2020. 09. 08

고3 이과 9월 평가원 모의고사 대비

미적분

주요 논점 정리(1)

100人대장
'Quality Education Creation'

#1 수열의 극한

(1) 수열의 극한의 수렴과 발산

(2) 등비수열의 극한

(3) 등비급수의 활용

#1

1. 세 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$, $\{c_n\}$ 이 모든 자연수 n 에 대하여

$$a_n = \frac{1}{n^2+1} + \frac{2}{n^2+1} + \frac{3}{n^2+1} + \cdots + \frac{n}{n^2+1}$$
$$b_n = \frac{1}{n^2+n} + \frac{2}{n^2+n} + \frac{3}{n^2+n} + \cdots + \frac{n}{n^2+n}$$
$$c_n = \frac{1}{n^2+1} + \frac{2}{n^2+2} + \frac{3}{n^2+3} + \cdots + \frac{n}{n^2+n}$$

일 때, $\lim_{n\to\infty}(a_n+b_n+c_n)$ 의 값은?

① 1　　② $\frac{3}{2}$　　③ 2　　④ $\frac{5}{2}$　　⑤ 3

#1

[2010. 경찰대]

2. 수열 $\{a_n\}$ 이

$$a_1 = 4,\ a_{n+1} = \sqrt{3a_n+3} - 1 \ \ (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

일 때, <보기>에서 옳은 것을 있는 대로 고른 것은?

< 보 기 >

ㄱ. 모든 자연수 n에 대하여 $a_n > a_{n+1}$이다.

ㄴ. 모든 자연수 n에 대하여 $2 < a_n < 5$이다.

ㄷ. $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\left(3^{\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2^k}} \cdot 5^{\frac{1}{2^n}}\right)$

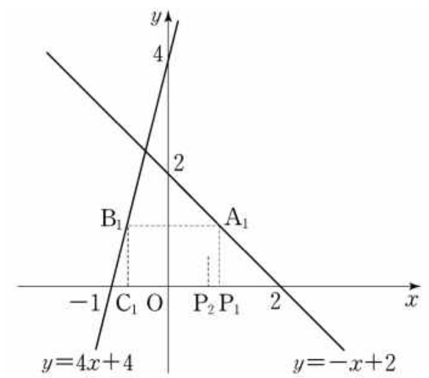
① ㄱ　　② ㄱ, ㄴ　　③ ㄱ, ㄷ　　④ ㄴ, ㄷ　　⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

#1

[2010. 06. 평가원]

3. 자연수 n에 대하여 점 P_n이 x축 위의 점일 때, 점 P_{n+1}을 다음 규칙에 따라 정한다.

> (가) 점 P_1의 좌표는 $(a_1, 0)$ $(0 < a_1 < 2)$이다.
> (나) (1) 점 P_n을 지나고 y축에 평행한 직선이 직선 $y = -x + 2$와 만나는 점을 A_n이라 한다.
> (2) 점 A_n을 지나고 x축에 평행한 직선이 직선 $y = 4x + 4$와 만나는 점을 B_n이라 한다.
> (3) 점 B_n을 지나고 y축에 평행한 직선이 x축과 만나는 점을 C_n이라 한다.
> (4) 점 C_n을 y축에 대하여 대칭이동한 점을 P_{n+1}이라 한다.



점 P_n의 x좌표를 a_n이라 할 때, $\lim_{n \to \infty} a_n$의 값은? [4점]

① $\frac{2}{9}$ ② $\frac{1}{3}$ ③ $\frac{4}{9}$
④ $\frac{5}{9}$ ⑤ $\frac{2}{3}$

#1

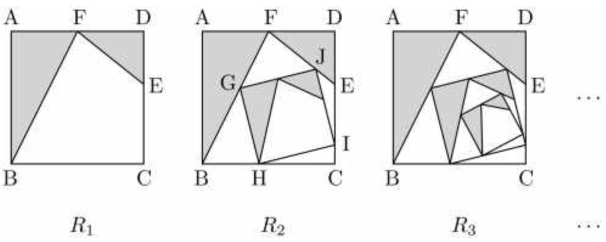
4. 정의역이 $\{x | x \neq 1,\ x\text{는 실수}\}$인 함수

$$f(x) = \lim_{n \to \infty} \frac{x^{n+1} + 2x}{x^n + 1}$$

에 대하여 $f(a) - f(a-3) = \frac{7}{2}$을 만족시키는 모든 실수 a의 값의 합을 구하시오.

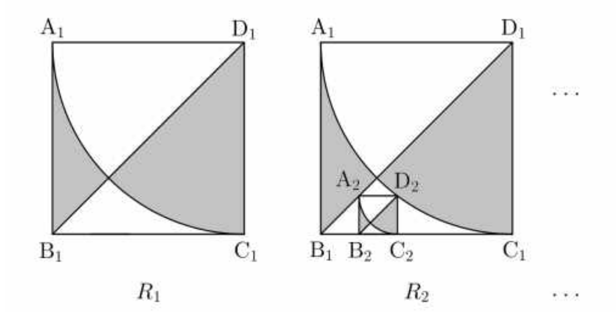
#1

5. 그림과 같이 한 변의 길이가 1인 정사각형 ABCD가 있다. 선분 CD를 $3:2$로 내분하는 점을 E, 선분 AD의 중점을 F라 할 때, 두 삼각형 ABF와 DEF에 색칠하여 얻은 그림을 R_1이라 하자.
그림 R_1에서 사각형 BCEF의 각 변에 내접하는 정사각형 GHIJ를 그리고 이 정사각형에서 그림 R_1을 얻는 것과 같은 방법으로 만들어지는 두 삼각형에 색칠하여 얻은 그림을 R_2라 하자.
이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 그림 R_n에 색칠되어 있는 부분의 넓이를 S_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty} S_n = \dfrac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]



#1

6. 그림과 같이 한 변의 길이가 1인 정사각형 $\mathrm{A_1B_1C_1D_1}$이 있다. 중심이 $\mathrm{D_1}$인 부채꼴 $\mathrm{D_1A_1C_1}$을 그리고 삼각형 $\mathrm{A_1B_1D_1}$의 내부와 부채꼴 $\mathrm{D_1A_1C_1}$의 공통된 부분을 제외한 ⋈ 모양의 도형에 칠하여 얻은 그림을 R_1이라 하자.
그림 R_1에서 선분 $\mathrm{B_1D_1}$ 위의 점 $\mathrm{A_2}$와 선분 $\mathrm{B_1C_1}$ 위의 두 점 $\mathrm{B_2}$, $\mathrm{C_2}$와 호 $\mathrm{A_1C_1}$ 위의 점 $\mathrm{D_2}$를 꼭짓점으로 하는 정사각형 $\mathrm{A_2B_2C_2D_2}$를 그리고 중심이 $\mathrm{D_2}$인 부채꼴 $\mathrm{D_2A_2C_2}$를 그리고 삼각형 $\mathrm{A_2B_2D_2}$의 내부와 부채꼴 $\mathrm{D_1A_1C_1}$의 공통된 부분을 제외한 ⋈ 모양의 도형에 칠하여 얻은 그림을 R_2라 하자.
이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 그림 R_n에 색칠되어 있는 부분의 넓이를 S_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty} S_n$의 값은?

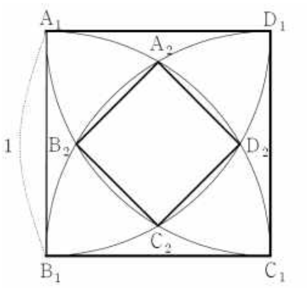


① $\dfrac{23}{48}$　② $\dfrac{25}{48}$　③ $\dfrac{27}{48}$
④ $\dfrac{23}{49}$　⑤ $\dfrac{25}{49}$

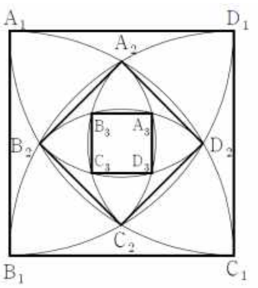
#1

[2010. 사관학교]

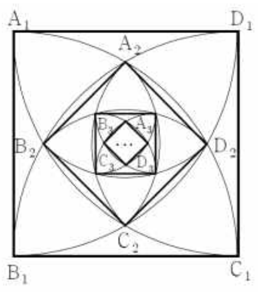
7. [그림1]과 같이 한 변의 길이가 1인 정사각형 $\mathrm{A_1B_1C_1D_1}$의 네 꼭짓점에서 반지름의 길이가 $\overline{\mathrm{A_1B_1}}$인 사분원을 그리고, 정사각형 $\mathrm{A_1B_1C_1D_1}$의 내부에서 각 사분원끼리 만나는 점을 각각 $\mathrm{A_2}$, $\mathrm{B_2}$, $\mathrm{C_2}$, $\mathrm{D_2}$라 하자.
또, [그림2]와 같이 정사각형 $\mathrm{A_2B_2C_2D_2}$의 네 꼭짓점에서 반지름의 길이가 $\overline{\mathrm{A_2B_2}}$인 사분원을 그리고, 정사각형 $\mathrm{A_2B_2C_2D_2}$의 내부에서 각 사분원끼리 만나는 점을 각각 $\mathrm{A_3}$, $\mathrm{B_3}$, $\mathrm{C_3}$, $\mathrm{D_3}$이라 하자.
이와 같은 과정을 계속하여 모든 자연수 n에 대하여 정사각형 $\mathrm{A}_n\mathrm{B}_n\mathrm{C}_n\mathrm{D}_n$의 네 꼭짓점에서 반지름의 길이가 $\overline{\mathrm{A}_n\mathrm{B}_n}$인 사분원을 그리고, 정사각형 $\mathrm{A}_n\mathrm{B}_n\mathrm{C}_n\mathrm{D}_n$의 내부에서 각 사분원끼리 만나는 점을 각각 A_{n+1}, B_{n+1}, C_{n+1}, D_{n+1}이라 하자. 모든 자연수 n에 대하여 정사각형 $\mathrm{A}_n\mathrm{B}_n\mathrm{C}_n\mathrm{D}_n$의 넓이를 S_n이라 할 때, $\sum_{n=1}^{\infty} S_n$의 값은? [4점]



[그림1]



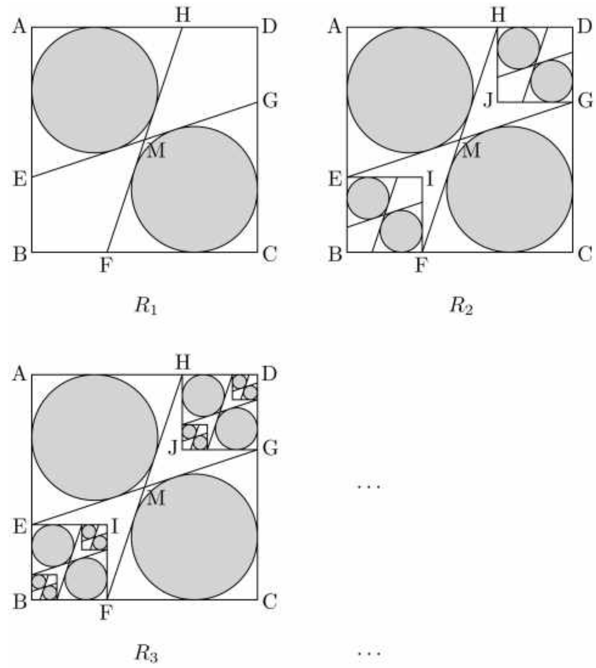
[그림2]



① $\frac{1+\sqrt{3}}{2}$ ② $\frac{2+\sqrt{3}}{2}$ ③ $\frac{2+\sqrt{3}}{3}$
④ $\frac{2+2\sqrt{3}}{3}$ ⑤ $\frac{1+3\sqrt{3}}{3}$

#1

8. 그림과 같이 한 변의 길이가 1인 정사각형 ABCD가 있다. 선분 AB, AD, CB, CD를 2 : 1로 내분하는 점을 각각 E, H, F, G, 두 선분 EG, FH의 교점을 M이라 하자. 두 사각형 AEMH, CFMG에 내접하는 원을 각각 그리고 이 두 원에 색칠하여 얻은 그림을 R_1이라 하자.
그림 R_1에서 두 사각형 EBFI, HJGD가 모두 정사각형이 되도록 두 점 I, J를 잡고, 두 정사각형 EBFI, HJGD에 그림 R_1을 얻는 것과 같은 방법으로 색칠하여 얻은 그림을 R_2라 하자.
이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 그림 R_n에 색칠되어 있는 부분의 넓이를 S_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty} S_n$의 값은? [4점]

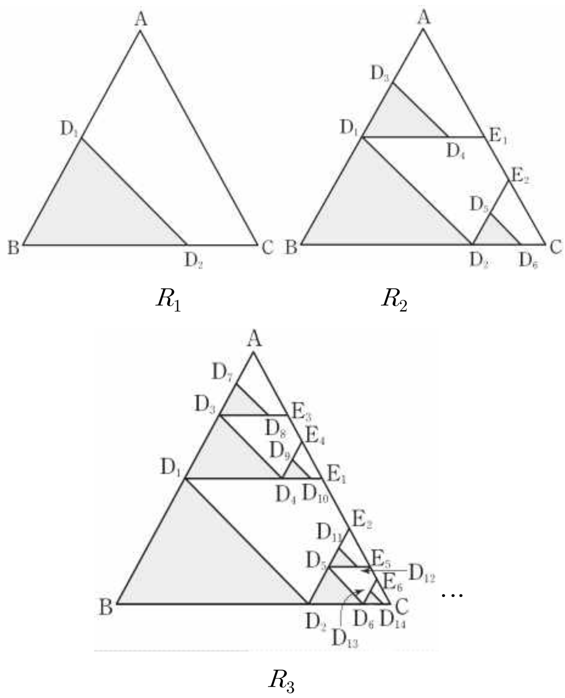


R_1 R_2 R_3

① $\frac{(19-6\sqrt{10})\pi}{4}$ ② $\frac{(7-2\sqrt{10})\pi}{4}$
③ $\frac{(13-4\sqrt{10})\pi}{2}$ ④ $\frac{2(7-2\sqrt{10})\pi}{7}$
⑤ $\frac{4(13-4\sqrt{10})\pi}{7}$

#1

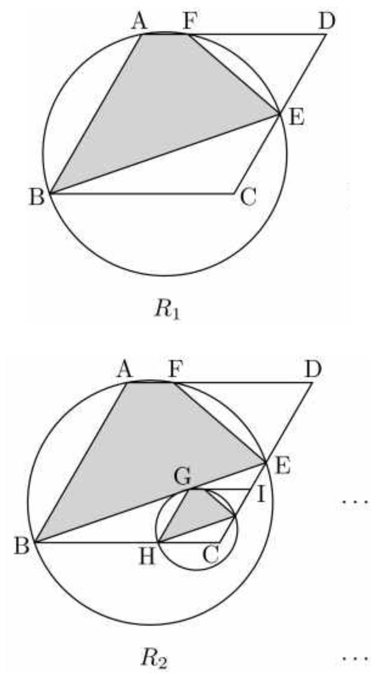
9. 다음 그림과 같이 한 변의 길이가 1인 정삼각형 ABC가 있다. 선분 AB를 $1:1$로 내분한 점을 D_1, 선분 BC를 $2:1$로 내분한 점을 D_2라 할 때, 삼각형 $\mathrm{D}_1\mathrm{BD}_2$에 색칠하여 얻은 그림을 R_1이라 하자. 그림 R_1에서 점 D_1을 지나고 선분 BC와 평행한 직선이 선분 AC와 만나는 점을 E_1, 점 D_2를 지나고 선분 AB와 평행한 직선이 선분 AC와 만나는 점을 E_2라 하자. 그리고 선분 AD_1을 $1:1$로 내분한 점을 D_3, 선분 $\mathrm{D}_1\mathrm{E}_1$을 $2:1$로 내분한 점을 D_4, 선분 $\mathrm{E}_2\mathrm{D}_2$를 $1:1$로 내분한 점을 D_5, 선분 $\mathrm{D}_2\mathrm{C}$를 $2:1$로 내분한 점을 D_6라 할 때, 삼각형 $\mathrm{D}_3\mathrm{D}_1\mathrm{D}_4$와 $\mathrm{D}_5\mathrm{D}_2\mathrm{D}_6$를 색칠하여 얻은 그림을 R_2라 하자. 이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 그림 R_n에 색칠되어 있는 모든 삼각형의 넓이의 합을 S_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty} S_n$의 값은?



① $\frac{3\sqrt{3}}{35}$　② $\frac{\sqrt{3}}{8}$　③ $\frac{3\sqrt{3}}{23}$　④ $\frac{\sqrt{3}}{7}$　⑤ $\frac{\sqrt{3}}{2}$

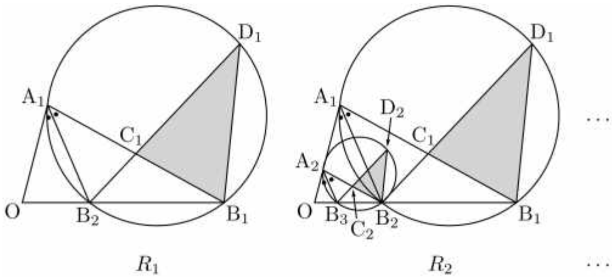
#1

10. 그림과 같이 한 변의 길이가 1이고 $\angle \mathrm{ABC}=\frac{\pi}{3}$인 마름모 ABCD가 있다. 선분 CD의 중점을 E, 삼각형 ABE의 외접원이 선분 AD와 만나는 점 가운데 점 A가 아닌 점을 F라 할 때, 사각형 ABEF에 색칠하여 얻은 그림을 R_1이라 하자. 그림 R_1에서 선분 BE 위의 점 G, 선분 BC 위의 점 H, 선분 CE 위의 점 I를 사각형 GHCI가 마름모가 되도록 잡고 마름모 GHCI에 그림 R_1을 얻는 것과 같은 방법으로 사각형을 그리고 색칠하여 얻은 그림을 R_2라 하자.
이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 그림 R_n에 색칠되어 있는 부분의 넓이를 S_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty} S_n=\frac{q}{p}\sqrt{3}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]



#1

11. 그림과 같이 $\overline{\mathrm{OA_1}}=1$, $\overline{\mathrm{OB_1}}=\overline{\mathrm{A_1B_1}}=2$인 삼각형 $\mathrm{OA_1B_1}$이 있다. $\angle \mathrm{OA_1B_1}$의 이등분선이 선분 $\mathrm{OB_1}$과 만나는 점을 $\mathrm{B_2}$, 선분 $\mathrm{A_1B_1}$의 중점을 $\mathrm{C_1}$, 삼각형 $\mathrm{A_1B_1B_2}$의 외접원과 직선 $\mathrm{B_2C_1}$이 만나는 점 중에서 점 $\mathrm{B_2}$가 아닌 점을 $\mathrm{D_1}$이라 할 때, 삼각형 $\mathrm{B_1C_1D_1}$의 내부에 색칠하여 얻은 그림을 R_1이라 하자.
그림 R_1에서 점 $\mathrm{B_2}$를 지나고 직선 $\mathrm{A_1B_1}$에 평행한 직선이 선분 $\mathrm{OA_1}$과 만나는 점을 $\mathrm{A_2}$, $\angle \mathrm{OA_2B_2}$의 이등분선이 선분 $\mathrm{OB_2}$와 만나는 점을 $\mathrm{B_3}$, 선분 $\mathrm{A_2B_2}$의 중점을 $\mathrm{C_2}$, 삼각형 $\mathrm{A_2B_2B_3}$의 외접원과 직선 $\mathrm{B_3C_2}$가 만나는 점 중에서 점 $\mathrm{B_3}$가 아닌 점을 $\mathrm{D_2}$라 할 때, 삼각형 $\mathrm{B_2C_2D_2}$에 색칠하여 얻은 그림을 R_2라 하자.
이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 그림 R_n에 색칠되어 있는 부분의 넓이를 S_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty} S_n$의 값은?



① $\dfrac{21\sqrt{15}}{128}$ ② $\dfrac{23\sqrt{15}}{128}$ ③ $\dfrac{25\sqrt{15}}{128}$
④ $\dfrac{27\sqrt{15}}{128}$ ⑤ $\dfrac{29\sqrt{15}}{128}$

#2 덧셈정리

#2

1. $2\sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)-\cos\left(\frac{\pi}{4}-\theta\right)=2\sqrt{2}\cos\theta$일 때, $\tan\theta$의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

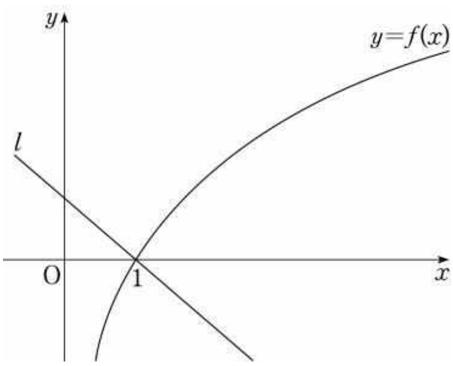
#2

2. 삼각형 ABC 에 대하여 $\angle A=\alpha$, $\angle B=\beta$, $\angle C=\gamma$라 할 때, α, β, γ가 이 순서대로 등차수열을 이루고 $\cos\alpha$, $2\cos\beta$, $8\cos\gamma$가 이 순서대로 등비수열을 이룰 때, $\tan\alpha\tan\gamma$의 값을 구하시오. (단, $\alpha<\beta<\gamma$) [4점]

#2

[2015. 10. 서울교육청]

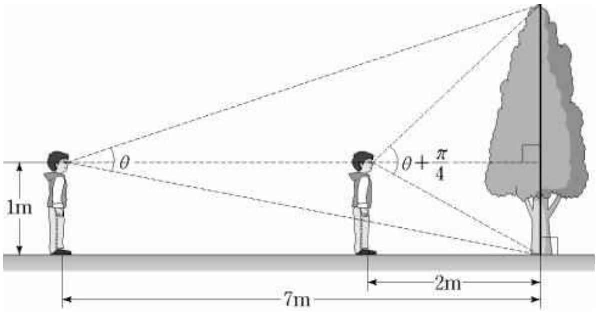
3. 좌표평면에 함수 $f(x)=\sqrt{3}\ln x$의 그래프와 직선 $l : y=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}x+\dfrac{\sqrt{3}}{2}$이 있다. 곡선 $y=f(x)$ 위의 서로 다른 두 점 $\mathrm{A}(\alpha,\ f(\alpha))$, $\mathrm{B}(\beta,\ f(\beta))$에서의 접선을 각각 m, n이라 하자. 세 직선 l, m, n으로 둘러싸인 삼각형이 정삼각형일 때, $6(\alpha+\beta)$의 값을 구하시오. [4점]



#2

[2008. 06. 평가원]

4. 눈높이가 $1\mathrm{m}$인 어린이가 나무로부터 $7\mathrm{m}$ 떨어진 지점에서 나무의 꼭대기를 바라본 선과 나무가 지면에 닿는 지점을 바라본 선이 이루는 각이 θ 이었다. 나무로부터 $2\mathrm{m}$ 떨어진 지점까지 다가가서 나무를 바라보았더니 나무의 꼭대기를 바라본 선과 나무가 지면에 닿는 지점을 바라본 선이 이루는 각이 $\theta+\dfrac{\pi}{4}$가 되었다. 나무의 높이는 $a(\mathrm{m})$ 또는 $b(\mathrm{m})$이다. $a+b$의 값은? [4점]



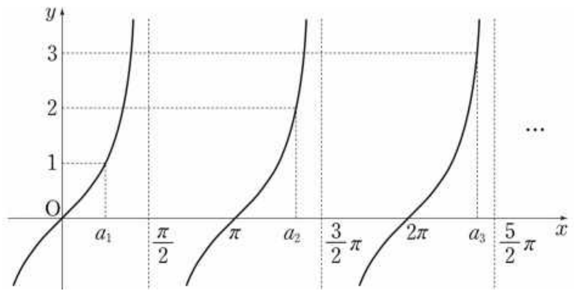
① 12 ② 14 ③ 16 ④ 18 ⑤ 20

<연습문제>

[2014. 대학수학능력시험]

1. 자연수 n에 대하여 직선 $y=n$과 함수 $y=\tan x$의 그래프가 제1사분면에서 만나는 점의 x좌표를 작은 수부터 크기순으로 나열할 때, n번째 수를 a_n이라 하자. $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n}$의 값은?

[4점]



① $\frac{\pi}{4}$　② $\frac{\pi}{2}$　③ $\frac{3}{4}\pi$

④ π　⑤ $\frac{5}{4}\pi$

2. 수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여 부등식

$$\left\{(3^n-1)a_n-3^{n-1}\right\}\left\{(3^n+1)a_n-3^{n-1}\right\}<0$$

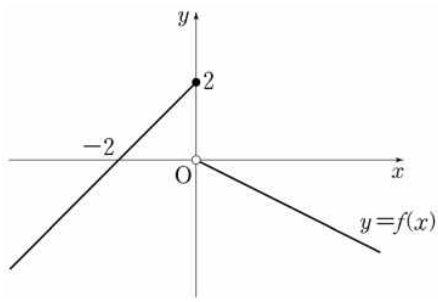
을 만족시킬 때, $30\times\lim_{n\to\infty}a_n$의 값을 구하시오.

[2013. 06. 평가원]

3. 함수

$$f(x)=\begin{cases} x+2 & (x \le 0) \\ -\dfrac{1}{2}x & (x>0) \end{cases}$$

그래프가 그림과 같다. 물음에 답하시오.



수열 $\{a_n\}$ 은 $a_1=1$이고

$$a_{n+1}=f(f(a_n)) \quad (n \ge 1)$$

을 만족시킬 때, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$의 값은? [4점]

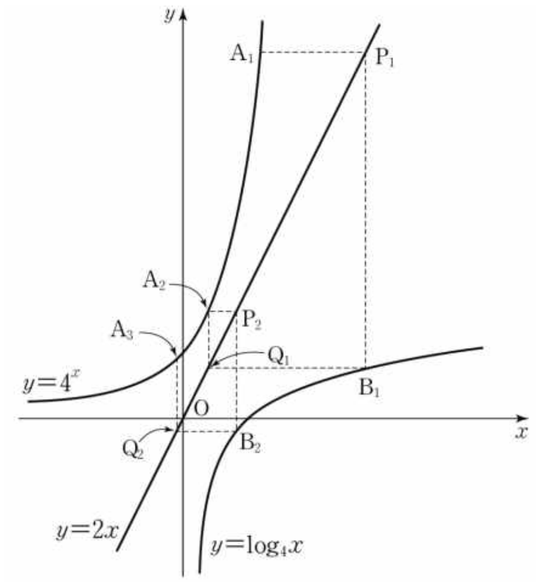
① $\dfrac{1}{3}$ ② $\dfrac{2}{3}$ ③ 1
④ $\dfrac{4}{3}$ ⑤ $\dfrac{5}{3}$

[2009. 09. 평가원]

4. 자연수 n에 대하여 점 A_n이 함수 $y=4^x$의 그래프 위의 점일 때, 점 A_{n+1}을 다음 규칙에 따라 정한다.

(가) 점 A_1의 좌표는 $(a,\ 4^a)$ 이다.
(나) (1) 점 A_n을 지나고 x축에 평행한 직선이 직선 $y=2x$와 만나는 점을 P_n이라 한다.
(2) 점 P_n을 지나고 y축에 평행한 직선이 곡선 $y=\log_4 x$와 만나는 점을 B_n이라 한다.
(3) 점 B_n을 지나고 x축에 평행한 직선이 직선 $y=2x$와 만나는 점을 Q_n이라 한다.
(4) 점 Q_n을 지나고 y축에 평행한 직선이 곡선 $y=4^x$과 만나는 점을 A_{n+1}이라 한다.

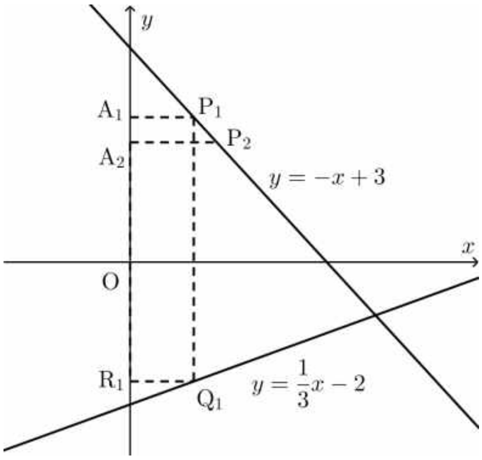
점 A_n의 x좌표를 x_n이라 할 때, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$의 값은? [4점]



① $-\dfrac{3}{4}$ ② $-\dfrac{11}{16}$ ③ $-\dfrac{5}{8}$
④ $-\dfrac{9}{16}$ ⑤ $-\dfrac{1}{2}$

5. 자연수 n에 대하여 점 A_n이 y축 위의 점일 때, 점 A_{n+1}을 다음 규칙에 따라 정한다.

> (가) 점 A_1의 좌표는 $(0,\ y_1)$ $(0 < y_1 < 3)$이다.
> (나) (1) 점 A_n을 지나고 x축에 평행한 직선이 직선 $y=-x+3$과 만나는 점을 P_n이라 한다.
> (2) 점 P_n을 지나고 y축에 평행한 직선이 직선 $y=\frac{1}{3}x-2$와 만나는 점을 Q_n이라 한다.
> (3) 점 Q_n을 지나고 x축에 평행한 직선이 y축과 만나는 점을 R_n이라 한다.
> (4) 점 R_n을 x축에 대하여 대칭이동한 점을 A_{n+1}이라 한다.



점 A_n의 y좌표를 y_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty} y_n$의 값은?

① $\frac{1}{4}$　② $\frac{1}{2}$　③ 1
④ $\frac{4}{3}$　⑤ $\frac{3}{2}$

6. 정의역이 $\{x | x \neq 1,\ x\text{는 실수}\}$인 함수

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{x^{n+1}+2x}{x^n+1}$$

에 대하여 $f(a)-f\left(\frac{1}{a}\right)=1$을 만족시키는 모든 실수 a의 값의 합은? (단, n은 자연수이다.)

① $\frac{1}{2}$　② 1　③ $\frac{3}{2}$
④ 2　⑤ $\frac{5}{2}$

[2013. 대학수학능력시험]

7. 수열 $\{a_n\}$에 대하여

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(na_n - \frac{n^2+1}{2n+1}\right) = 3$$

일 때, $\lim_{n\to\infty}(a_n^2 + 2a_n + 2)$의 값은? [4점]

① $\frac{13}{4}$　② 3　③ $\frac{11}{4}$　④ $\frac{5}{2}$　⑤ $\frac{9}{4}$

8. 두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$이

$$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n - \sin b_n) = 2$$

를 만족시킬 때, <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

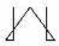
< 보 기 >

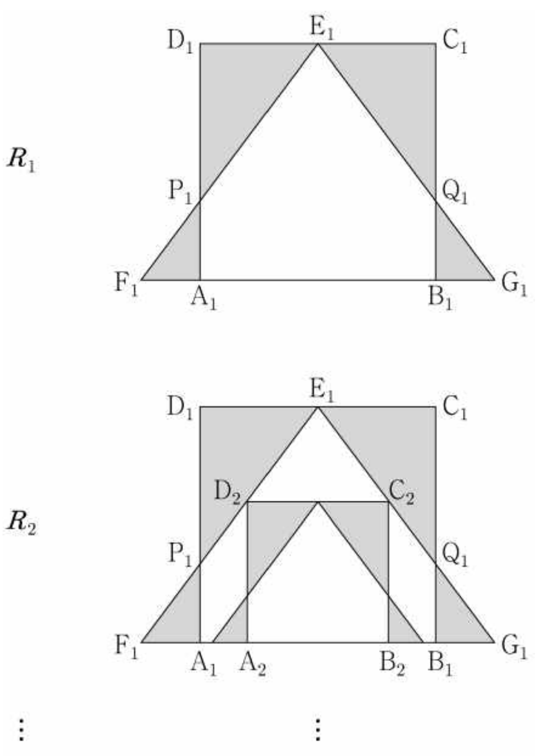
ㄱ. $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n} = 0$

ㄴ. $\lim_{n\to\infty} b_n$의 값이 존재하면 $\lim_{n\to\infty} a_n$의 값이 존재한다.

ㄷ. $\lim_{n\to\infty} a_n$의 값이 존재하면 $\lim_{n\to\infty} b_n$의 값이 존재한다.

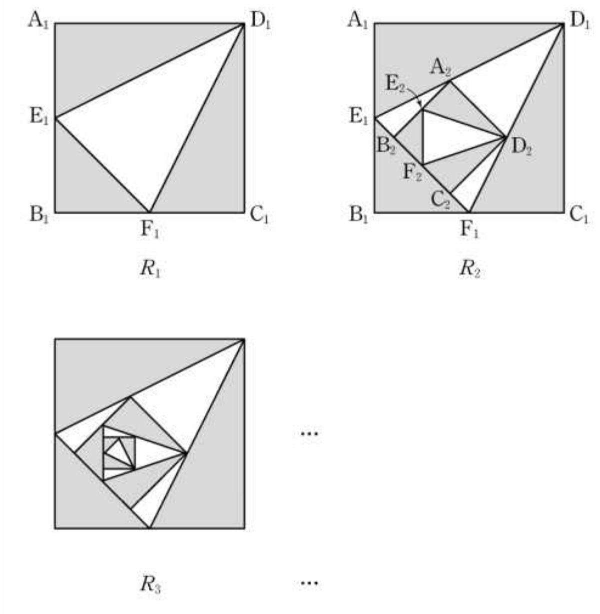
① ㄱ　② ㄴ　③ ㄱ, ㄴ　④ ㄱ, ㄷ　⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

9. 그림과 같이 한 변의 길이가 4인 정사각형 $A_1B_1C_1D_1$이 있다. 선분 C_1D_1의 중점을 E_1이라 하고, 직선 A_1B_1 위에 두 점 F_1, G_1을 $\overline{E_1F_1}=\overline{E_1G_1}$, $\overline{E_1F_1}:\overline{F_1G_1}=5:6$이 되도록 잡고 이등변삼각형 $E_1F_1G_1$을 그린다. 선분 D_1A_1과 선분 E_1F_1의 교점을 P_1, 선분 B_1C_1과 선분 G_1E_1의 교점을 Q_1이라할 때, 네 삼각형 $E_1D_1P_1$, $P_1F_1A_1$, $Q_1B_1G_1$, $E_1Q_1C_1$로 만들어진  모양의 도형에 색칠하여 얻은 그림을 R_1이라 하자.
그림 R_1에 선분 F_1G_1 위의 두 점 A_2, B_2와 선분 G_1E_1 위의 점 C_2, 선분 E_1F_1 위의 점 D_2를 꼭짓점으로 하는 정사각형 $A_2B_2C_2D_2$를 그리고, 그림 R_1을 얻는 것과 같은 방법으로 정사각형 $A_2B_2C_2D_2$에  모양의 도형을 그리고 색칠하여 얻은 그림을 R_2라 하자.
이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 그림 R_n에 색칠되어 있는 부분의 넓이를 S_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty} S_n$의 값은? [4점]



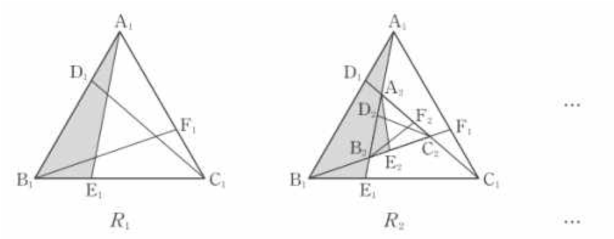
① $\frac{61}{6}$ ② $\frac{125}{12}$ ③ $\frac{32}{3}$
④ $\frac{131}{12}$ ⑤ $\frac{67}{6}$

10. 그림과 같이 한 변의 길이가 2 인 정사각형 $A_1B_1C_1D_1$ 에서 선분 A_1B_1 과 선분 B_1C_1 의 중점을 각각 E_1, F_1 이라 하자.
정사각형 $A_1B_1C_1D_1$ 의 내부와 삼각형 $E_1F_1D_1$ 의 외부의 공통부분에 색칠하여 얻은 그림을 R_1 이라 하자.
그림 R_1 에 선분 D_1E_1 위의 점 A_2, 선분 D_1F_1 위의 점 D_2와 선분 E_1F_1 위의 두 점 B_2, C_2 를 꼭짓점으로 하는 정사각형 $A_2B_2C_2D_2$ 를 그리고, 정사각형 $A_2B_2C_2D_2$ 에 그림 R_1 을 얻은 것과 같은 방법으로 삼각형 $E_2F_2D_2$ 를 그리고 정사각형 $A_2B_2C_2D_2$ 의 내부와 삼각형 $E_2F_2D_2$ 의 외부의 공통부분에 색칠하여 얻은 그림을 R_2 라 하자.
이와 같은 과정을 계속하여 n 번째 얻은 그림 R_n 에 색칠되어 있는 부분의 넓이를 S_n 이라 할 때, $\lim_{n\to\infty} S_n$ 의 값은? [4점]



① $\frac{125}{37}$ ② $\frac{125}{38}$ ③ $\frac{125}{39}$
④ $\frac{25}{8}$ ⑤ $\frac{125}{41}$

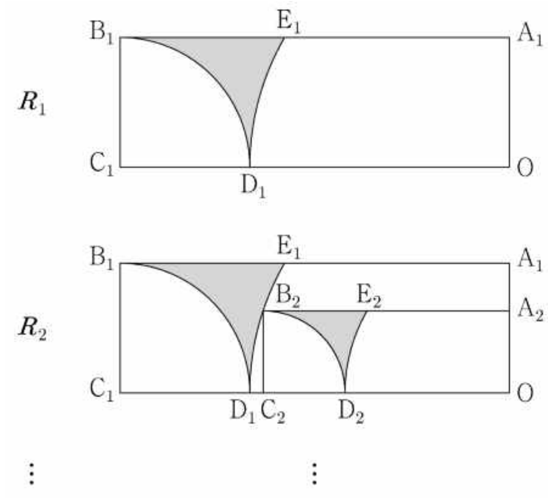
11. 그림과 같이 한 변의 길이가 3인 정삼각형 $A_1B_1C_1$의 세 변 A_1B_1, B_1C_1, C_1A_1 을 $1:2$로 내분하는 점을 각각 D_1, E_1, F_1 이라 하고, 삼각형 $A_1B_1E_1$에 색칠하여 얻은 그림을 R_1이라 하자. 그림 R_1에서 두 선분 A_1E_1, C_1D_1의 교점을 A_2, 두 선분 A_1E_1, B_1F_1의 교점을 B_2, 두 선분 B_1F_1, C_1D_1의 교점을 C_2라 하고, 삼각형 $A_2B_2C_2$에 대하여 그림 R_1을 얻은 것과 같은 방법으로 색칠하여 얻은 그림을 R_2라 하자. 이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 그림 R_n 에 색칠되어 있는 부분의 넓이를 S_n 이라 할 때, $\lim_{n\to\infty} S_n$의 값은?



① $\dfrac{3\sqrt{3}}{4}$ ② $\dfrac{19\sqrt{3}}{24}$ ③ $\dfrac{5\sqrt{3}}{6}$
④ $\dfrac{7\sqrt{3}}{8}$ ⑤ $\dfrac{11\sqrt{3}}{12}$

[2018. 09. 평가원]

12. 그림과 같이 $\overline{A_1B_1}=3$, $\overline{B_1C_1}=1$인 직사각형 $OA_1B_1C_1$이 있다. 중심이 C_1이고 반지름의 길이가 $\overline{B_1C_1}$인 원과 선분 OC_1의 교점을 D_1, 중심이 O이고 반지름의 길이가 $\overline{OD_1}$인 원과 선분 A_1B_1의 교점을 E_1이라 하자. 직사각형 $OA_1B_1C_1$에 호 B_1D_1, 호 D_1E_1, 선분 B_1E_1로 둘러싸인 모양의 도형을 그리고 색칠하여 얻은 그림을 R_1이라 하자.
그림 R_1에 선분 OA_1 위의 점 A_2와 호 D_1E_1 위의 점 B_2, 선분 OD_1 위의 점 C_2와 점 O를 꼭짓점으로 하고 $\overline{A_2B_2}:\overline{B_2C_2}=3:1$인 직사각형 $OA_2B_2C_2$를 그리고, 그림 R_1을 얻은 것과 같은 방법으로 직사각형 $OA_2B_2C_2$에 모양의 도형을 그리고 색칠하여 얻은 그림을 R_2라 하자.
이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 그림 R_n에 색칠되어 있는 부분의 넓이를 S_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty} S_n$의 값은? [4점]

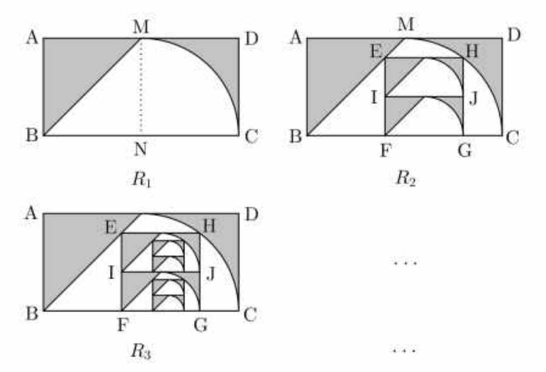


① $4-\dfrac{2\sqrt{3}}{3}-\dfrac{7}{9}\pi$ ② $5-\dfrac{5\sqrt{3}}{6}-\dfrac{35}{36}\pi$
③ $6-\sqrt{3}-\dfrac{7}{6}\pi$ ④ $7-\dfrac{7\sqrt{3}}{6}-\dfrac{49}{36}\pi$
⑤ $8-\dfrac{4\sqrt{3}}{3}-\dfrac{14}{9}\pi$

13. 직사각형 ABCD에서 $\overline{AB}=1$, $\overline{AD}=2$이다. 그림과 같이 선분 AD과 선분 BC의 중점을 각각 M, N이라 하자. 선분 BM과 중심이 N이고 반지름의 길이가 $\overline{MN}$이고 중심각의 크기가 $\frac{\pi}{2}$인 부채꼴 NCM을 그린다. 삼각형 ABM의 내부 영역과 두 선분 CD, DM과 호 CM으로 둘러싸인 부분인 모양에 색칠하여 얻은 그림을 R_1이라 하자.

그림 R_1에 선분 BM위의 점 E와 선분 BC위의 두 점 F, G와 호 CM위의 점 H를 꼭짓점으로 하는 정사각형을 그리고 선분 EF의 중점을 I, 선분 GH의 중점을 J라 하자. 두 직사각형 EIJH, FIJG에서 그림 R_1을 얻은 것과 같은 방법으로 만들어지는 모양에 색칠하여 얻은 그림을 R_2라 하자.

이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 그림 R_n에 색칠되어 있는 부분의 넓이를 S_n라 할 때, $\lim_{n\to\infty} S_n$의 값은?



① $\frac{25}{68}(6-\pi)$ ② $\frac{27}{68}(6-\pi)$ ③ $\frac{29}{68}(6-\pi)$

④ $\frac{31}{68}(6-\pi)$ ⑤ $\frac{33}{68}(6-\pi)$

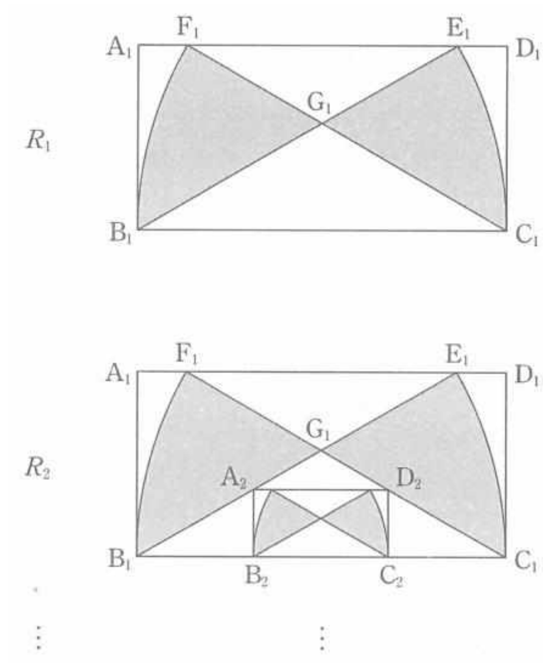
[2018. 06. 평가원]

14. 그림과 같이 $\overline{A_1B_1}=1$, $\overline{A_1D_1}=2$인 직사각형 $A_1B_1C_1D_1$이 있다. 선분 A_1D_1 위의 $\overline{B_1C_1}=\overline{B_1E_1}$, $\overline{C_1B_1}=\overline{C_1F_1}$인 두 점 E_1, F_1에 대하여 중심이 B_1인 부채꼴 $B_1E_1C_1$과 중심이 C_1인 부채꼴 $C_1F_1B_1$을 각각 직사각형 $A_1B_1C_1D_1$ 내부에 그리고, 선분 B_1E_1과 선분 C_1F_1의 교점을 G_1이라 하자.

두 선분 G_1F_1, G_1B_1과 호 F_1B_1로 둘러싸인 부분과 두 선분 G_1E_1, G_1C_1과 호 E_1C_1로 둘러싸인 부분인 모양의 도형에 색칠하여 얻은 그림을 R_1이라 하자.

그림 R_1에서 선분 B_1G_1 위의 점 A_2, 선분 C_1G_1 위의 점 D_2와 선분 B_1C_1 위의 두 점 B_2, C_2를 꼭짓점으로 하고 $\overline{A_2B_2}:\overline{A_2D_2}=1:2$인 직사각형 $A_2B_2C_2D_2$를 그리고, 그림 R_1을 얻는 것과 같은 방법으로 직사각형 $A_2B_2C_2D_2$ 내부에 모양의 도형을 그리고 색칠하여 얻은 그림을 R_2라 하자.

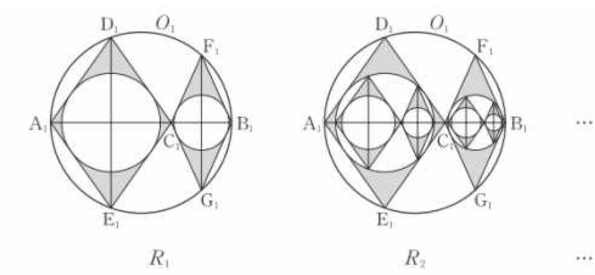
이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 그림 R_n에 색칠되어 있는 부분의 넓이를 S_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty} S_n$의 값은? [4점]



① $\frac{3\sqrt{3}\pi-7}{9}$ ② $\frac{4\sqrt{3}\pi-12}{9}$ ③ $\frac{3\sqrt{3}\pi-5}{9}$

④ $\frac{4\sqrt{3}\pi-10}{9}$ ⑤ $\frac{4\sqrt{3}\pi-8}{9}$

15. 그림과 같이 반지름의 길이가 3인 원 O_1의 지름 $\mathrm{A_1B_1}$에 대하여 선분 $\mathrm{A_1B_1}$을 $2:1$로 내분하는 점을 $\mathrm{C_1}$이라 하자. 선분 $\mathrm{A_1C_1}$의 중점을 지나고 선분 $\mathrm{A_1C_1}$에 수직인 직선이 원 O_1과 만나는 점을 각각 $\mathrm{D_1}$, $\mathrm{E_1}$, 선분 $\mathrm{C_1B_1}$의 중점을 지나고 선분 $\mathrm{C_1B_1}$에 수직인 직선이 원 O_1과 만나는 점을 각각 $\mathrm{F_1}$, $\mathrm{G_1}$이라 하자. 두 사각형 $\mathrm{A_1E_1C_1D_1}$과 $\mathrm{C_1G_1B_1F_1}$에 각각 내접하는 원을 그리고 사각형의 내부와 사각형에 내접하는 원의 외부의 공통 부분에 색칠하여 얻은 그림을 R_1이라 하자. 그림 R_1에서 새로 그려진 두 원에 같은 방법으로 색칠하여 얻은 그림을 R_2라 하고, 이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 그림 R_n 에 색칠된 부분의 넓이를 S_n 이라 하면 $\lim_{n\to\infty} S_n = a\sqrt{2}+b\sqrt{5}+c\pi$이다. $11(a+b+c)$의 값을 구하시오. (단, a, b, c는 유리수이다.)

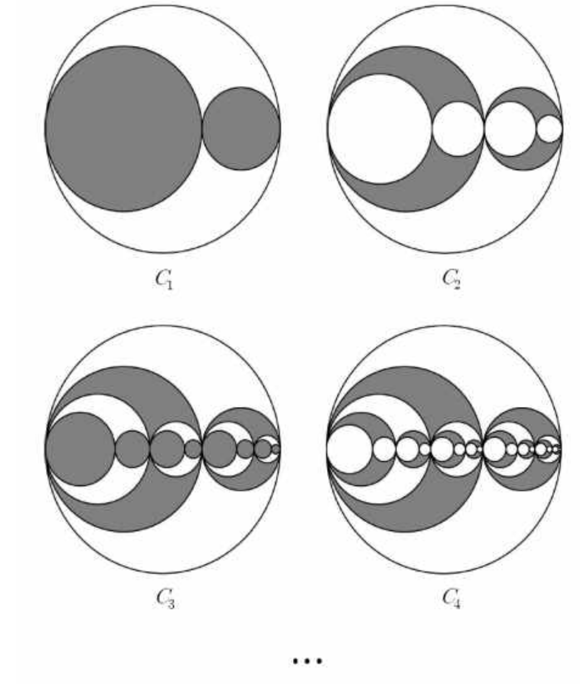


[2009. 04. 경기교육청]

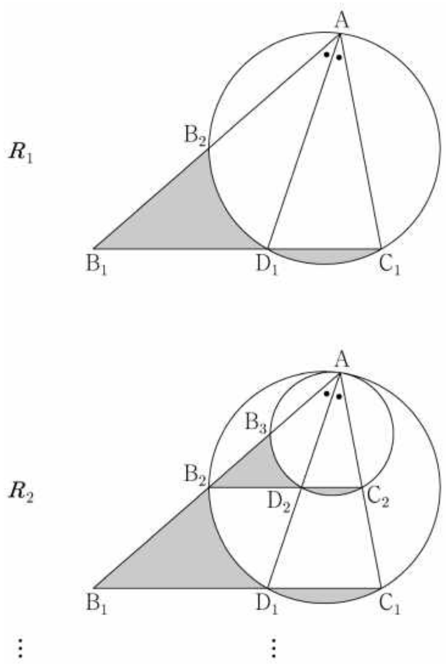
16. 원에 다음 과정을 실행한다.

> [과정]
> Ⅰ. 원의 지름을 $2:1$로 내분하는 점을 잡는다.
> Ⅱ. 이 원에 내접하면서 Ⅰ의 내분점에서 서로 외접하는 두 개의 원을 그린다.

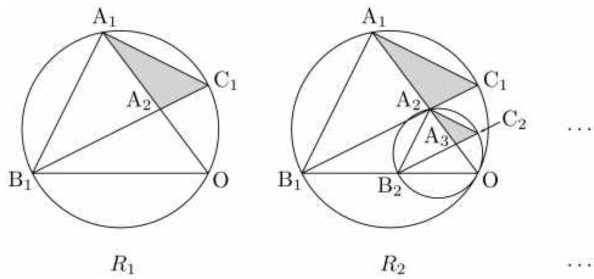
지름의 길이가 6인 원이 있다. 이 원에 [과정]을 실행하여 그린 2개의 원의 내부를 색칠하여 얻어진 그림을 C_1이라 하자. 그림 C_1에서 새로 그려진 2개의 원에 각각 [과정]을 실행하여 그린 4개의 원의 내부를 제외하여 얻어진 그림을 C_2라 하자. 그림 C_2에서 새로 그려진 4개의 원에 각각 [과정]을 실행하여 그린 8개의 원의 내부를 색칠하여 얻어진 그림을 C_3이라 하자. 그림 C_3에서 새로 그려진 8개의 원에 각각 [과정]을 실행하여 그린 16개의 원의 내부를 제외하여 얻어진 그림을 C_4라 하자. 이와 같은 방법으로 n번째 얻어진 그림 C_n에서 색칠된 부분의 넓이를 S_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty} S_n = \frac{q}{p}\pi$ (p와 q는 서로소인 자연수)이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, 모든 원의 중심은 처음 원의 한 지름 위에 있다.) [4점]



17. 그림과 같이 $\overline{AB_1}=3$, $\overline{AC_1}=2$이고 $\angle B_1AC_1=\dfrac{\pi}{3}$인 삼각형 AB_1C_1이 있다. $\angle B_1AC_1$의 이등분선이 선분 B_1C_1과 만나는 점을 D_1, 세 점 A, D_1, C_1을 지나는 원이 선분 AB_1과 만나는 점 중 A가 아닌 점을 B_2라 할 때, 두 선분 B_1B_2, B_1D_1과 호 B_2D_1로 둘러싸인 부분과 선분 C_1D_1과 호 C_1D_1로 둘러싸인 부분인 모양의 도형에 색칠하여 얻은 그림을 R_1이라 하자.
그림 R_1에서 점 B_2를 지나고 직선 B_1C_1에 평행한 직선이 두 선분 AD_1, AC_1과 만나는 점을 각각 D_2, C_2라 하자.
세 점 A, D_2, C_2를 지나는 원이 선분 AB_2와 만나는 점 중 A가 아닌 점을 B_3이라 할 때, 두 선분 B_2B_3, B_2D_2와 호 B_3D_2로 둘러싸인 부분과 선분 C_2D_2와 호 C_2D_2로 둘러싸인 부분인 모양의 도형에 색칠하여 얻은 그림을 R_2라 하자.
이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 그림 R_n에 색칠되어 있는 부분의 넓이를 S_n이라 할 때, $\lim\limits_{n\to\infty}S_n$의 값은? [4점]



18. 그림과 같이 $\overline{OA_1}=\overline{OB_1}=2$이고 $\cos\angle A_1OB_1=\dfrac{3}{5}$인 삼각형 A_1B_1O가 있다. 점 C_1을 선분 B_1C_1이 삼각형 A_1B_1O의 외접원의 지름이 되도록 잡고 두 선분 OA_1과 B_1C_1의 교점을 A_2라 할 때, 삼각형 $A_1A_2C_1$에 색칠하여 얻은 그림을 R_1이라 하자. 그림 R_1에서 점 A_2를 지나고 직선 A_1B_1과 평행한 직선이 선분 OB_1과 만나는 점을 B_2라 하자. 점 C_2를 선분 B_2C_2가 삼각형 A_2B_2O의 외접원의 지름이 되도록 잡고 두 선분 OA_2와 B_2C_2의 교점을 A_3라 할 때, 삼각형 $A_2A_3C_2$에 색칠하여 얻은 그림을 R_2라 하자. 이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 그림 R_n에 색칠되어 있는 부분의 넓이를 S_n이라 할 때, $\lim\limits_{n\to\infty}S_n$의 값은? [4점]



① $\dfrac{33}{80}$ ② $\dfrac{7}{16}$ ③ $\dfrac{37}{80}$
④ $\dfrac{39}{80}$ ⑤ $\dfrac{41}{80}$

[2018. 09. 평가원]

19. 실수 k에 대하여 함수

$$f(x)=\cos^2\left(x-\frac{3}{4}\pi\right)-\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)+k$$

의 최댓값은 3, 최솟값은 m이다. $k+m$의 값은? [4점]

① 2 ② $\frac{9}{4}$ ③ $\frac{5}{2}$ ④ $\frac{11}{4}$ ⑤ 3

20. 점 $(\cos\alpha,\ \sin\alpha)$와 직선

$x\sin\beta+y\cos\beta+2=0$ 사이의 거리가 $\frac{3}{2}$일 때,

$\sin(\alpha+\beta)$의 값은?

① $-\frac{1}{2}$ ② $-\frac{1}{4}$ ③ 0 ④ $\frac{1}{4}$ ⑤ $\frac{1}{2}$

21. 두 실수 α, β에 대하여

$\dfrac{4+\tan\alpha}{4\tan\alpha-1}=\tan\beta$일 때, $\tan(\alpha+\beta)$의 값은?

(단, $\tan\alpha \neq \dfrac{1}{4}$, $\tan\alpha\tan\beta \neq 1$)

① -4 ② -2 ③ 0
④ 2 ⑤ 4

22. 이차방정식 $x^2-2x-1=0$의 두 실근을 $\cot\alpha$, $\cot\beta$라 할 때, $\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$의 값은?

$\left(\text{단}, 0<\alpha<\dfrac{\pi}{2},\ \dfrac{\pi}{2}<\beta<\pi\right)$

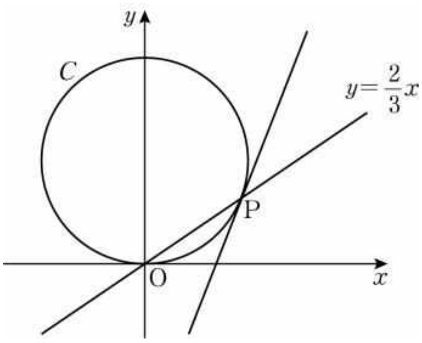
① $-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ ② $-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ ③ 0
④ $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ ⑤ $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

23. 모든 실수 x에 대해 정의된 함수 $f(x)=x^2-ax-2$에 대하여 이차방정식 $f(x)=0$의 두 실근을 $\dfrac{\sin 3\theta}{\sin\theta}$, $-\dfrac{\cos 3\theta}{\cos\theta}$라 할 때, $f(x)$의 최솟값은?
(단, $\sin\theta\cos\theta \neq 0$)

① -3　② -2　③ -1
④ 0　⑤ 1

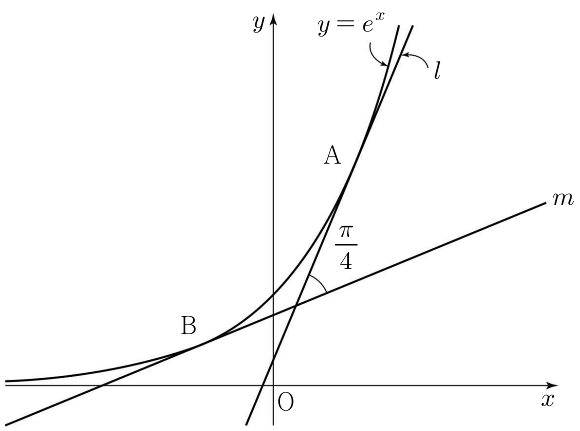
[2015. 03. 서울교육청]

24. 그림과 같이 원점에서 x 축에 접하는 원 C가 있다. 원 C와 직선 $y=\dfrac{2}{3}x$가 만나는 점 중 원점이 아닌 점을 P 라 할 때, 원 C 위의 점 P 에서의 접선의 기울기는?



① $\dfrac{4}{3}$　② $\dfrac{8}{5}$　③ $\dfrac{28}{15}$
④ $\dfrac{32}{15}$　⑤ $\dfrac{12}{5}$

25. 그림과 같이 곡선 $y=e^x$ 위의 두 점 $\mathrm{A}(t,\ e^t)$, $\mathrm{B}(-t,\ e^{-t})$에서의 접선을 각각 l, m이라 하자. 두 직선 l과 m이 이루는 예각의 크기가 $\frac{\pi}{4}$일 때, 두 점 A, B를 지나는 직선의 기울기는? (단, $t>0$) [4점]

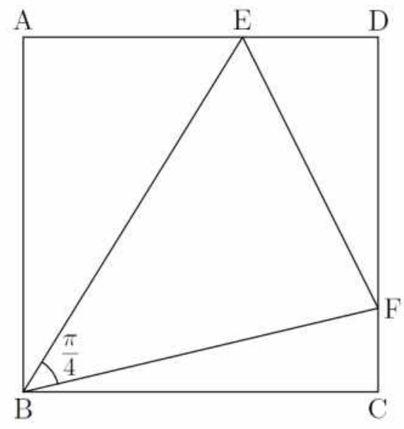


① $\dfrac{1}{\ln(1+\sqrt{2})}$　② $\dfrac{1}{\ln 2}$

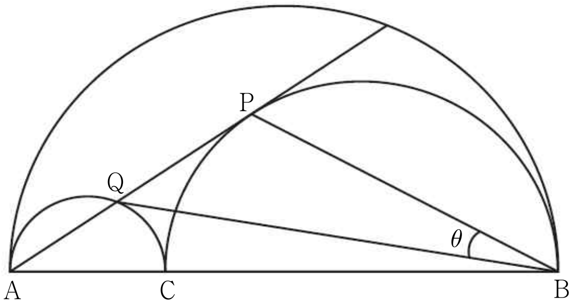
③ $\dfrac{4}{3\ln(1+\sqrt{2})}$　④ $\dfrac{7}{6\ln 2}$

⑤ $\dfrac{3}{2\ln(1+\sqrt{2})}$

26. 그림과 같이 한 변의 길이가 2인 정사각형 ABCD가 있다. 선분 AD 위의 점 E와 선분 DC 위의 점 F에 대하여 $2\overline{\mathrm{ED}}=\overline{\mathrm{DF}}$, $\angle\mathrm{EBF}=\frac{\pi}{4}$일 때, 삼각형 EBF의 넓이가 $a\sqrt{5}+b$이다. $a-b$의 값을 구하시오. (단, a, b는 정수이다.)

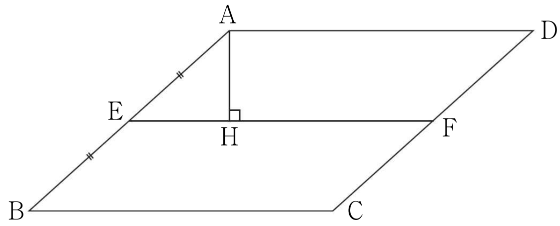


27. 그림과 같이 길이가 8인 선분 AB를 $1:3$으로 내분하는 점을 C라 할 때, 선분 AB, AC, CB를 각각 지름으로 하는 세 개의 반원이 있다. 점 A에서 선분 CB를 지름으로 하는 반원에 그은 접선의 접점을 P, 접선 AP가 선분 AC를 지름으로 하는 반원과 만나는 점을 Q라 하자. $\theta = \angle PBQ$라 할 때, $\tan\theta$의 값은?



① $\frac{1}{6}$ ② $\frac{1}{5}$ ③ $\frac{1}{4}$
④ $\frac{1}{3}$ ⑤ $\frac{1}{2}$

28. 그림과 같이 선분 AD의 길이가 6인 평행사변형 ABCD가 있다. 선분 AB, CD의 중점을 각각 E, F라 하고, 점 A에서 선분 EF에 내린 수선의 발을 H라 하자. 선분 FH의 길이가 4이고, $\angle AFB = \theta$라 했을 때 $\tan\theta = 3$을 만족한다. 이때, 선분 AB의 길이는?



① $4\sqrt{2}$ ② $4\sqrt{3}$ ③ 8
④ $4\sqrt{5}$ ⑤ $4\sqrt{6}$

한 눈에 보는 정답

#1 #2

#1 1. ②	2. ②	3. ⑤	4. 4	5. 983	6. ②
7. ①	8. ⑤	9. ③	10. 337	11. ④	
#2 1. ③	2. 5	3. 32	4. ①		

연습문제

1. ④	2. 10	3. ④	4. ⑤	5. ⑤	6. ③
7. ①	8. ③	9. ②	10. ⑤	11. 4	12. ②
13. ①	14. ②	15. 117	16. 59	17. ①	18. ①
19. ③	20. ①	21. ①	22. ④	23. ①	24. ⑤
25. ①	26. 8	27. ④	28. ④		

정답 및 해설

#1

1. ②

$$a_n=\frac{1}{n^2+1}+\frac{2}{n^2+1}+\cdots+\frac{n}{n^2+1}$$

$$=\frac{1+2+\cdots+n}{n^2+1}=\frac{\frac{n(n+1)}{2}}{n^2+1}=\frac{n(n+1)}{2(n^2+1)}$$

$$\therefore\ \lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\frac{n(n+1)}{2(n^2+1)}=\lim_{n\to\infty}\frac{1+\frac{1}{n}}{2+\frac{2}{n^2}}=\frac{1}{2}$$

$$b_n=\frac{1}{n^2+n}+\frac{2}{n^2+n}+\cdots+\frac{n}{n^2+n}$$

$$=\frac{1+2+\cdots+n}{n^2+n}=\frac{\frac{n(n+1)}{2}}{n^2+n}=\frac{1}{2}$$

$$\therefore\ \lim_{n\to\infty}b_n=\frac{1}{2}$$

$a_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n^2+1}$, $b_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n^2+n}$, $c_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n^2+k}$ 에서 두 자연수 n, k 에 대하여 $1\le k\le n$ 이므로

$\frac{k}{n^2+n}\le\frac{k}{n^2+k}\le\frac{k}{n^2+1}$ 이다.

따라서 모든 자연수 n 에 대하여 $b_n\le c_n\le a_n$ 이므로

$\frac{1}{2}=\lim_{n\to\infty}b_n\le\lim_{n\to\infty}c_n\le\lim_{n\to\infty}a_n=\frac{1}{2}$ 에서 $\lim_{n\to\infty}c_n=\frac{1}{2}$

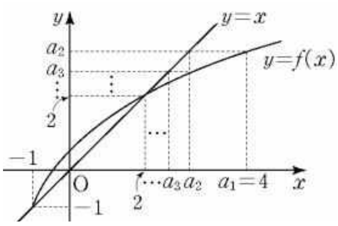
$$\therefore\ \lim_{n\to\infty}(a_n+b_n+c_n)=\lim_{n\to\infty}a_n+\lim_{n\to\infty}b_n+\lim_{n\to\infty}c_n$$

$$=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$$

2. ②

$f(x)=\sqrt{3x+3}-1$이라 하면

$f(a_1)=a_2$, $f(a_2)=a_3$, $\cdots$, $f(a_n)=a_{n+1}$이므로 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=x$를 그려서 수열 $\{a_n\}$의 특징을 알아낼 수 있다.



㉠ 위의 그림에서 $a_1>a_2>a_3>\cdots$이므로 모든 자연수 n에 대하여 $a_n>a_{n+1}$이다. (참)

㉡ 위의 그림에서 $a_1=4$이고 $\lim_{n\to\infty}a_n=2$이므로 ㉠에 의해 모든 자연수 n에 대하여 $2<a_n<5$이다. (참)

㉢ $\lim_{n\to\infty}\left(3^{\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2^k}}\cdot 5^{\frac{1}{2^n}}\right)$에서

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2^k}=\frac{\frac{1}{2}\left\{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right\}}{1-\frac{1}{2}}=1-\frac{1}{2^n}\text{ 이므로}$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(3^{\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2^k}}\cdot 5^{\frac{1}{2^n}}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(3^{1-\frac{1}{2^n}}\cdot 5^{\frac{1}{2^n}}\right)$$

$$=3\cdot 5^0=3$$

이고, $\lim_{n\to\infty}a_n=2$이므로 $\lim_{n\to\infty}a_n\ne\lim_{n\to\infty}\left(3^{\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2^k}}\cdot 5^{\frac{1}{2^n}}\right)$ (거짓)

따라서 옳은 것은 ㉠, ㉡이다.

3. ⑤

$P_n(a_n,\ 0)$이라 두자.

$P_n(a_n,\ 0)\ \to\ A_n(a_n,\ -a_n+2)$

$\to\ B_n\left(-\frac{1}{4}a_n-\frac{1}{2},\ -a_n+2\right)$

$\to\ C_n\left(-\frac{1}{4}a_n-\frac{1}{2},\ 0\right)$

$\to\ P_{n+1}\left(\frac{1}{4}a_n+\frac{1}{2},\ 0\right)$

$\therefore\ a_{n+1}=\frac{1}{4}a_n+\frac{1}{2}$ ...... ㉠

$a_{n+1}+k=\frac{1}{4}(a_n+k)$로 놓으면

$a_{n+1}+k=\frac{1}{4}a_n+\frac{1}{4}k$

$a_{n+1}=\frac{1}{4}a_n-\frac{3}{4}k$ ...... ㉡

㉠, ㉡에 의해 $-\frac{3}{4}k=\frac{1}{2}$ $\therefore\ k=-\frac{2}{3}$

따라서 $a_{n+1}-\frac{2}{3}=\frac{1}{4}\left(a_n-\frac{2}{3}\right)$이므로

$$a_n-\frac{2}{3}=\left(a_1-\frac{2}{3}\right)\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}$$

$$\therefore\ a_n=\left(a_1-\frac{2}{3}\right)\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}+\frac{2}{3}$$

$$\therefore\ \lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\left\{\left(a_1-\frac{2}{3}\right)\left(\frac{1}{4}\right)+\frac{2}{3}\right\}=\frac{2}{3}$$

4. 4

x의 값의 범위에 따라 함수 $f(x)$를 구하면 다음과 같다.

$-1<x<1$이면

$n\to\infty$일 때, $x^n\to 0$이므로

$f(x)=\lim_{n\to\infty}\dfrac{x^{n+1}+2x}{x^n+1}=2x$

$x=1$이면 $f(1)=\dfrac{3}{2}$

$x>1$ 또는 $x<-1$이면

$n\to\infty$일 때, $|x^n|\to\infty$이므로

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{x^{n+1}+2x}{x^n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{x+\dfrac{2}{x^{n-1}}}{1+\dfrac{1}{x^n}}=x$$

$a<-1,\ -1<a<1,\ a=1,\ 1<a<2,\ 2<a<4,\ a=4,$ $4<a$로 범위를 나누어 계산해보면

$a=\dfrac{1}{2},\ 1,\ \dfrac{5}{2}$가 나온다.

따라서 모든 a의 합은 4이다.

5. 983

$B(0,0),\ C(1,0),\ A(0,1),\ \overline{CH}=x,\ \overline{CI}=y$라 하면

$G(1-x-y,\ x),\ J(1-y,\ x+y)$이다.

점 G는 직선 $y=2x$ 위의 점이고, 점 J는 직선 $y=\dfrac{7-4x}{5}$ 위의 점이므로 $x=\dfrac{4}{7},\ y=\dfrac{1}{7}$이다.

$$\lim_{n\to\infty}S_n=\frac{7}{20}\times\frac{1}{1-(x^2+y^2)}=\frac{343}{640}$$

6. ②

그림 R_1에서 색칠된 도형의 넓이는 직각삼각형 $A_1B_1D_1$의 넓이와 같으므로 $S_1=\dfrac{1}{2}$

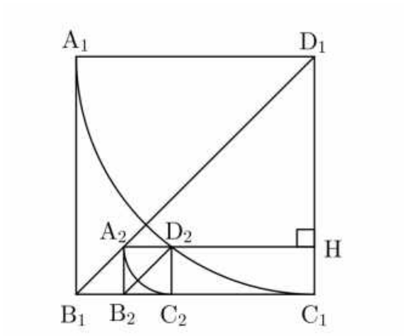


그림 R_2에서 점 D_2에서 선분 C_1D_1에 내린 수선의 발을 H라 하자.

정사각형 $A_2B_2C_2D_2$의 한 변의 길이를 $t\,(0<t<1)$라 하면

$\overline{B_1B_2}=t,\ \overline{D_1H}=1-t,\ \overline{C_1C_2}=\overline{D_2H}=1-2t$

따라서 피타고라스의 정리에 의하여

$(1-t)^2+(1-2t)^2=1$

이고 $t=\dfrac{1}{5}$

정사각형 $A_1B_1C_1D_1$과 정사각형 $A_2B_2C_2D_2$의 닮음비가 $1:\dfrac{1}{5}$이므로 넓이의 비는 $1:\dfrac{1}{25}$

따라서 S_n은 첫째항이 $\dfrac{1}{2}$이고 공비가 $\dfrac{1}{25}$인 등비수열의 첫째항부터 제n항까지의 합이다.

$$\therefore \lim_{n\to\infty}S_n=\frac{\dfrac{1}{2}}{1-\dfrac{1}{25}}=\frac{25}{48}$$

7. ①

등비급수이고, 모두 닮음도형이며, 초항$=1$이기 때문에 ($\because$ 정사각형 $A_1B_1C_1D_1$의 넓이$=1$) 공비만 구해주면 된다. 주어진 수열의 공비는 첫 번째 정사각형의 한 변의 길이만 구하면 구할 수 있다.

ⅰ) <그림 1>에서 두 번째 정사각형의 한 변의 길이를 a라 하면

A_2C_2는 $\sqrt{2}a$이다. 그런데 이 길이는

$\overline{HH'}-\left(\overline{A_2H'}+\overline{C_2H}\right)=1-2\overline{A_2H'}$로 구할 수 있다.

이때, $\overline{A_2H'}=1-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ ($\because$ 삼각형 A_2B_1H에서

$A_2B_1=1,\ B_1H=\dfrac{1}{2}$인 직각삼각형)이므로

$2\overline{A_2H'}=2-\sqrt{3}$

$\therefore\ \overline{HH'}=1-(2-\sqrt{3})=\sqrt{3}-1=\sqrt{2}a \Rightarrow a=\dfrac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{2}}$

한편, 이 등비급수는 넓이의 합을 묻고 있으므로 공비는

넓이비가 되고, 이는 곧 닮음비(=길이비)의 제곱이 된다.

닮음비$=\dfrac{a}{1}=a$이므로 공비는 a^2이 된다.

$\therefore a^2=\dfrac{(\sqrt{3}-1)^2}{2}=2-\sqrt{3}$

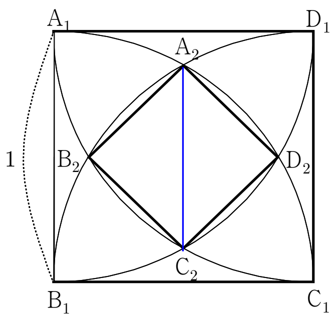
$\therefore \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}S_n=\frac{1}{1-(2-\sqrt{3})}=\frac{1+\sqrt{3}}{2}$

ⅱ) <그림2>에서 빨간색 삼각형을 관찰하면

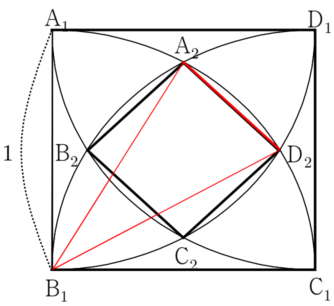
$\overline{A_2B_1}=\overline{D_2B_1}=1,\ \angle A_2B_1D_2=\dfrac{\pi}{6}$이므로 주어진 삼각형에서 제2코사인 법칙을 쓰면

$\overline{A_2D_2}^{\,2}=1^2+1^2-2\cdot1\cdot1\cdot\cos\dfrac{\pi}{6}=2-\sqrt{3}$

$\therefore \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}S_n=\frac{1}{1-(2-\sqrt{3})}=\frac{\sqrt{3}+1}{2}$



<그림1>

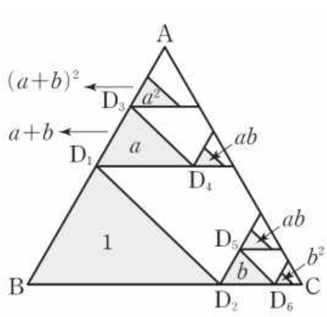


<그림2>

8. ⑤

$$\left(\lim_{n\to\infty} S_n = 2\pi\left(\frac{4-\sqrt{10}}{3}\right)^2 \frac{1}{1-\frac{2}{9}} = \frac{4(13-4\sqrt{10})\pi}{7}\right)$$

9. ③



$S_1=1$로 $a=\left(\frac{1}{2}\right)^2$, $b=\left(\frac{1}{3}\right)^2$로 두고 생각해보자.

$1+(a+b)+(a+b)^2+\cdots$

공비 $r=a+b=\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{3}\right)^2=\frac{13}{36}$

$$\therefore \lim_{n\to\infty} S_n = \frac{\frac{\sqrt{3}}{12}}{1-\frac{13}{36}} = \frac{3\sqrt{3}}{23}$$

10. 337

$\angle ABE = \angle EFD = \theta$라 하자.

$\overline{BE}=\frac{\sqrt{7}}{2}$, $\overline{AE}=\frac{\sqrt{3}}{2}$이므로 $\cos\theta=\frac{2}{\sqrt{7}}$, $\sin\theta=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}}$

$\frac{\overline{EF}}{\sin\frac{\pi}{3}}=\frac{\overline{ED}}{\sin\theta}$이므로 $\overline{EF}=\frac{\sqrt{7}}{4}$

$\overline{FD}=\frac{\sqrt{7}}{4}\cos\theta+\frac{1}{2}\cos\frac{\pi}{3}=\frac{3}{4}$

$S_1=\frac{9\sqrt{3}}{32}$

$\overline{BH}=x$라 하면 $\overline{HG}=\overline{HC}=\frac{x}{2}$, $\overline{BC}=\frac{3x}{2}=1$이므로 $x=\frac{2}{3}$,

$\overline{HC}=\frac{1}{3}$

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \frac{9\sqrt{3}}{32}\times\frac{1}{1-\left(\frac{1}{3}\right)^2}=\frac{81\sqrt{3}}{256}=\frac{q}{p}\sqrt{3}$$

$p+q=256+81=337$

11. ④

$S_1=\frac{3\sqrt{15}}{16}$,

그림 R_{n+1}에서 새로 색칠한 부분의 넓이는

그림 R_n에서 새로 색칠한 부분의 넓이의 $\left(\frac{1}{3}\right)^2$배이므로

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \frac{S_1}{1-\left(\frac{1}{3}\right)^2}=\frac{27}{128}\sqrt{15}$$

#2

1. ③

$2\sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)-\cos\left(\frac{\pi}{4}-\theta\right)$

$=2\sin\theta\cos\frac{\pi}{4}+2\cos\theta\sin\frac{\pi}{4}-\cos\frac{\pi}{4}\cos\theta-\sin\frac{\pi}{4}\sin\theta$

$=\frac{\sqrt{2}}{2}(\sin\theta+\cos\theta)$

$=2\sqrt{2}\cos\theta$

에서 $\sin\theta=3\cos\theta$

$\cos\theta\neq0$이므로 $\tan\theta=3$

2. 5

α, β, γ가 삼각형 ABC의 세 내각의 크기이므로

$\alpha+\beta+\gamma=\pi$ ⋯ ㉠

α, β, γ가 이 순서대로 등차수열을 이루므로

$\beta=\frac{\alpha+\gamma}{2}$, $\alpha+\gamma=2\beta$ ⋯ ㉡

㉠, ㉡에서 $3\beta=\pi$, $\beta=\frac{\pi}{3}$

$\beta=\frac{\pi}{3}$이므로 $\alpha+\gamma=\frac{2\pi}{3}$에서

$\cos(\alpha+\gamma)=\cos\frac{2\pi}{3}=-\frac{1}{2}$

$\cos\alpha\cos\gamma-\sin\alpha\sin\gamma=-\frac{1}{2}$ ⋯ ㉢

$\cos\alpha$, $2\cos\beta$, $8\cos\gamma$가 이 순서대로 등비수열을 이루므로

$(2\cos\beta)^2=8\cos\alpha\cos\gamma$

$\cos\alpha\cos\gamma=\frac{1}{8}$ ⋯ ㉣

㉢, ㉣에서 $\sin\alpha\sin\gamma=\frac{5}{8}$ ⋯ ㉤

따라서 $\tan\alpha\tan\gamma=\frac{\sin\alpha\sin\gamma}{\cos\alpha\cos\gamma}=5$

3. 32

직선 l 의 기울기가 $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ 이고, 세 직선 $l,\ m,\ n$으로 둘러싸인 삼각형이 정삼각형이므로 두 접선 $m,\ n$과 직선 l 이 이루는 예각의 크기는 $60°$ 이다.

직선 l 과 이루는 예각의 크기가 $60°$ 인 직선의 기울기를 k 라 하면 삼각함수의 덧셈정리에 의하여

$$\left|\frac{-\frac{\sqrt{3}}{2}-k}{1-\frac{\sqrt{3}}{2}k}\right|=\sqrt{3},\ k=\frac{\sqrt{3}}{5}\ \text{또는}\ k=3\sqrt{3}$$

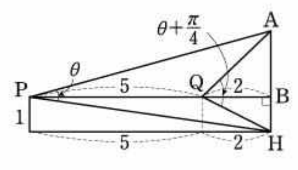
$f(x)=\sqrt{3}\ln x$ 에서 $f'(x)=\frac{\sqrt{3}}{x}$ 이므로

$\frac{\sqrt{3}}{\alpha}=\frac{\sqrt{3}}{5},\ \frac{\sqrt{3}}{\beta}=3\sqrt{3}$

$\alpha=5,\ \beta=\frac{1}{3}$ 이므로 $6(\alpha+\beta)=32$

4. ①

주어진 그림을 단순화하면 오른쪽 그림과 같다.



그림에서 $\overline{AH}=x$라 둔다.

$\angle BQH-\angle BPH=\alpha$,

$\angle BQA-\angle BPA=\beta$라고 하면

$$\tan\alpha=\frac{\frac{1}{2}-\frac{1}{7}}{1+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{7}}=\frac{1}{3}$$

$$\tan\beta=\frac{\frac{x-1}{2}-\frac{x-1}{7}}{1+\frac{x-1}{2}\cdot\frac{x-1}{7}}=\frac{5(x-1)}{14+(x-1)^2}$$

또한, $\alpha+\beta=\frac{\pi}{4}$ 이므로

$$\tan(\alpha+\beta)=\frac{\frac{1}{3}+\frac{5(x-1)}{14+(x-1)^2}}{1-\frac{1}{3}\cdot\frac{5(x-1)}{14+(x-1)^2}}=1$$

이 식을 정리하면 $x^2-12x+25=0$

따라서 근과 계수의 관계에서 $a+b=12$

연습문제

1. ④

$(n-1)\pi<a_n<\frac{\pi}{2}+(n-1)\pi$이므로

$\frac{(n-1)\pi}{n}<\frac{a_n}{n}<\frac{(n-1)\pi+\frac{\pi}{2}}{n}$ 이고

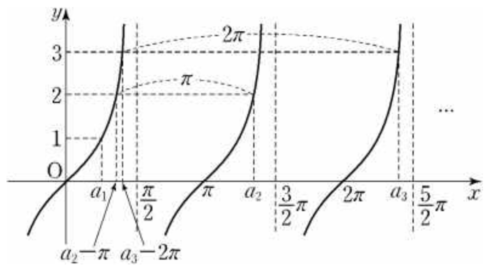
$\lim_{n\to\infty}\frac{(n-1)\pi}{n}=\pi,\ \lim_{n\to\infty}\frac{(n-1)\pi+\frac{\pi}{2}}{n}=\pi$이므로

샌드위치 정리에 의해 $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n}=\pi$

[다른 풀이]

$y=\tan x$의 주기가 π이고, 점근선이 있으므로 그림에서와 같이

$\lim_{n\to\infty}(a_n-(n-1)\pi)=\frac{\pi}{2}$이다.



$\therefore\ \lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{(a_n-(n-1)\pi)+(n-1)\pi}{n}=\pi$

2. 10

주어진 부등식에서

$\frac{3^{n-1}}{3^n+1}<a_n<\frac{3^{n-1}}{3^n-1}$

이므로 수열의 극한의 대소 관계에 의하여 $\lim_{n\to\infty}a_n=\frac{1}{3}$ 이다.

$\therefore\ 30\lim_{n\to\infty}a_n=30\times\frac{1}{3}=10$

3. ④

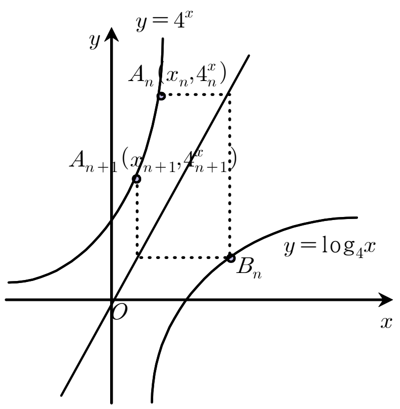
먼저, 모든 a_n은 양수임을 알 수 있다.

따라서

$a_{n+1}=f(f(a_n))$

$\lim_{n\to\infty}a_n=\alpha$라고 하면, $\lim_{n\to\infty}a_{n+1}=\alpha$이므로 $\alpha=-\frac{1}{2}\alpha+2$이다. 곧, $\alpha=\frac{4}{3}$이다.

4. ⑤



A_n의 x좌표를 x_n이라고 가정하면 $A_n=(x_n,4^x_n)$이고

$y=2x$와의 교점의 좌표는 $(\frac{1}{2}\times 4^x_n,4^x_n)$ 이다.

따라서 $y=\log_4 x$에 $x=\frac{1}{2}\times 4^x_n$를 대입하면

B_n의 y좌표는 $y=\log_{2^2}2^{2x_n-1}=\frac{2x_n-1}{2}$ 이다.

따라서 $y=2x$에 다시 대입하면

$\frac{2x_n-1}{2}=2x_{n+1}$이다.

$\therefore\ x_{n+1}=\frac{1}{2}x_n-\frac{1}{4}$ 이므로

일반항 $x_n=(x_1+\frac{1}{2})(\frac{1}{2})^{n-1}-\frac{1}{2}$이고 $n\to\infty$일 때

$(\frac{1}{2})^{n-1}\to 0$이므로 $\lim_{n\to\infty}x_n=-\frac{1}{2}$

5. ⑤

$\mathrm{A}_n(0,\ y_n)$이고 조건 (1)에 의하여 $\mathrm{P}(3-y_n,\ y_n)$이다.

조건 (2)에 의하여

$\mathrm{Q}_n\left(3-y_n,\ \frac{1}{3}(3-y_n)-2\right)=\left(3-y_n,\ -\frac{1}{3}y_n-1\right)$이며

조건 (3)에 의하여 $\mathrm{R}_n=\left(0,\ -\frac{1}{3}y_n-1\right)$이다. 마지막으로

$\mathrm{A}_{n+1}\left(0,\ \frac{1}{3}y_n+1\right)=(0,\ y_{n+1})$이므로 $y_{n+1}=\frac{1}{3}y_n+1$

$y_{n+1}=\frac{1}{3}y_n+1$이므로

$\left(y_{n+1}-\frac{3}{2}\right)=\frac{1}{3}\left(y_n+\frac{3}{2}\right)$

$y_n=\left(y_1-\frac{3}{2}\right)\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}+\frac{3}{2}$

$\lim_{n\to\infty}y_n=\lim_{n\to\infty}\left(y_1-\frac{3}{2}\right)\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}+\frac{3}{2}=\frac{3}{2}$

6. ③

x의 값의 범위에 따라 함수 $f(x)$를 구하면 다음과 같다.

$-1<x<1$이면

$n\to\infty$일 때, $x^n\to 0$이므로

$f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{x^{n+1}+2x}{x^n+1}=2x$

$x=1$이면 $f(1)=\frac{3}{2}$

$x>1$ 또는 $x<-1$이면

$n\to\infty$일 때, $|x^n|\to\infty$이므로

$f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{x^{n+1}+2x}{x^n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{x+\frac{2}{x^{n-1}}}{1+\frac{1}{x^n}}=x$

a의 값의 범위에 따라 $f(a)-f\left(\frac{1}{a}\right)=1$을 만족시키는 a의 값을 구해

보자.

(ⅰ) $-1<a<1$이면 $f(a)=2a, f\left(\frac{1}{a}\right)=\frac{1}{a}$ 이므로

$f(a)-f\left(\frac{1}{a}\right)=1$에서

$2a-\frac{1}{a}=1, 2a^2-a-1=0, (2a+1)(a-1)=0$

$-1<a<1$이므로 $a=-\frac{1}{2}$

(ⅱ) $a=1$이면 $f(a)-f\left(\frac{1}{a}\right)=1$을 만족시키지 않는다.

(ⅲ) $a>1$ 또는 $a<-1$이면 $f(a)=a, f\left(\frac{1}{a}\right)=\frac{2}{a}$ 이므로

$f(a)-f\left(\frac{1}{a}\right)=1$에서

$a-\frac{2}{a}=1, a^2-a-2=0, (a+1)(a-2)=0$

$a>1$ 또는 $a<-1$이므로 $a=2$

따라서 모든 실수 a의 값의 합은

$-\frac{1}{2}+2=\frac{3}{2}$

7. ①

$\sum_{n=1}^{\infty}\left(na_n-\frac{n^2+1}{2n+1}\right)=3$이므로 $\lim_{n\to\infty}\left(na_n-\frac{n^2+1}{2n+1}\right)=0$이다.

즉, $\lim_{n\to\infty}n\left(a_n-\frac{n+\frac{1}{n}}{2n+1}\right)=0$에서

$\lim_{n\to\infty}n\neq 0$이므로 $\lim_{n\to\infty}\left(a_n-\frac{n+\frac{1}{n}}{2n+1}\right)=0$

$\therefore \lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\left(a_n-\frac{n+\frac{1}{n}}{2n+1}\right)+\lim_{n\to\infty}\frac{n+\frac{1}{n}}{2n+1}$

$=0+\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$

$\therefore \lim_{n\to\infty}({a_n}^2+2a_n+2)=\left(\lim_{n\to\infty}a_n\right)^2+2\lim_{n\to\infty}a_n+2$

$=\left(\frac{1}{2}\right)^2+2\times\frac{1}{2}+2=\frac{13}{4}$

8. ③

$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n - \sin b_n) = 2$의 값이 존재하므로

$\lim_{n\to\infty}(a_n - \sin b_n) = 0$이다.

ㄱ. (참) $-1 \le \sin b_n \le 1$이므로 $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n} = 0$

ㄴ. (참) $\lim_{n\to\infty} b_n = \alpha$이면 $\lim_{n\to\infty}\sin b_n = \sin\alpha$

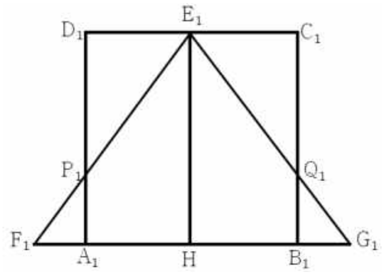
따라서 $\lim_{n\to\infty}(a_n - \sin b_n) = 0$

$\lim_{n\to\infty} a_n = \sin\alpha$

ㄷ. (거짓) $a_n = 0$일 때, $b_1 = 0,\ b_2 = \pi,\ b_3 = 0,\ b_4 = \pi,\ \cdots$ 같은 경우도 조건을 만족한다.

9. ②

그림 R_1의 점 $\mathrm{E_1}$에서 변 $\mathrm{A_1B_1}$에 내린 수선의 발을 H라 하자.



$\overline{\mathrm{E_1D_1}} = \frac{1}{2}\overline{\mathrm{D_1C_1}} = \frac{1}{2}\times 4 = 2$

$\overline{\mathrm{E_1H}} = \overline{\mathrm{D_1A_1}} = 4$

$\overline{\mathrm{E_1F_1}} = 5a$라 놓으면 $\overline{\mathrm{E_1F_1}} : \overline{\mathrm{F_1G_1}} = 5:6$이므로

$\overline{\mathrm{F_1G_1}} = 6a$ 즉, $\overline{\mathrm{F_1H}} = \frac{1}{2}\overline{\mathrm{F_1G_1}} = 3a$

직각삼각형 $\mathrm{E_1F_1H}$에서 $(5a)^2 = 4^2 + (3a)^2$

즉, $16a^2 = 16$에서 $a > 0$이므로 $a = 1$

$\overline{\mathrm{F_1H}} = 3$이고 $\overline{\mathrm{A_1H}} = 2$이므로 $\overline{\mathrm{F_1A_1}} = 3-2 = 1$

삼각형 $\mathrm{D_1P_1E_1}$과 삼각형 $\mathrm{A_1P_1F_1}$이 닮음이고

$\overline{\mathrm{D_1E_1}} = 2,\ \overline{\mathrm{A_1F_1}} = 1$이므로 닮음비는 $2:1$

즉, $\overline{\mathrm{D_1P_1}} = \frac{2}{3}\times 4 = \frac{8}{3},\ \overline{\mathrm{A_1P_1}} = \frac{1}{3}\times 4 = \frac{4}{3}$

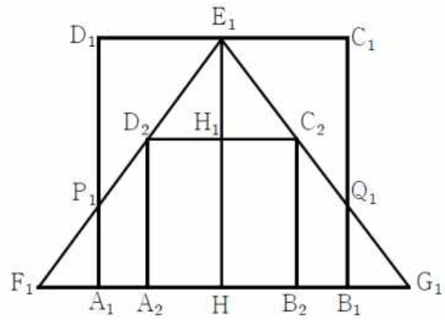
$\overline{\mathrm{E_1F_1}} = \overline{\mathrm{E_1G_1}}$이므로

삼각형 $\mathrm{D_1P_1E_1}$과 삼각형 $\mathrm{C_1Q_1E_1}$이 합동이고

삼각형 $\mathrm{A_1P_1E_1}$과 삼각형 $\mathrm{B_1Q_1G_1}$이 합동이므로

$S_1 = 2\times\frac{1}{2}\times 2\times\frac{3}{8} + 2\times\frac{1}{2}\times 1\times\frac{4}{3} = \frac{20}{3}$

그림 R_2의 점 $\mathrm{E_1}$에서 변 $\mathrm{D_2C_2}$에 내린 수선의 발을 $\mathrm{H_1}$이라 하자.



정사각형 $\mathrm{A_2B_2C_2D_2}$의 한 변의 길이를 x라 놓으면

$\overline{\mathrm{D_2H_1}} = \frac{x}{2},\ \overline{\mathrm{E_1H_1}} = 4 - x$

삼각형 $\mathrm{E_1F_1H}$와 삼각형 $\mathrm{E_1D_2H_1}$은 닮음이므로

$3:4 = \frac{x}{2} : 4 - x$ 즉, $2x = 12 - 3x$에서 $x = \frac{12}{5}$

정사각형 $\mathrm{A_1B_1C_1D_1}$과 정사각형 $\mathrm{A_2B_2C_2D_2}$의 닮음비는

$4 : \frac{12}{5} = 1 : \frac{3}{5}$

따라서 $\lim_{n\to\infty} S_n$은 첫째항이 $\frac{20}{3}$이고, 공비가 $\left(\frac{3}{5}\right)^2$인 등비급수이므로

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \frac{\frac{20}{3}}{1-\frac{9}{25}} = \frac{125}{12}$$

10. ⑤

$S_1 =$ ($\triangle\mathrm{A_1E_1D_1}$ 의 넓이)+($\triangle\mathrm{E_1B_1F_1}$ 의 넓이)

+($\triangle\mathrm{D_1F_1C_1}$ 의 넓이)$= 1 + \frac{1}{2} + 1 = \frac{5}{2}$

$\triangle\mathrm{E_1F_2D_1}$ 으로부터 $\overline{\mathrm{E_1F_2}} : \overline{\mathrm{D_1F_2}} = 1 : 3$ 이므로

정사각형 $\mathrm{A_2B_2C_2D_2}$ 의 한 변의 길이를 x 라 두면

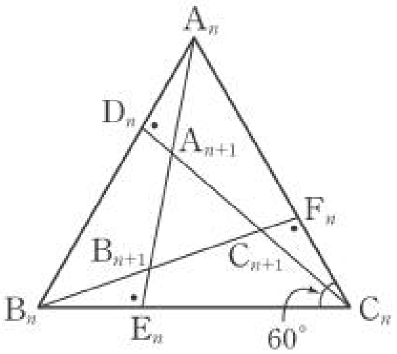
$\triangle\mathrm{A_2E_1B_2}$ 로부터 $\overline{\mathrm{E_1B_2}} : \overline{\mathrm{A_2B_2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{x}{2} : x = 1 : 3$

따라서 $x = \frac{3\sqrt{2}}{5}$

$\square\mathrm{A_1B_1C_1D_1}$ 과 $\square\mathrm{A_2B_2C_2D_2}$ 의 길이 비는 $1 : \frac{3\sqrt{2}}{10}$

$$\lim_{x\to\infty} S_n = \frac{\frac{5}{2}}{1-\left(\frac{3\sqrt{2}}{10}\right)^2} = \frac{\frac{5}{2}}{\frac{82}{100}} = \frac{125}{41}$$

11. 4



$\overline{B_nC_n}=3a$라 하면 코사인법칙에 의하여

$\overline{B_nF_n}=\sqrt{(3a)^2+a^2-2\times 3a\times a\times \cos 60°}=\sqrt{7}a$

이고 세 삼각형 $A_nB_nE_n$, $B_nC_nF_n$, $C_nA_nD_n$은 합동이므로 $\angle A_nE_nB_n=\angle B_nF_nC_n=\angle C_nD_nA_n$

그러므로 두 삼각형 $B_nC_nF_n$, $B_nB_{n+1}E_n$은 닮은 도형이다.

따라서 $\overline{B_nC_n}:\overline{B_nB_{n+1}}=\overline{B_nF_n}:\overline{B_nE_n}$

즉, $3a:\overline{B_nB_{n+1}}=\sqrt{7}a:a$에서

$\overline{B_nB_{n+1}}=\frac{3}{\sqrt{7}}a=\frac{3\sqrt{7}}{7}a$

$\overline{B_nF_n}:\overline{B_nE_n}=\overline{F_nC_n}:\overline{E_nB_{n+1}}$

즉, $\sqrt{7}a:a=a:\overline{E_nB_{n+1}}$에서

$\overline{E_nB_{n+1}}=\frac{1}{\sqrt{7}}a=\frac{\sqrt{7}}{7}a$이므로

$\overline{F_nC_{n+1}}=\overline{E_nB_{n+1}}=\frac{\sqrt{7}}{7}a$

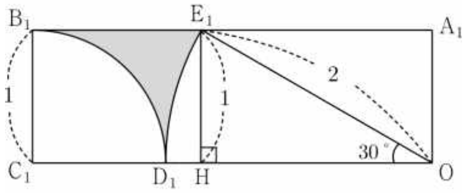
$$\overline{B_{n+1}C_{n+1}}=\sqrt{7}a-\frac{3\sqrt{7}}{7}a-\frac{\sqrt{7}}{7}a=\frac{3\sqrt{7}}{7}a$$
$$=\frac{\sqrt{7}}{7}\times 3a=\frac{\sqrt{7}}{7}\overline{B_nC_n}$$

그러므로 정삼각형 $A_nB_nC_n$ 의 한 변의 길이는 공비가 $\frac{\sqrt{7}}{7}$인 등비수열을 이룬다.

$S_1=\frac{1}{2}\times 3\times 1\times \sin\frac{\pi}{3}=\frac{3\sqrt{3}}{4}$에서 수열 $\{S_n\}$은 첫째항이 $\frac{3\sqrt{3}}{4}$, 공비가 $\left(\frac{\sqrt{7}}{7}\right)^2=\frac{1}{7}$ 인 등비수열의 첫째항부터 제 n항까지의 합이므로

$$\lim_{n\to\infty}S_n=\frac{\frac{3\sqrt{3}}{4}}{1-\frac{1}{7}}=\frac{7\sqrt{3}}{8}$$

12. ②

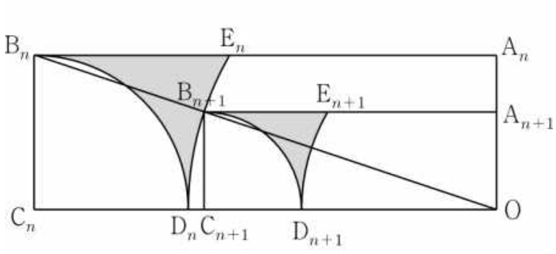


점 E_1에서 선분 C_1O에 내린 수선의 발을 H라 하면 직각삼각형 E_1HO에서 $\overline{E_1H}=1$, $\overline{E_1O}=2$이므로 $\angle E_1OH=30°$ 이다.

S_1은 직사각형 $OA_1B_1C_1$에서

부채꼴 $C_1B_1D_1$, 부채꼴OE_1D_1, 삼각형 E_1OA_1을 제외한 부분의

넓이이므로 $S_1=3-\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{3}-\frac{\sqrt{3}}{2}$ 이다.



두 직사각형 $OA_nB_nC_n$과 $OA_{n+1}B_{n+1}C_{n+1}$서로 닮은 사각형이다.

닮음비가

$\overline{OB_n}:\overline{OB_{n+1}}=\sqrt{10}\times\overline{B_nC_n}:2\times\overline{B_nC_n}=\sqrt{10}:2$이므로

넓이의 비는 $10:4=5:2$가 된다.

따라서 S_n은 첫째항이 $S_1=3-\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{7}{12}\pi$이고

공비가 $\frac{2}{5}$인 등비수열이므로

$$\lim_{n\to\infty}S_n=\frac{3-\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{7}{12}\pi}{1-\frac{2}{5}}=5-5\frac{\sqrt{3}}{6}-\frac{35}{36}\pi$$

13. ①

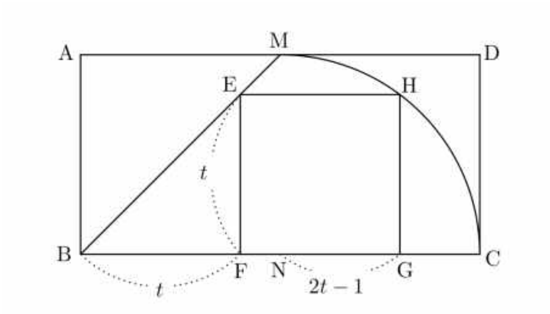


그림 R_2에서 정사각형 EFGH의 한 변의 길이를 $t\,(0<t<1)$라 하자.

$\overline{\mathrm{BF}}=\overline{\mathrm{EF}}=t$이므로

$\overline{\mathrm{FN}}=1-t,\ \overline{\mathrm{GN}}=2t-1$

피타고라스의 정리에 의하여

$t^2+(2t-1)^2=1$에서

$t=\dfrac{4}{5}$

따라서 그림 R_2에서 새로 만들어지는 두 변의 길이가 1 : 2인

직사각형의 긴 변의 길이는 $\dfrac{4}{5}$ 이다.

한편, $S_1=\dfrac{3}{2}-\dfrac{\pi}{4}$

이므로

$S_2=\left(\dfrac{3}{2}-\dfrac{\pi}{4}\right)+\left(\dfrac{3}{2}-\dfrac{\pi}{4}\right)\cdot 2\cdot\left(\dfrac{2}{5}\right)^2$

같은 방법으로

$S_n=\sum_{k=1}^{n}\left(\dfrac{3}{2}-\dfrac{\pi}{4}\right)\left(\dfrac{8}{25}\right)^{k-1}$

$\lim_{n\to\infty}S_n=\sum_{k=1}^{n}\left(\dfrac{3}{2}-\dfrac{\pi}{4}\right)\left(\dfrac{8}{25}\right)^{k-1}$

$\lim_{n\to\infty}S_n=\dfrac{\dfrac{3}{2}-\dfrac{\pi}{4}}{1-\dfrac{8}{25}}=\dfrac{25}{68}(6-\pi)$

14. ②

도형 R_1의 색칠된 부분의 넓이 S_1은

S_1 = (부채꼴 $\mathrm{F_1C_1B_1}$ 의 넓이) + (부채꼴 $\mathrm{E_1B_1C_1}$ 의 넓이) $-2\times(\triangle\mathrm{G_1B_1C_1})$의 넓이이다.

점 F_1와 G_1에서에서 $\overline{\mathrm{B_1C_1}}$에 내린 수선의 발을 각각 H, M 라고 하자.

$\overline{\mathrm{F_1C_1}}:\overline{\mathrm{F_1H}}=2:1$ 이므로 $\angle\mathrm{F_1C_1H}=30^\circ$이다.

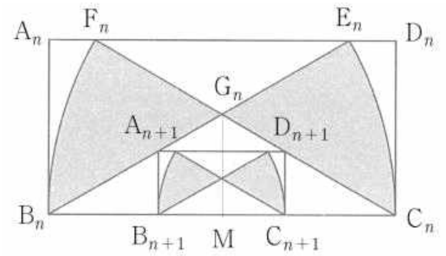
따라서 부채꼴 $\mathrm{F_1C_1B_1}$ 의 넓이$=\dfrac{30}{360}\times 4\pi=\dfrac{\pi}{3}$이고

부채꼴 $\mathrm{F_1C_1B_1}$과 부채꼴 $\mathrm{E_1B_1C_1}$는 합동이므로 부채꼴 $\mathrm{E_1B_1C_1}$의 넓이$=\dfrac{\pi}{3}$

$\overline{\mathrm{C_1M}}=1$ 이고, $\angle\mathrm{G_1C_1M}=30^\circ$이므로 $\overline{\mathrm{G_1M}}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$이다.

따라서 ($\triangle\mathrm{G_1B_1C_1}$의 넓이) $=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

즉, $S_1=\dfrac{2\pi-2\sqrt{3}}{3}$



직사각형 $\mathrm{A}_n\mathrm{B}_n\mathrm{C}_n\mathrm{D}_n$의 한 변의 길이를 x_n이라 하고, 직사각형

$\mathrm{A}_n\mathrm{B}_n\mathrm{C}_n\mathrm{D}_n$에서 새로 그려진 직사각형 $\mathrm{A}_{n+1}\mathrm{B}_{n+1}\mathrm{C}_{n+1}\mathrm{D}_{n+1}$의

한 변의 길이를 x_{n+1}이라고 하면

$\overline{\mathrm{B}_n\mathrm{B}_{n+1}}:\overline{\mathrm{B}_{n+1}\mathrm{A}_{n+1}}=\sqrt{3}:1$ 이므로

$(x_n-x_{n+1}):x_{n+1}=\sqrt{3}:1$ 이다. 비례식을 정리하여 풀면 $x_{n+1}=\dfrac{\sqrt{3}-1}{2}x_n$이 되어 직사각형

$\mathrm{A}_n\mathrm{B}_n\mathrm{C}_n\mathrm{D}_n$ 내부에 그려진 도형의 넓이와 직사각형 $\mathrm{A}_{n+1}\mathrm{B}_{n+1}\mathrm{C}_{n+1}\mathrm{D}_{n+1}$의 내부에 새로 그려진 도형의 넓이의 비는

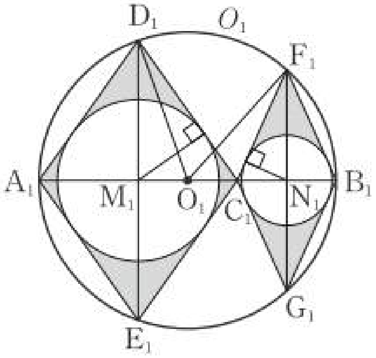
$1:\left(\dfrac{\sqrt{3}-1}{2}\right)^2$ 이 되어 S_n은 초항이 $\dfrac{2\pi-2\sqrt{3}}{3}$ 이고

공비가 $\left(\dfrac{\sqrt{3}-1}{2}\right)^2$인 등비수열의 합이다. 따라서

$\lim_{n\to\infty}S_n=\dfrac{\dfrac{2\pi-2\sqrt{3}}{3}}{1-\left(\dfrac{\sqrt{3}-1}{2}\right)^2}=\dfrac{4\sqrt{3}\pi-12}{9}$

15. 117

그림 R_1에서 원 O_1의 중심을 O_1, 선분 $\mathrm{A_1C_1}$의 중점을 M_1, 선분 $\mathrm{C_1B_1}$의 중점을 N_1, 두 사각형 $\mathrm{A_1E_1C_1D_1}$과 $\mathrm{C_1G_1B_1F_1}$에 각각 내접하는 원의 반지름의 길이를 각각 r_1, r_2라 하자.



직각삼각형 $M_1O_1D_1$에서 $\overline{M_1O_1}=1$, $\overline{O_1D_1}=3$이므로

$\overline{D_1M_1}=\sqrt{3^2-1^2}=\sqrt{8}$

직각삼각형 $M_1C_1D_1$에서 $\overline{M_1C_1}=2$, $\overline{D_1M_1}=\sqrt{8}$ 이므로

$\overline{C_1D_1}=\sqrt{2^2+(\sqrt{8})^2}=\sqrt{12}=2\sqrt{3}$ 이고

$\frac{1}{2}\times\overline{M_1C_1}\times\overline{D_1M_1}=\frac{1}{2}\times\overline{C_1D_1}\times r_1$에서

$r_1=\frac{2\sqrt{8}}{2\sqrt{3}}=\sqrt{\frac{8}{3}}$

직각삼각형 $O_1N_1F_1$에서 $\overline{O_1N_1}=2$, $\overline{O_1F_1}=3$이므로

$\overline{F_1N_1}=\sqrt{3^2-2^2}=\sqrt{5}$

직각삼각형 $C_1N_1F_1$에서 $\overline{C_1N_1}=1$, $\overline{F_1N_1}=\sqrt{5}$ 이므로

$\overline{C_1F_1}=\sqrt{1^2+(\sqrt{5})^2}=\sqrt{6}$ 이고

$\frac{1}{2}\times\overline{C_1N_1}\times\overline{F_1N_1}=\frac{1}{2}\times\overline{C_1F_1}\times r_2$에서

$r_2=\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{6}}=\sqrt{\frac{5}{6}}$

그러므로 그림 R_1에서 색칠된 부분의 넓이는 두 사각형의 넓이에서 내접하는 두 원의 넓이를 뺀 것이므로

$$S_1=4\left(\frac{1}{2}\times2\times2\sqrt{2}+\frac{1}{2}\times1\times\sqrt{5}\right)-\pi\times\left(\sqrt{\frac{8}{3}}\right)^2-\pi\times\left(\sqrt{\frac{5}{6}}\right)^2$$

$=8\sqrt{2}+2\sqrt{5}-\frac{7}{2}\pi$

한편 원 O_1과 사각형에 내접하는 두 원의 닮음비는 각각

$3:r_1=3:\sqrt{\frac{8}{3}}$, $3:r_2=3:\sqrt{\frac{5}{6}}$

이므로 넓이의 비는 각각 $1:\frac{8}{27}$, $1:\frac{5}{54}$ 이고,

$S_2=S_1+S_1\left(\frac{8}{27}+\frac{5}{54}\right)=S_1+\frac{7}{18}S_1$이다.

따라서 수열 $\{S_n\}$은 첫째항이 $8\sqrt{2}+2\sqrt{5}-\frac{7}{2}\pi$ 이고 공비가 $\frac{7}{18}$인 등비수열의 첫째항부터 제 n항까지의 합이므로

$$\lim_{n\to\infty}S_n=\frac{8\sqrt{2}+2\sqrt{5}-\frac{7}{2}\pi}{1-\frac{7}{18}}=\frac{8\sqrt{2}+2\sqrt{5}-\frac{7}{2}\pi}{\frac{11}{18}}$$

$$=\frac{18}{11}\left(8\sqrt{2}+2\sqrt{5}-\frac{7}{2}\pi\right)$$

따라서 $a+b+c=\frac{18}{11}\left(8+2-\frac{7}{2}\right)=\frac{117}{11}$ 이므로

$11(a+b+c)=117$

16. 59

지름이 6인 원의 넓이를 A_0, $(A_0=9\pi)$

C_1에서 그려진 2개 원의 넓이의 합을 A_1,

C_2에서 그려진 4개의 원의 넓이의 합을 $A_2,\cdots$

C_n에서 그려진 2^n개의 원의 넓이의 합을 A_n이라 하자.

C_1에서 바깥 원을 O_1, O_1의 내부에 내접하는 두 원을 크기 순서대로 O_2, O_3라 하면 넓이의 비는 $9:4:1$이므로 $A_1=\frac{5}{9}A_0$이다.

C_n에서 한 원과 그 원에 내접하는 두 원의 넓이의 비가 O_1, O_2, O_3의 넓이의 비와 같으므로 $A_n=\frac{5}{9}A_{n-1}$이다.

따라서 C_n에서 색칠된 부분의 넓이를 S_n이라 하면

$\lim_{n\to\infty}S_n=A_0\left\{\frac{5}{9}-\left(\frac{5}{9}\right)^2+\left(\frac{5}{9}\right)^3-\left(\frac{5}{9}\right)^4+\cdots\right\}=\frac{45}{14}\pi$이다.

$\therefore\ p+q=59$

17. ①

그림 R_n에서 $\angle B_{n+1}AD_n=\angle D_nAC_n$이므로 $\overset{\frown}{B_{n+1}D_n}=\overset{\frown}{D_nC_n}$ 이다.

따라서 $\overline{B_{n+1}D_n}=\overline{D_nC_n}$ 이므로 두 선분 B_nB_{n+1}, B_nD_n과 호 $B_{n+1}D_n$으로 둘러싸인 부분과 선분 C_nD_n과 호 C_nD_n으로 둘러싸인 부분의 넓이의 합은 삼각형 $B_nD_nB_{n+1}$의 넓이와 같다.

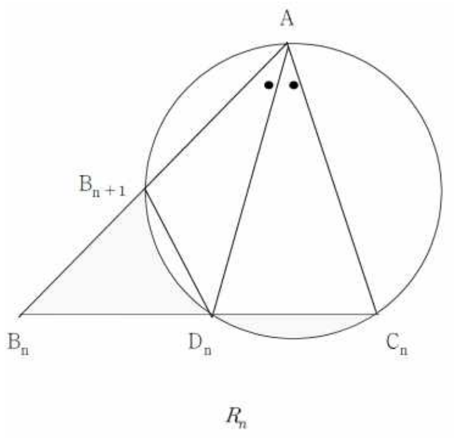


그림 R_1의 삼각형 AB_1C_1에서 코사인법칙에 의하여

$\therefore \overline{B_1C_1}^2 = 3^2+2^2-2\times 3\times 2\times \cos\frac{\pi}{3}=7$

즉, $\overline{B_1C_1}=\sqrt{7}$

또한, $\angle B_1AC_1$의 이등분선이 선분 B_1C_1과 만나는 점이 D_1이므로

$\overline{AB_1}:\overline{AC_1}=\overline{B_1D_1}:\overline{D_1C_1}=3:2$

따라서

$\overline{B_1D_1}=\frac{3\sqrt{7}}{5}$, $\overline{D_1C_1}=\frac{2\sqrt{7}}{5}$

또한, 삼각형 AD_1C_1의 외접원의 중심을 O라 하면

$\angle D_1OC_1=\angle B_2OD_1=\frac{\pi}{3}$이므로

두 삼각형 D_1OC_1, B_2OD_1은 모두 정삼각형이고

$\angle B_2D_1C_1=\frac{2}{3}\pi$이다.

따라서 $\angle B_2D_1B_1=\frac{\pi}{3}$ 이므로

$S_1=\frac{1}{2}\times\frac{3\sqrt{7}}{5}\times\frac{2\sqrt{7}}{5}\times\sin\frac{\pi}{3}=\frac{21\sqrt{3}}{50}$

또한, 삼각형 $B_1D_1B_2$ 에서 코사인법칙에 의하여

$$\begin{aligned}\overline{B_1B_2}^2 &= \left(\frac{3\sqrt{7}}{5}\right)^2+\left(\frac{2\sqrt{7}}{5}\right)^2 \\ &\quad -2\times\frac{3\sqrt{7}}{5}\times\frac{2\sqrt{7}}{5}\times\cos\frac{\pi}{3} \\ &= \frac{91}{25}-\frac{42}{25}=\frac{49}{25}\end{aligned}$$

이므로

$\therefore \overline{B_1B_2}=\frac{7}{5}$

따라서 $\overline{AB_2}=3-\frac{7}{5}=\frac{8}{5}$ 이므로

$\overline{AB_1}:\overline{AB_2}=3:\frac{8}{5}=1:\frac{8}{15}$

이때, 넓이의 비는 $1:\frac{64}{225}$ 이므로

$$\therefore \lim_{n\to\infty}S_n=\frac{\frac{21\sqrt{3}}{50}}{1-\frac{64}{225}}=\frac{27\sqrt{3}}{46}$$

18. ①

$$\frac{18}{55}\frac{1}{1-\left(\frac{5}{11}\right)^2}=\frac{33}{80}$$

19. ③

$x=\theta+\frac{3}{4}\pi$라 하면

$$\begin{aligned}f\left(\theta+\frac{3}{4}\pi\right)&=\cos^2\theta-\cos\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right)+k \\ &=\cos^2\theta+\sin\theta+k \\ &=1-\sin^2\theta+\sin\theta+k \\ &=-\left(\sin\theta-\frac{1}{2}\right)^2+k+\frac{5}{4}\end{aligned}$$

최댓값은 $k+\frac{5}{4}=3$, $k=\frac{7}{4}$

최솟값은 $\sin\theta=-1$일 때, $m=\frac{3}{4}$

$k+m=\frac{7}{4}+\frac{3}{4}=\frac{5}{2}$

20. ①

점 $(\cos\alpha, \sin\alpha)$와 직선 $x\sin\beta+y\cos\beta+2=0$ 사이의 거리는

$$\frac{|\cos\alpha\sin\beta+\sin\alpha\cos\beta+2|}{\sqrt{\sin^2\beta+\cos^2\beta}}=\frac{3}{2}$$

$|\sin(\alpha+\beta)+2|=\frac{3}{2}$

$\sin(\alpha+\beta)+2>0$이므로

$\sin(\alpha+\beta)+2=\frac{3}{2}$

따라서 $\sin(\alpha+\beta)=-\frac{1}{2}$

21. ①

$\frac{4+\tan\alpha}{4\tan\alpha-1}=\tan\beta$에서

$$\begin{aligned}4+\tan\alpha&=\tan\beta(4\tan\alpha-1) \\ &=4\tan\alpha\tan\beta-\tan\beta\end{aligned}$$

$\tan\alpha+\tan\beta=4\tan\alpha\tan\beta-4=-4(1-\tan\alpha\tan\beta)$

$\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}=-4$

즉, $\tan(\alpha+\beta)=-4$

[다른 풀이]

$\tan\beta=\frac{4+\tan\alpha}{4\tan\alpha-1}$ 에서

$$\tan(\alpha+\beta)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}$$
$$=\frac{\tan\alpha+\frac{4+\tan\alpha}{4\tan\alpha-1}}{1-\tan\alpha\times\frac{4+\tan\alpha}{4\tan\alpha-1}}$$
$$=\frac{\tan\alpha(4\tan\alpha-1)+4+\tan\alpha}{(4\tan\alpha-1)-\tan\alpha(4+\tan\alpha)}$$
$$=\frac{4\tan^2\alpha+4}{-1-\tan^2\alpha}$$
$$=\frac{4(\tan^2\alpha+1)}{-(\tan^2\alpha+1)}=-4$$

22. ④

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\cot\alpha+\cot\beta=2,\ \cot\alpha\cot\beta=-1$

한편 $\cot\alpha=\frac{1}{\tan\alpha},\ \cot\beta=\frac{1}{\tan\beta}$ 이므로

$\tan\alpha\tan\beta=\frac{1}{\cot\alpha\cot\beta}=-1$ …… ㉠

$\cot\alpha+\cot\beta=2$에서

$$\frac{1}{\tan\alpha}+\frac{1}{\tan\beta}=2$$
$$\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{\tan\alpha\tan\beta}=2$$
$$\tan\alpha+\tan\beta=2\tan\alpha\tan\beta$$
$$=2\times(-1)=-2 \quad \cdots\cdots ㉡$$

㉠, ㉡에 의하여

$$\tan(\alpha+\beta)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}$$
$$=\frac{-2}{1-(-1)}=-1$$

$0<\alpha<\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}<\beta<\pi$에서 $\frac{\pi}{2}<\alpha+\beta<\frac{3}{2}\pi$이므로

$\alpha+\beta=\frac{3}{4}\pi$

따라서 삼각함수의 덧셈정리에 의하여

$$\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta=\sin(\alpha+\beta)$$
$$=\sin\frac{3}{4}\pi$$
$$=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

23. ①

$$a=\frac{\sin3\theta}{\sin\theta}-\frac{\cos3\theta}{\cos\theta}=\frac{\sin3\theta\cos\theta-\cos3\theta\sin\theta}{\sin\theta\cos\theta}$$
$$=\frac{\sin2\theta}{\frac{1}{2}\sin2\theta}=2$$

따라서 $f(x)=x^2-2x-2=(x-1)^2-3$

24. ⑤

원 C 위의 점 P에서의 접선이 x축과 만나는 점을 Q라 하고,

그림과 같이 x축에 점 R 를 잡자.

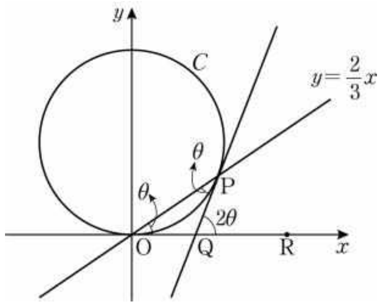
(단, 점 R 의 x좌표는 점 Q 의 x좌표보다 크다.)

점 Q에서 원 C에 그은 두 접선 OQ, PQ 에 대하여

$\overline{OQ}=\overline{PQ}$ 이므로

$\angle POQ=\theta$라 하면

$\angle POQ=\angle QPO=\theta$ 이고 $\angle PQR=2\theta$이다.



이때 $\tan\theta=\frac{2}{3}$ 이므로

원 C 위의 점 P에서의 접선PQ 의 기울기는

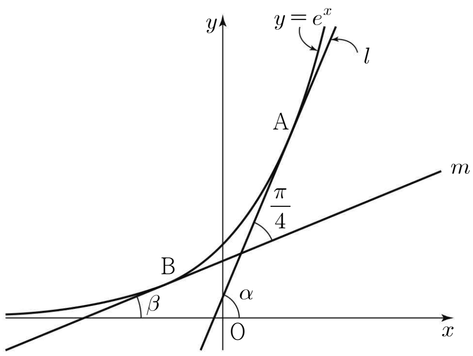
$$\tan2\theta=\frac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta}$$
$$=\frac{2\times\frac{2}{3}}{1-\left(\frac{2}{3}\right)^2}=\frac{12}{5}$$

25. ①

$y'=e^x$ 이므로 곡선 $y=e^x$ 위의

두 점 $A(t,e^t)$, $B(-t,e^{-t})$에서의

접선 l, m의 기울기는 각각 e^t, e^{-t}이다.



두 직선 l, m이 x축의 양의 방향과 이루는

각의 크기를 각각 α, β라 하면

$\tan\alpha=e^t$, $\tan\beta=e^{-t}$

$$\tan\frac{\pi}{4}=\tan(\alpha-\beta)$$
$$=\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}$$
$$=\frac{e^t-e^{-t}}{1+e^te^{-t}}=1$$

$e^t-e^{-t}=2$

$(e^t)^2-2e^t-1=0$

$e^t > 0$이므로 $e^t = 1+\sqrt{2}$

$\therefore\ t = \ln(1+\sqrt{2})$

따라서 직선 AB의 기울기는

$$\frac{e^t - e^{-t}}{t-(-t)} = \frac{1}{\ln(1+\sqrt{2})}$$

26. 8

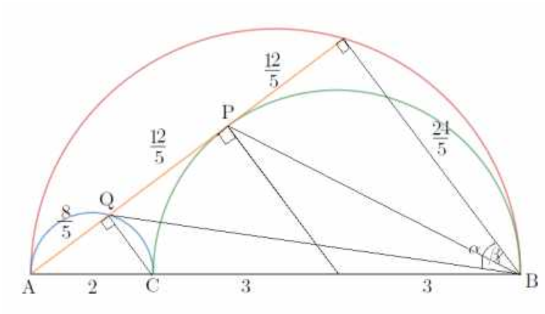
$\overline{\mathrm{ED}} = x$라 하면 $\overline{\mathrm{DE}} = 2x$가 된다. $\angle \mathrm{FBC} = \alpha$, $\angle \mathrm{EBA} = \beta$라 하면

$\tan\alpha = 1-x$, $\tan\beta = 1-\dfrac{x}{2}$가 되고 $\alpha+\beta = \dfrac{\pi}{4}$에서

$$1 = \tan(\alpha+\beta) = \frac{2-\dfrac{3x}{2}}{1-(1-x)\left(1-\dfrac{x}{2}\right)}$$

를 얻고 이를 풀면 $x = 3-\sqrt{5}$를 얻는다. 이를 이용하여 삼각형 EBF의 넓이를 구하면 $3\sqrt{5}-5$를 얻는다.

27. ④



$$\tan\theta = \tan(\alpha-\beta) = \frac{1-\dfrac{1}{2}}{1+1\times\dfrac{1}{2}} = \frac{1}{3}$$

28. ④

$\angle \mathrm{AFE} = \alpha$, $\angle \mathrm{BFE} = \beta$라 하자.

$\overline{\mathrm{AH}} = x$라 하면 $\tan\alpha = \dfrac{x}{4}$, $\tan\beta = \dfrac{x}{8}$

$$\tan\theta = \tan(\alpha+\beta) = \frac{\dfrac{3}{8}x}{1-\dfrac{x^2}{32}} = 3$$

정리하면 $x^2+4x-32=0$, $(x+8)(x-4)=0$, $x=4$

$\overline{\mathrm{AE}} = \sqrt{2^2+4^2} = 2\sqrt{5}$ $\quad\therefore\ \overline{\mathrm{AB}} = 2\overline{\mathrm{AE}} = 4\sqrt{5}$