfrac{1}{2}\times2\times5\times\sin\theta$, $S_2=\dfrac{1}{2}\times xy\times\sin\theta$, $S_2=2S_1$이므로

$xy=20$ ⋯ (1)

삼각형 ABC에서 코사인법칙을 이용하면 $\cos\theta=\dfrac{13}{20}$

삼각형 DBC에서 코사인법칙을 이용하면

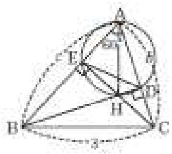
$16=x^2+y^2-2xy\cos\theta$, $x^2+y^2=42$ ⋯ (2)

(1), (2)에서 $(x-y)^2=x^2+y^2-2xy=2$

$\overline{\mathrm{DB}}-\overline{\mathrm{DC}}=x-y=\sqrt{2}$

7. $\sqrt{3}$

$\overline{AB}=c$, $\overline{AC}=b$라 하면



$\triangle ABD$에서 $\overline{AD}=c\cos 60^\circ=\frac{1}{2}c$

$\triangle AEC$에서 $\overline{AE}=b\cos 60^\circ=\frac{1}{2}b$

즉, $\triangle ABC \backsim \triangle ADE$이므로

$\overline{ED}=3\cdot\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$

한편, $\square AEHD$에서 $\angle AEH=\angle ADH=90^\circ$이므로 $\overline{AH}$는 $\square AEHD$에 외접하는 원의 지름이고, 이 원은 $\triangle AED$의 외접원이다.

따라서 $\triangle AED$에서 사인법칙에 의해

$\frac{\overline{DE}}{\sin 60^\circ}=\overline{AH}$ $\quad\therefore \overline{AH}=\frac{\frac{3}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=\sqrt{3}$

8. 7

세 원 O_1, O_2, O_3의 중심을 각각 O_1, O_2, O_3라 하자.

조건 (가),(나)에 의하여

점 O_1은 선분 AB의 중점이고 점 O_2는 선분 BD의 중점이다.

이때, 삼각형 ABC와 BCD의 넓이의 비가 $1:3$이므로

$\overline{AC}=x$, $\overline{CD}=3x\,(x>0)$으로 둘 수 있다. 또한 직선 AB가 원 O_2에 접하므로 $\overline{AB}^2=\overline{AC}\cdot\overline{AD}$

$16=x\cdot 4x$에서 $x=2$

$\overline{AC}=2$, $\overline{CD}=6$, $\overline{BC}=2\sqrt{3}$, $\overline{BD}=4\sqrt{3}$

삼각형 BCD의 넓이는 $\frac{1}{2}\times 6\times 2\sqrt{3}=6\sqrt{3}$

한편, $\cos(\angle CED)=\frac{1}{3}$에서

$\overline{CE}=\overline{DE}=y$라 하자.

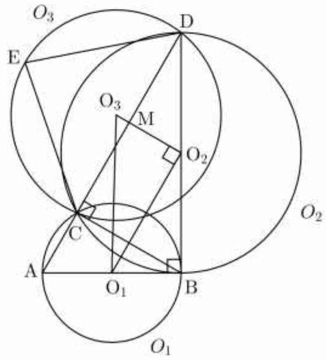
코사인법칙에 의하여

$\cos\theta=\frac{y^2+y^2-36}{2y^2}=\frac{1}{7}$에서 $y=\sqrt{21}$

선분 CD의 중점을 M이라 하면, $\overline{EM}=2\sqrt{3}$

$\sin\theta=\frac{4\sqrt{3}}{7}$에서 원 O_3의 반지름의 길이는

$$\frac{6}{2\sin(\angle CED)}=\frac{3}{\frac{4\sqrt{3}}{7}}=\frac{7\sqrt{3}}{4}$$



$\overline{O_3M}=2\sqrt{3}-\frac{7\sqrt{3}}{4}=\frac{\sqrt{3}}{4}$, $\overline{O_2M}=\sqrt{12-9}=\sqrt{3}$

$\overline{O_1O_2}=\frac{1}{2}\overline{AD}=4$, $\angle O_1O_2O_3=\frac{\pi}{2}$이므로

구하는 삼각형 $\mathrm{O}_1\mathrm{O}_2\mathrm{O}_3$의 넓이는 $\frac{1}{2}\times\frac{5}{4}\sqrt{3}\times 4=\frac{5}{2}\sqrt{3}$

$\therefore p+q=7$

9. 27

세 원 C_1, C_2, C_3의 넓이의 비가 $9:16:36$이므로

세 원 C_1, C_2, C_3의 반지름의 길이의 비는 $3:4:6$이다. 따라서

세 원 C_1, C_2, C_3의 반지름의 길이를 각각 r_1, r_2, r_3라 하면

$r_1=3k$, $r_2=4k$, $r_3=6k$라 할 수 있다.(단, $k\neq 0$)

또한, $\sin\alpha:\sin\beta:\sin\gamma=16:9:4$에서

$\sin\alpha=16m$, $\sin\beta=9m$, $\sin\gamma=4m$이라 할 수 있다. (단, $m\neq 0$)

사인법칙에 의하여

$\overline{AB}=2r_1\sin\alpha=48km$

$\overline{BC}=2r_2\sin\beta=36km$

$\overline{CA}=2r_3\sin\gamma=24km$

이때, $12km=x$라 하면

$\overline{AB}=4x$, $\overline{BC}=3x$, $\overline{CA}=2x$

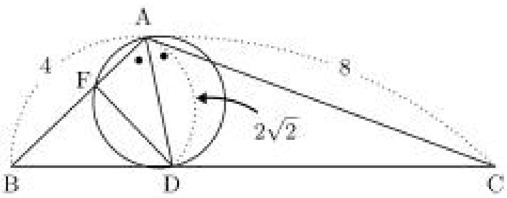
$$\cos\theta=\frac{\overline{AB}^2+\overline{CA}^2-\overline{BC}^2}{2\cdot\overline{AB}\cdot\overline{CA}}$$

$$=\frac{16x+4x^2-9x^2}{2\cdot 4x\cdot 2x}=\frac{11}{16}$$

따라서 구하는 값은

$p+q=16+11=27$

10. ④



$\overline{BD}=t$라 하면 $\overline{CD}=2t$이다.

$\angle BAD=\angle CAD$에서

$\cos(\angle BAD)=\cos(\angle CAD)$이므로

$$\frac{4^2+(2\sqrt{2})^2-t^2}{2\cdot 4\cdot 2\sqrt{2}}=\frac{8^2+(2\sqrt{2})^2-(2t)^2}{2\cdot 8\cdot 2\sqrt{2}}$$

$t^2=12$

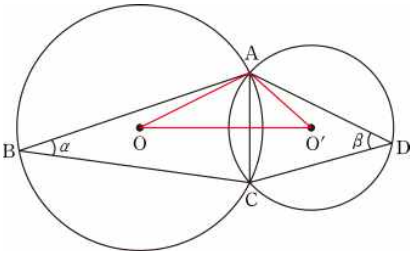
$t=2\sqrt{3}$

$\cos(\angle \mathrm{BAD}) = \dfrac{3\sqrt{2}}{8}$

$\angle \mathrm{AED} = 90^\circ$ 이므로

$\overline{\mathrm{AF}} = (2\sqrt{2}) \cdot \cos(\angle \mathrm{BAD}) = \dfrac{3}{2}$

11. 26



$\dfrac{\sin\beta}{\sin\alpha} = \dfrac{3}{2}$ 이므로

사인법칙에 의하여 두 원의 반지름의 길이의 비는 $3:2$이다.

각각의 반지름의 길이를

$3r$, $2r$라 하면 삼각형 $\mathrm{AOO'}$에서 코사인법칙에서

$1 = 9r^2 + 4r^2 - 12r^2\cos(\pi - (\alpha+\beta)) = 17r^2$

$r^2 = \dfrac{1}{17}$, $\therefore\ S = 9r^2\pi = \dfrac{9}{17}\pi$, $p+q = 26$

12. ②

수열 $\{a_n\}$은 첫째항이 30 이고 공차가 $-d$인 등차수열이므로

$a_n = 30 - (n-1)d\ \ (n \geq 1)$

이때,

$a_m + a_{m+1} + \cdots + a_{m+k}$

$= \dfrac{(k+1)\{30-(m-1)d+30-(m+k-1)d\}}{2}$

$= \dfrac{(k+1)\{60-(2m+k-2)d\}}{2} = 0$

$k+1 > 0$이므로

$(2m+k-2)d = 60$

$2m+k = 2 + \dfrac{60}{d}$

이를 만족하는 자연수 m, k이 존재하기 위해서는 d가 60 의 약수이어야 한다.

$60 = 2^2 \times 3 \times 5$이므로 d의 개수는 $3 \times 2 \times 2 = 12$

[다른 풀이]

등차수열의 연속된 $(k+1)$개의 항의 합이 0 이기 위한 수열의 조건은 다음과 같다.

i) $k+1$이 홀수일 때

$\cdots, d,\ 0,\ -d, \cdots$

이때, d는 30 의 양의 약수가 되어야 하므로

$d = 1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30$

ii) $k+1$이 짝수일 때

$\cdots, \dfrac{d}{2}, -\dfrac{d}{2}, \cdots$

이때, $30 - (n-1)d = \dfrac{d}{2}$에서

$n = \dfrac{1}{2} + \dfrac{30}{d}$

n은 자연수이므로

$d = 4, 12, 20, 60$

i), ii)에서 구하는 d의 개수는 12 이다.

13. 13

$b_1 = a_1$

$b_2 = b_1 + a_2 = a_1 + a_2$

$b_3 = b_2 - a_3 = a_1 + a_2 - a_3$

$b_4 = b_3 + a_4 = a_1 + a_2 - a_3 + a_4$

$b_5 = b_4 + a_5 = a_1 + a_2 - a_3 + a_4 + a_5$

$b_6 = b_5 - a_6 = a_1 + a_2 - a_3 + a_4 + a_5 - a_6$

$\vdots$

$b_{10} = a_1 + a_2 - a_3 + a_4 + a_5 - a_6 + a_7 + a_8 - a_9 + a_{10} = a_{10}$

$a_2 - a_3 = a_5 - a_6 = a_8 - a_9 = -d$이므로

$b_{10} - a_{10} = (a_1 - d) + (a_1 + 2d) + (a_1 + 5d) = 0$

$a_1 = -2d$

$a_n = -2d + (n-1)d = d(n-3)$

$b_8 = (a_1 - d) + (a_1 + 2d) + a_7 + a_8 = 6d$

$b_{10} = (a_1 - d) + (a_1 + 2d) + (a_1 + 5d) + a_{10} = 7d$

$\therefore\ \dfrac{b_8}{b_{10}} = \dfrac{6}{7}$

14. 117

조건 (가)와 조건 (나)에서

$\displaystyle\sum_{n=1}^{5}(a_n + |b_n|) - \sum_{n=1}^{5}(a_n + b_n) = 67 - 27$

이므로

$\displaystyle\sum_{n=1}^{5}(|b_n| - b_n) = 40 \quad \cdots$ ㉠

한편, 등비수열 $\{b_n\}$의 공비를 r(r는 음수)라 하면

$b_1 > 0,\ b_2 < 0,\ b_3 > 0,\ b_4 < 0,\ b_5 > 0$

이므로 ㉠에서

$-2(b_2 + b_4) = 40$

즉, $b_1 r + b_1 r^3 = -20 \quad \cdots$ ㉡

$b_1 r(1 + r^2) = -20$

이다. 이때 $b_1 r$는 음의 정수이고 $1 + r^2$은 자연수이므로 $1 + r^2$은 20의 양의 약수이어야 한다.

20의 양의 약수는 $1,\ 2,\ 4,\ 5,\ 10,\ 20$이고 r는 음의 정수이므로

$r = -1$ 또는 $r = -2$ 또는 $r = -3$

이다. ㉡에서

$r = -1$일 때, $b_1 = 10$

$r = -2$일 때, $b_1 = 2$

$r=-3$일 때, $b_1=\frac{2}{3}$

이때, b_1은 자연수이므로

$b_1=10,\ r=-1$ 또는 $b_1=2,\ r=-2$

(i) $b_1=10,\ r=-1$일 때,

$\sum_{n=1}^{5} b_n=10$이므로

조건 (가)에서

$\sum_{n=1}^{5}(a_n+b_n)=27$

이므로

$\sum_{n=1}^{5}a_n+\sum_{n=1}^{5}b_n=27$

$\sum_{n=1}^{5}a_n+10=27$

$\sum_{n=1}^{5}a_n=17$

이때, $\sum_{n=1}^{5}a_n=5a_3=17$

$a_3=\frac{17}{5}$

한편, 등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항이 자연수이고 공차가 음의 정수이므로

등차수열 $\{a_n\}$의 모든 항은 정수이다.

따라서 $b_1=10,\ r_1=-1$은 주어진 조건을 만족시키지 못한다.

(ii) $b_1=2,\ r=-2$일 때,

$\sum_{n=1}^{5}b_n=\frac{2\{1-(-2)^5\}}{1-(-2)}=22$

조건 (가)에서

$\sum_{n=1}^{5}(a_n+b_n)=27$

이므로

$\sum_{n=1}^{5}a_n+22=27,\ \sum_{n=1}^{5}a_n=5$

이때, $\sum_{n=1}^{5}a_n=5a_3=5$에서

$a_3=1$

또, $\sum_{n=1}^{5}|b_n|=\frac{2\{1-|-2|^5\}}{1-|-2|}=62$

조건 (다)에서

$\sum_{n=1}^{5}(|a_n|+|b_n|)=81$

이므로

$\sum_{n=1}^{5}|a_n|+\sum_{n=1}^{5}|b_n|=81$

$\sum_{n=1}^{5}|a_n|+62=81$

$\sum_{n=1}^{5}|a_n|=19 \quad \cdots ㉢$

한편, 등차수열 $\{a_n\}$의 공차를 d(d는 음의 정수)라 하면

$a_3=1$

이므로

$a_1>a_2>a_3>0\geq a_4>a_5$

이다. 이때,

$a_1=1-2d$

$a_2=1-d$

$a_4=1+d$

$a_5=1+2d$

이므로 ㉢에서

$(1-2d)+(1-d)+1-(1+d)-(1+2d)=19$

$1-6d=18$

$d=-3$

따라서 $a_1=1-2\times(-3)=7$

(i), (ii)에서

$a_1=7,\ d=-3,\ b_1=2,\ r=-2$

등차수열 $\{a_n\}$의 일반항 a_n은

$a_n=7+(n-1)\times(-3)=-3n+10$

등비수열 $\{b_n\}$의 일반항 b_n은

$b_n=2\times(-2)^{n-1}$

따라서

$a_7+b_7=-11+128=117$

15. 42

등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 k(k는 자연수), 공차를 d_1이라 하고

등차수열 $\{b_n\}$의 첫째항을 k, 공차를 d_2라 하자.

(가) 조건에서

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{7}a_{(b_n)}&=a_{b_1}+a_{b_2}+a_{b_3}+\cdots+a_{b_7}\\&=a_k+a_{k+d_2}+a_{k+2d_2}+\cdots+a_{k+6d_2}\\&=\{k+(k-1)d_1\}+\{k+(k+d_2-1)d_1\}\\&\quad+\{k+(k+2d_2-1)d_1\}+\cdots+\{k+(k+6d_2-1)d_1\}\\&=7k+7kd_1+21d_1d_2-7d_1=413\end{aligned}$$

$\therefore k+kd_1+3d_1d_2-d_1=59 \quad \cdots ㉠$

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{7}b_{(a_n)}&=b_{a_1}+b_{a_2}+b_{a_3}+\cdots+b_{a_7}\\&=b_k+b_{k+d_1}+b_{k+2d_1}+\cdots+b_{k+6d_1}\\&=\{k+(k-1)d_2\}+\{k+(k+d_1-1)d_2\}\\&\quad+\{k+(k+2d_1-1)d_2\}+\cdots+\{k+(k+6d_1-1)d_2\}\\&\quad+k+(k+2d_2-1)d_1+\cdots+k+(k+6d_2-1)d_1\\&=7k+7kd_2+21d_1d_2-7d_2=343\end{aligned}$$

$\therefore k+kd_2+3d_1d_2-d_2=49 \quad \cdots ㉡$

㉠−㉡을 하면

$(k-1)(d_1-d_2)=10$

이때 조건 (다)에서 $a_2-b_2=k+d_1-k-d_2=d_1-d_2$

$3<d_1-d_2<10$이고 d_1-d_2이 정수, k가 자연수이므로 들어갈 수 있는 경우는

$k-1=1,\ d_1-d_2=10$

$k-1=2,\ d_1-d_2=5$

$k-1=5,\ d_1-d_2=2$

$k-1=10,\ d_1-d_2=1$

에서

$k-1=2,\ d_1-d_2=5$이므로

$k=3$이다. 이를 ㉠에 대입하여 d_1에 대한 식을 만들면

$3d_1^2-13d_1-56=(3d_1+8)(d_1-7)=0$에서

a_2가 자연수이므로 $d_1=7$

따라서

$k=3,\ d_1=7,\ d_2=2$이고

$a_5+b_5=2k+4d_1+4d_2=6+28+8=42$

16. ①

$a_{2n}+a_{2n+1}=2a_n-n$

이므로

$a_2+a_3=2a_1-1$

$$\begin{aligned} a_4+a_5+a_6+a_7 &= (2a_2-2)+(2a_3-3) \\ &= 2(a_2+a_3)-5 \\ &= 2(2a_1-1)-5=4a_1-7 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_8+a_9+\cdots+a_{15} &= 2(a_4+a_5+a_6+a_7)-(4+5+6+7) \\ &= 2(4a_1-7)-22 \\ &= 8a_1-36 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_{16}+a_{17}+\cdots+a_{31} &= 2(a_8+a_9+\cdots+a_{15})-(8+9+\cdots+15) \\ &= 2(8a_1-36)-92 \\ &= 16a_1-164 \end{aligned}$$

$\sum_{n=16}^{31} a_n=28$에서 $16a_1-164=28,\ a_1=12$

따라서

$$\begin{aligned} a_{120} &= -a_{60}-60 \\ &= a_{30}-30 \\ &= -a_{15}-45 \\ &= -3a_7-45 \\ &= -9a_3-45 \\ &= -27a_1-45=-369 \end{aligned}$$