백일대장

수능 역전을 위한 백일 전략서

14

정답 및 해설

100人대장

Day. 92

수학1, 수학2

92-1. ①

수직선 위를 움직이는 두 점 P, Q의
시각 $t\ (t \geq 0)$에서의 위치 x_1, x_2가

$x_1 = t^3 - \frac{1}{2}t^2 - 6t$, $x_2 = t^2 + 12t$이므로

미분을 통해 두 점 P, Q의 속도 v_1, v_2를 구하면

$v_1 = 3t^2 - t - 6$, $v_2 = 2t + 12$이다.

두 점 P, Q의 속도가 같아지는 순간은

$3t^2 - t - 6 = 2t + 12$

$3t^2 - 3t - 18 = 0$

$t^2 - t - 6 = 0$

$(t-3)(t+2) = 0$이므로

$t = 3$이다.

$t = 3$일 때 점 P, Q의 위치 x_1, x_2는

$x_1 = \frac{9}{2}$, $x_2 = 45$이므로

두 점 사이의 거리는 $\frac{81}{2}$이다.

92-2. 153

두 자연수 m, n에 대하여 $\sqrt[3]{3m} + \sqrt{n^3}$ 이 자연수이므로

$m = 3^{2+3a} \times b^{3c}$, $n = d^{2e}$ 꼴이어야한다.

범위를 만족하는 자연수 m의 최댓값은

$m = 3^2 \times 2^3 = 72$

범위를 만족하는 자연수 n의 최댓값은

$n = 9^2 = 81$이다.

따라서 $m+n$의 최댓값은 153이다.

92-3. ④

$a_1 = S_1$이므로

$a_1 = 2 - 1 + 2 = 3$이다.

$n \geq 2$일 때,

$a_n = S_n - S_{n-1} = 4n - 3$이므로

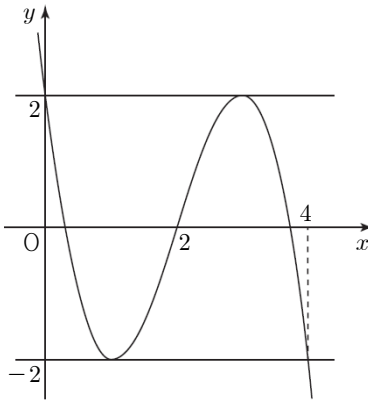
$\sum_{k=1}^{5} a_{2k-1} = a_1 + a_3 + a_5 + a_7 + a_9 = 3 + \frac{4(9+33)}{2} = 87$이다.

92-4. 110

조건 (가)에 의해 $f(1) = -2$, $f'(1) = 0$임을 알 수 있다.

조건 (나)에서 방정식 $f(x) = 2$의 서로 다른 실근의 개수는 2개

라고 했으므로 함수$f(x)$의 그래프의 개형은 다음과 같다.



따라서 함수 $f(x)$는
$f(x)=-(x-1)^2(x-4)-2$이다.
$f(-3)=-(-4)^2(-7)-2=110$이다.

92-5. 44

조건 (가)에서 $a^2 \neq a+2$에서 $a \neq -1$, $a \neq 2$이고
조건 (나)에서 $a^2-a+10=2a^2+a+2$이다.
이때 $a^2+2a-8=(a-2)(a+4)=0$에서
$a \neq 2$이므로 $a=-4$이다.
따라서 구하는 값은 $f(-6)+g(-2)=36+8=44$

92-6. ⑤

두 곡선이 점 $\left(\frac{m}{2},\ 1\right)$에 대하여 대칭이다.
또한 두 점 P, Q가 중심이 $(5,\ 1)$인 원 위에 있으므로
선분 PQ의 중점도 $\left(\frac{m}{2},\ 1\right)$이다.
따라서 $m=10$이다.
두 점 P, Q의 x좌표를 구하기 위해
$y=\log_{\frac{1}{a}}(m-x)+2$를
$y=\log_{\frac{1}{a}}(m-x)+2$꼴로 바꾸면
$\log_a x=\log_{\frac{1}{a}}(m-x)+2$이므로
$x=\frac{a^2}{m-x}$이다.
이때 $m=10$이고, $x^2-10x+a^2=0$이므로
이 이차방정식의 두 자연수인 근을 α, β라고 하면
$\alpha+\beta=10$ 이다.
두 자연수 α, β로 $(1,\ 9)$, $(2,\ 8)$, $(3,\ 7)$, $(4,\ 6)$이 가능한데,
두 근의 곱이 자연수의 완전제곱수(a^2)이므로
$(1,\ 9)$, $(2,\ 8)$이 가능하다.
최댓값 a를 가지는 순서쌍은 $(2,\ 8)$, $a=4$이다.
따라서 최댓값은 $m+a=10+4=14$

92-7. ③

$\overline{AD}=\overline{OD}=1$이고

$\overline{CD}=x$라 하자.

$\angle ADC=\theta$라 하면 $\angle ODC=\pi-\theta$

$\overline{OC}=2$이므로 코사인법칙에 의하여

$$\frac{x^2+1-2}{2x}=-\frac{x^2+1-4}{2x}$$

$x=\sqrt{2}$이고 $\cos\theta=\frac{\sqrt{2}}{4}$

점 O에서 선분 DF에 내린 수선의 발을 H라 하자.

$\angle ADC=\angle ODF$이므로

$\overline{OD}=1$, $\overline{DH}=\frac{\sqrt{2}}{4}$, $\overline{DF}=\frac{\sqrt{2}}{2}$

$\angle ODF=\alpha$라 하면

$$\cos\alpha=\frac{1+1-\frac{1}{2}}{2}=\frac{3}{4}$$

$\angle BOF=\pi-\alpha$이고

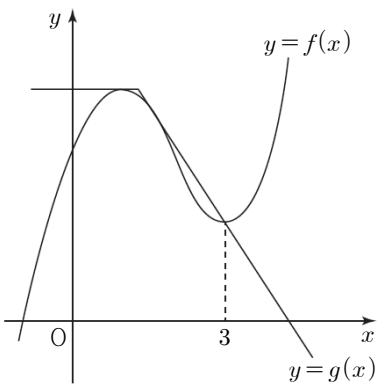
$$\overline{BF}=\sqrt{1+4-2\cdot1\cdot2\cdot\left(-\frac{3}{4}\right)}=2\sqrt{2}$$

또한 $\overline{EF}=\overline{CD}=\sqrt{2}$이므로

구하는 값은 $2\sqrt{2}\times\sqrt{2}=4$

92-8. 175

아래 그림이 함수 $g(x)$가 문제의 조건을 만족시키면서 $y=g(x)$, x축, y축으로 둘러싸인 넓이가 최소가 되는 경우이다.



$g(x)$의 상수부분은 $y=7$이고 일차함수 부분은

$\left(\frac{3}{2},\ f\left(\frac{3}{2}\right)\right)$에서 $y=f(x)$의 접선과 같으므로

$y=-\frac{9}{4}x+\frac{39}{4}$이다.

따라서 $t=\frac{11}{9}$이고 $y=g(x)$와 x축, y축으로 둘러싸인 영역은

사다리꼴로 넓이를 계산하면 $\frac{175}{9}$를 얻는다.

확률과 통계

92-9. 64

집합 X의 모든 원소 a에 대하여 $a+f(a)$는 4의 배수이므로
정의역의 각 원소가 공역의 어떤 원소와 대응될 수 있는지
살펴보면
$3,\ 7 \to 5,\ 9$
$4,\ 8 \to 4,\ 8$
$5,\ 9 \to 3,\ 7$
모든 원소가 경우의 수를 두가지씩 가지므로
함수 $f: X \to X$의 개수는
$2^6 = 64$이다.

92-10. ④

확률변수 X가 가질 수 있는 값은 0, 1, 2이고 각 값에 대한
확률을 각각 $a,\ b,\ \frac{1}{2}$이라 하자
확률의 합은 1이므로 $a+b=\frac{1}{2}$이고
$\mathrm{E}(\overline{X}) = \frac{7}{6}$를 이용하여
$a=\frac{1}{3},\ b=\frac{1}{6}$임을 알 수 있다.
표본 크기가 2인 표본쌍은 총 9개 이고 그 중 $\mathrm{P}(\overline{X}=0)$인
표본 쌍은 1개 이므로 $\mathrm{P}(\overline{X}>0)$의 값은
$\mathrm{P}(\overline{X}>0)$=전체$-\mathrm{P}(\overline{X}=0)=1-\frac{1}{9}=\frac{8}{9}$

92-11. 384

총 10개의 자리에 4명의 학생이 앉을 때, 서로 이웃하지 않게
앉는 경우를 구하기 위해 먼저 모든 경우의 수를 구한다. 10개
자리 중 서로 다른 4개를 선택하고, 여기에 4명을 배치하는 경우
중에서 학생들이 서로 이웃하지 않도록 앉는 경우만 세면 된다.
이웃의 정의는 옆자리(번호 차이 1) 또는 마주 보는 자리이며,
이 조건을 만족하지 않는 조합만 따지면,
$(a,\ b)$에서 $|a-b|=1$(옆자리),
$a=b+5,\ b=a+5$(마주보는 자리)를 제외해야 한다.
따라서 이웃하지 않는 4자리 조합은 총 16개가 존재한다.
각 조합마다 4명을 배치하는 경우의 수는 $4!=24$가지이므로,
$16\times 24=384$이다.

92-12. ④

자연수 1에서 5중에서 합이 4가 되는 정수쌍 $(f(1),\ f(3))$을
찾으면 $(1,\ 3),\ (2,\ 2),\ (3,\ 1)$ 총 세가지가 있다.
따라서 $f(2)=2$이고 $f(1),\ f(3)$의 값은 앞에서 찾은 값들 중
하나이고 $f(4),\ f(5)$는 공역 5개의 값 중 자유롭게 선택
가능하다.

이때 치역의 원소가 반드시 3개여야 하므로 경우의 수를 구해보면

i) $(f(1),\ f(3))=(1,\ 3)$

치역이 1, 2, 3으로 이미 3개이므로

$f(4), f(5)$ 값은 그 중에서 나와야 한다.

따라서 $3\times3=9$

9가지이다.

ii) $(f(1),\ f(3))=(2,\ 2)$

$f(4),\ f(5)$ 값은 서로 다른 두 개의 값이고

그 값이 2가 아니어야한다.

따라서 ${}_4C_2\times2!=12$

12가지이다.

iii) $(f(1),\ f(3))=(3,\ 1)$

i)상황과 같이

치역이 1, 2, 3으로 이미 3개이므로

$f(4),\ f(5)$ 값은 그 중에서 나와야 한다.

따라서 $3\times3=9$

9가지이다.

이때 전체 경우의 수는 75이고$(25+25+25=75)$

조건을 만족하는 경우의 수는 $9+12+9=25$이므로

$\frac{30}{75}=\frac{2}{5}$ 이다.

미적분

92-9. 18

(나) 조건에서

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} f(\sin 2x)(1-\cos 2x)dx$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{4}} f(\sin 2x)dx-\int_0^{\frac{\pi}{4}} f(\sin 2x)\cos 2x\,dx=8$$이다.

이때 $\int_0^{\frac{\pi}{4}} f(\sin 2x)\cos 2x\,dx$에서

$\sin 2x = 2k$로 치환하면

$\cos 2x\,dx = dk$

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} f(\sin 2x)\cos 2x\,dx = \int_0^{\frac{1}{2}} f(2k)\,dk$$

(가) 조건에서 $\int_0^{\frac{1}{2}} f(2x)dx=10$이었으므로

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} f(\sin 2x)dx-\int_0^{\frac{\pi}{4}} f(\sin 2x)\cos 2x\,dx$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{4}} f(\sin 2x)\,dx-10=8$$

$\int_0^{\frac{\pi}{4}} f(\sin 2x)dx$의 값은 18이다.

92-10. ②

$\lim_{n\to\infty}\{\sqrt{(an)^2+bn}-cn\}$ 에서 $c \le 0$ 이면

0 으로 수렴하거나 발산하므로 $c > 0$ 이어야 한다.

$$\lim_{n\to\infty}\{\sqrt{(an)^2+bn}-cn\}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{(\sqrt{a^2n^2+bn}-cn)(\sqrt{a^2n^2+bn}+cn)}{\sqrt{a^2n^2+bn}+cn}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{(a^2-c^2)n^2+bn}{\sqrt{(an)^2+bn}+cn}=\lim_{n\to\infty}\frac{(a^2-c^2)n+b}{\sqrt{a^2+\frac{b}{n}}+c} \quad \cdots\cdots \text{㉠}$$

이때 ㉠이 2 로 수렴하므로 $a^2-c^2=0$ 에서 $a=-c$ 또는 $a=c$

$\frac{b}{|a|+c}=\frac{b}{2c}=2$ 에서 $b=4c$ $\cdots\cdots$ ㉡

i) $a=-c$ 일 때, 25개

ii) $a=c$ 일 때, 25개

i), ii)로부터 순서쌍 $(a,\ b,\ c)$ 의 개수는 50이다.

92-11. 38

$f(-1)=f(2)=4$ 이므로

$f(t)=a(t+1)(t-2)+4$ 와 같이 둘 수 있다.

두 점 A, B에서의 곡선 C 의 접선은 각각

$y=\frac{f'(-1)}{4}(x+2)+4,\ y=\frac{f'(2)}{13}(x-10)+4$이다.

이 두 직선의 x절편이 같으므로 구해보면

$$\frac{-16}{f'(-1)}-2=\frac{-52}{f'(2)}+10$$

이때 $f'(-1)=-3a,\ f'(2)=3a$이므로

$$\frac{16}{3a}-2=\frac{-52}{3a}+10$$

$\frac{68}{3a}=12,\ a=\frac{17}{9}$이다.

따라서 $f(t)=\frac{17}{9}(t+1)(t-2)+4$이고

$f(5)=38$이다.

92-12. ④

$g(k)=k$이므로 $k=4k-3$에서 $k=1$을 얻는다.

$g'(g(k))g'(k)=4$이므로 $g'(1)=-2$를 얻는다.

따라서 $f(1)=1$이고 $f'(1)=-2$이고

$f(x)=-(x-1)^3+a(x-1)^2-2(x-1)+1$이라 쓸 수 있다.

한편, $x<k$이면 $g(x)>k$이고 $g(x)=t$라 하면

$g(t)=4g^{-1}(t)-3\ (t>k)$

를 얻는다.

따라서 $x<k$에서 $g'(x)=\frac{4}{g'(g^{-1}(x))}$ 이고 $g'(g^{-1}(x))$의

최댓값은 $-\frac{2}{3}$이다.

즉, $x>k$에서 $g'(x)$의 최댓값은 $-\frac{2}{3}$이다.

$x > k$에서

$g'(x) = -3(x-1)^2 + 2a(x-1) - 2$

$= -3\left(x-1-\frac{a}{3}\right)^2 + \frac{a^2}{3} - 2$에서

$a > 0$이고 $\frac{a^2}{3} - 2 = -\frac{2}{3}$이므로 $a = 2$를 얻는다.

따라서 $f(x) = -(x-1)^3 + 2(x-1)^2 - 2(x-1) + 1$이다.

한편 $k = 1$이므로 $g'(3) = f'(3) = -6$이고 $f(2) = 0$이므로

$g'(g(2))g'(2) = 4$에서 $g'(0) = \frac{4}{g'(2)} = \frac{4}{f'(2)} = -4$이다.

Day. 93

수학1, 수학2

93-1. ④

$f'(x) = 3x^2 + 2ax + 8$ 에서

함수 $f(x)$가 구간 $(-\infty, \infty)$에서 증가하려면

모든 실수 x에 대하여 $f'(x) \geq 0$이어야 하므로

방정식 $f'(x) = 0$의 판별식을 D라 할 때,

$D/4 = a^2 - 24 \leq 0$이고

이를 만족시키는 자연수 a는 1, 2, 3, 4이므로

개수는 4이다.

93-2. ④

점 A, B, C, D의 좌표를 구해보면

$\mathrm{A} = \frac{\pi}{3a}$, $\mathrm{B} = \frac{2\pi}{3a}$, $\mathrm{C} = \frac{4\pi}{3a}$, $\mathrm{D} = \frac{5\pi}{3a}$이다.

$\overline{\mathrm{BC}} = \frac{2}{3a}\pi = \pi$ 이므로 $a = \frac{2}{3}$이다.

$\overline{\mathrm{AD}} = \frac{4\pi}{3a} = 2\overline{\mathrm{BC}} = 2\pi$이므로

$a \times \overline{\mathrm{AD}} = \frac{4}{3}\pi$이다.

93-3. ②

곡선 $y = f(x)$이 점 $(2, 5)$를 지나므로

$f(2) = 5$이다.

곡선 $y = f(x)$위의 점 $(2, 5)$에서의 접선은

$y = f'(2)(x-2) + 5$이다.

이 직선을 y축에 대해 대칭시키면

곡선 $y = f(x)$와 점 $(3, 0)$에서 접하므로

$f(3) = 0$이고

$0 = f'(2)(-3-2) + 5$, $f'(2) = 1$

$f'(3) = -f'(2) = -1$이다.

따라서 곡선 $y=f(x)$는

$f(x)=10(x-2)(x-3)\left(x-\frac{13}{5}\right)-5x+15$이다.

$f(4)=23$

93-4. ③

${a_{15}}^2-{a_3}^2={a_9}^2-{a_5}^2$

$(a_{15}-a_3)(a_{15}+a_3)=(a_9-a_5)(a_9+a_5)$

수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공차를 d라 하자.

$12d(a_{15}+a_3)=4d(a_9+a_5)$

$3a_9=a_7$

$3(a+8d)=a+6d$에서

$a=-9d$

$\sum_{n=1}^{10}a_n=-45d=270,\ d=-6$

따라서 $k=5$이다.

93-5. 50

조건 (가)에서 함수 $f(x)$는

$f(x)=(x-k)^2(x-1)$ 와 같이 나타 낼 수 있다.

조건 (나)에 의해 $k<0$이고

조건 (다)에서 $f'(a)=f'(b)$와 $(a+b)^2=4$를 만족시키는

서로 다른 두 실수 a, b가 존재한다 하였으므로

$f'(x)$를 구하면

$f'(x)=(x-k)^2+2(x-k)(x-1)$

$=3x^2-(4k+2)x+k^2+2k$이다.

$f'(a)-f'(b)=0$에서 $a+b=\frac{4k+2}{3}$

$(a+b)^2=4$이고 $k<0$이므로

$a+b=\frac{4k+2}{3}=-2,\ k=-2$이다.

$f(x)=(x+2)^2(x-1)$

$f(3)=50$ 이다.

93-6. ②

두 점 A(1, 0), B(7, 0)라 할 수 있고

점 C에서 x축에 내린 수선의 발을 D라 하면

두 점 C, D의 x좌표는 4이다.

$\overline{AC}=\overline{BC}=x$라 하면

$\cos\theta=\frac{2x^2-36}{2x^2}=-\frac{1}{8}$에서

$x=4$

따라서 $\overline{CD}=\sqrt{7}$이므로

$\log_a 4=\sqrt{7}$

$2\log_a 2=\sqrt{7}$이므로 $\log_a 2=\frac{\sqrt{7}}{2}$

93-7. 20

(가)에서 $\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)-x^3}{3x^2}=-3$이므로

$f(x)=x^3-9x^2+ax+b$로 둘 수 있다.

(나)에서 $\lim_{t\to k-}g(t)\neq\lim_{t\to k+}g(t)$을 만족시키는

k값은 $f'(k)=0$를 만족시켜야 한다.

모든 실수 k의 값의 곱이 8이라 하였고

$f'(x)=3x^2-18x+a$이므로

$\frac{a}{3}=8$, $a=24$임을 알 수 있다.

(다)에서 $g(5)=1$이므로 $f(1)=16$이다.

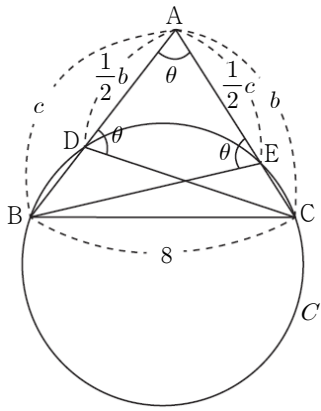
따라서 $b=0$

$f(x)=x^3-9x^2+24x$이다.

$f(2)=20$

93-8. ②

원 C의 반지름 길이가 삼각형 ABC의 외접원의 반지름 길이와 같으므로 $\sin\angle BDC=\sin\angle CEB=\sin A$이고 $\angle A=\theta$라 하면 아래 그림과 같이 삼각형 BAE와 CAD는 밑각이 θ인 이등변삼각형이 된다.



$\cos\theta=\frac{1}{4}$이므로 $\overline{AB}=c$, $\overline{AC}=b$라 하면

$\overline{AD}=\frac{1}{2}b$, $\overline{AE}=\frac{1}{2}c$이므로

$\overline{BD}=c-\frac{1}{2}b$, $\overline{CE}=b-\frac{1}{2}c$이다.

$c-\frac{1}{2}b:b-\frac{1}{2}c=8:5$이므로 $b:c=6:7$를 얻는다.

$b=6k$, $c=7k$라 하고 삼각형 ABC에서 코사인법칙을 적용하면

$64=49k^2+36k^2-2\times7k\times6k\times\frac{1}{4}=64k^2$에서 $k=1$을 얻고

따라서 $b=6$, $c=7$을 얻는다.

삼각형 ABC의 넓이는 $\frac{1}{2}\times7\times6\times\frac{\sqrt{15}}{4}=\frac{21}{4}\sqrt{15}$이다.

확률과 통계

93-9. ②

$1-\frac{2^4}{3^4}=\frac{65}{81}$

93-10. 25

신뢰구간의 길이

$b-a=2\times z\times\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ 에서

신뢰수준은 99%이므로 z값이 2.6

$\sigma=20,\ n=100$ 이다.

이때 새 표본크기 n에서 신뢰구간의 길이는

$d-c=2\times2.6\times\frac{20}{\sqrt{n}}$ 이므로

문제에서 $b-a\geq\frac{1}{2}(d-c)$에 대입해보면

$2\times2.6\times2\geq\frac{1}{2}\times2\times2.6\times\frac{20}{\sqrt{n}}$

$\sqrt{n}\geq5$이므로

따라서 $n\geq25$이다.

93-11. ⑤

경우의 수를 나누어서 풀어보면

i) $f(1)=f(3)=f(5):5\times4^2=80$

ii) $f(1)<f(3)=f(5):{}_5C_2\times(5^2-1)=240$

iii) $f(1)=f(3)<f(5)$: 2와 동일

iv) $f(1)<f(3)<f(5)$: ${}_5C_3\times5^2=250$

이므로 함수$f:X\to X$의 모든 개수는

$80+240+240+250=810$이다.

93-12. ④

1이 적힌 공을 뽑는 경우 2개의 공을 동시에 뽑으므로

그 중 하나는 6이고 나머지 한 개는 6보다 작은 수여야 한다.

따라서 확률을 구해보면 $\frac{1}{7}\times\frac{{}_4C_1}{{}_6C_2}$ 이다.

같은 방식으로

3가 적힌 공을 뽑는 경우 : $\frac{1}{7}\times\frac{{}_4C_1}{{}_6C_2}$

5이 적힌 공을 뽑는 경우 : $\frac{1}{7}\times\frac{{}_4C_1}{{}_6C_2}$

7가 적힌 공을 뽑는 경우에는 2개의 공을 동시에 뽑을 때 모든

수가 6보다 작으므로 확률을 구해보면 $\frac{1}{7}\times\frac{{}_5C_1}{{}_6C_2}$ 이다.

2가 적힌 공을 뽑는 경우에는 3개의 공을 동시에 뽑으므로

그 중 하나는 6이고 나머지 두 개는 6보다 작은 수여야 한다.

따라서 확률을 구해보면 $\frac{1}{7}\times\frac{{}_4C_2}{{}_6C_3}$ 이다.

같은 방식으로

4이 적힌 공을 뽑는 경우 : $\frac{1}{7}\times\frac{{}_4C_2}{{}_6C_3}$

위에서 구한 모든 확률을 더하면 $\frac{26}{105}$ 이다.

미적분

93-9. ⑤

$\frac{2^{n+k}-1}{2^n}<\frac{a_n}{2^n}<\frac{2^{n+k}+1}{2^n}$ 이므로

$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{2^n}=2^k$ 이다.

$\lim_{n\to\infty}\frac{(a_n)^2+2(a_n)+1}{4^{n+1}}=\frac{4^k}{4}=25$

$4^k=100$ 이므로

따라서 $k=\log_2 10$ 이다.

93-10. ②

곡선 $y=g(x)$ 위의 점 $(5e^2,\ g(5e^2))$ 에서의 접선은

$y=g'(5e^2)(x-5e^2)+g(5e^2)$ 이다.

이 직선의 y절편은

$-5e^2g'(5e^2)+g(5e^2)$ 이다.

이때 $g'(x)=\frac{f(x)}{\{f(x)+1\}^2}$ 이고

$f(5e^2)=2$ 이므로

$g'(5e^2)=\frac{f(5e^2)}{\{f(5e^2)+1\}^2}=\frac{2}{9}$ 이다.

함수 $f(x)$ 가 함수 $y=(x^2+1)e^x$ 의 역함수이므로

$x=(f(x)^2+1)e^{f(x)}$ 이다.

양변을 미분하면

$1=(2f(x)f'(x))e^{f(x)}+(f(x)^2+1)e^{f(x)}f'(x)$ 이므로

정리하면

$1=e^{f(x)}f'(x)(f(x)^2+2f(x)+1)$

$f'(x)=\frac{1}{e^{f(x)}(f(x)+1)^2}$ 이다.

이때 $g'(x)=\frac{f(x)}{\{f(x)+1\}^2}$ 이므로

$g'(x)=f(x)e^{f(x)}f'(x)$ 이다.

이 $g'(x)$를 $u=f(t)$, $du=f'(t)\,dt$로 치환적분을 해주면

$g(x)=\int_{f(1)}^{f(x)}ue^u du$ 이므로

$g(5e^2)=\int_{f(1)}^{f(5e^2)} ue^u du=\int_0^2 ue^u du=e^2+1$이다.

따라서 y절편 $-5e^2g'(5e^2)+g(5e^2)$은

$1-\frac{1}{9}e^2$ 이다.

93-11. ①

점 O를 좌표평면의 원점이 되도록 사분원 OAB를 좌표평면 위에 올려놓으면 점 Q의 좌표는 $(2\cos\theta,\ 2\sin\theta)$가 된다.

점 R의 좌표를 $(0,\ r)$로 놓으면 $\overline{PR}=\overline{QR}$에서

$4\cos^2\theta+(2\sin\theta-r)^2=3+r^2$이고 이를 정리하면

$r=\frac{1}{4\sin\theta}$임을 알 수 있다.

따라서 $f(\theta)=\frac{|\sqrt{3}-2\cos\theta|}{8\sin\theta}$ 이고

$\theta=\frac{\pi}{6}$일 때, 함수 $f(\theta)$는 미분가능하지 않다.

$\frac{\pi}{6}<\theta<\frac{\pi}{2}$일 때 $f(\theta)=\frac{\sqrt{3}-2\cos\theta}{8\sin\theta}$이므로

$\lim_{h\to0+}\frac{f\left(\frac{\pi}{6}+h\right)-f\left(\frac{\pi}{6}\right)}{h}=\frac{1}{4}$이다.

93-12. ②

$-k\le k\sin\pi x\le k$이고, 조건 (가)에서 $\alpha=\frac{\sqrt{2a}}{2}$, $\beta=\sqrt{a}$

함수 $f(x)$가 우함수이므로, $k\ge\alpha$일 때,

극솟값은 $f(x)$의 극솟값과 동일하다.

$f(x)$의 극솟값은 $f\left(\sqrt{\frac{a}{2}}\right)=-\frac{a^2}{4}=-16$이므로

$a=8$이다.

$f(x)=x^4-8x^2$, $\alpha=2$, $\beta=2\sqrt{2}$

Day. 94

수학1, 수학2

94-1. 68

$\sum_{k=1}^{n}(a_k-a_{k+1})$

$=(a_1-a_2)+(a_2-a_3)+(a_3-a_4)+\cdots+(a_n-a_{n+1})$

$=a_1+(-a_2+a_2)+(-a_3+a_3)+(-a_4+a_4)+\cdots$

$\quad+(-a_n+a_n)-a_{n+1}$

$=a_1-a_{n+1}$ 이다.

이때 $a_1=2,\ \sum_{k=1}^{n}(a_k-a_{k+1})=6-2n^2$이므로

$2-a_{n+1}=6-2n^2$

따라서 $a_7=2\times6^2-4=68$이다.

94-2. ④

$$f(t)=\lim_{x\to t}\frac{x^3-tx^2+4ax-4at}{x^2-t^2}$$

$$=\lim_{x\to t}\frac{(x^2+4a)(x-t)}{(x-t)(x+t)}$$

$$=\frac{t^2+4a}{2t}=\frac{t}{2}+\frac{2a}{t}$$ 이므로

$$\frac{t}{2}+\frac{2a}{t}\geq 2\sqrt{\frac{t}{2}\cdot\frac{2a}{t}}=2\sqrt{a}=4$$

에서 $a=4$이다. (단, 등호는 $t=4$일 때, 성립한다.)

94-3. 45

$$\int_{-1}^{x}\left\{\frac{d}{dt}f(t)\right\}dt=x^3+ax^2-2$$에서

$x=-1$을 대입하면

$$\int_{-1}^{-1}\left\{\frac{d}{dt}f(t)\right\}dt=-1+a-2=0$$이므로

$a=3$이다.

$f'(a)$를 구하기 위해

$$\int_{-1}^{x}\left\{\frac{d}{dt}f(t)\right\}dt=x^3+3x^2-2$$을 미분하면

$\frac{d}{dx}f(x)=f'(x)=3x^2+6x$이다.

따라서 $f'(a)=f'(3)=45$이다.

94-4. 48

i) $x<0$일 때

두 함수 $f(x)=|x|,\ g(x)=16-\frac{m}{|x|}$의

교점의 x좌표를 구하면

$-x=16-\frac{m}{-x}$

$-x^2=16x+m$

$x^2+16x+m=0$의 두 근 $-8\pm\sqrt{64-m}$이다.

ii) $x\geq0$일 때

두 함수 $f(x)=|x|,\ g(x)=16-\frac{m}{|x|}$의

교점의 x좌표를 구하면

$x=16-\frac{m}{x}$

$x^2=16x-m$

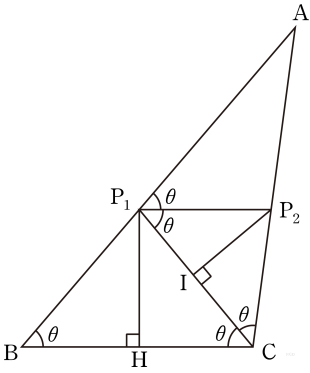
$x^2-16x+m=0$의 두 근 $8\pm\sqrt{64-m}$이다.

이때 근들이 모두 순서대로 등차수열을 이루므로

$\sqrt{64-m}=4$이다.

따라서 $m=48$이다.

94-5. 89



$\overline{BC}=4$ 이고 삼각형 P_1BC는 이등변삼각형이므로 $\overline{BH}=2$이고

$\cos\theta=\frac{2}{3}$ 이므로 $\overline{BP_1}=\overline{P_1C}=3$이다.

같은 방식으로 삼각형 P_2P_1C에서

$\overline{P_1P_2}=\overline{P_2C}=\frac{9}{4}$이다.

이때 삼각형 ABC와 삼각형 AP_1P_2가 닮음이므로 (AA닮음)

$\overline{AP_2}:\overline{P_1P_2}=\overline{AC}:\overline{BC}$이다.

$\overline{AP_2}$를 x라 하면

$x:\frac{9}{4}=\left(x+\frac{9}{4}\right):4$

$\frac{9}{4}x+\frac{81}{16}=4x$

따라서 $x=\frac{81}{28}$, $\overline{AC}=\frac{9}{4}+x=\frac{36}{7}$ 이다.

삼각형 ABC에서 각 B와 $\overline{AC}$로 사인법칙을 쓰면

$$2R=\frac{\frac{36}{7}}{\frac{\sqrt{5}}{3}}=\frac{108}{35}\sqrt{5}$$

$R=\frac{54}{35}\sqrt{5}$이다.

94-6. ⑤

등차수열 $\{a_n\}$의 공차를 d라 하면

조건 (가)에 의해 $n=1,\ 2,\ 3$에 대하여

$f(a_n)=a_n+d$이므로

방정식 $f(x)=x+d$는 서로 다른 세 실근 $a_1,\ a_2,\ a_3$를 갖고

따라서 $f(x)=(x-a_1)(x-a_2)(x-a_3)+x+d$라 쓸 수 있다.

조건 (나)에서 $-8=f'(a_2)=-d^2+1$이고

조건 (다)에서 $201=f(a_4)=6d^3+a_4+d$이므로

$d=3,\ a_4=36$을 얻는다.

따라서 구하려는 값은 $a_{10}=36+6\times3=54$이다.

94-7. ④

두 곡선 $y=2^x$, $y=10-2^{4-x}$의 교점 A와 B를
구하기 위해 두 식을 연립하면

$2^x=10-2^{4-x}$

$(2^x)^2-10(2^x)+16=0$

$(2^x-8)(2^x-2)=0$이므로

점 A는 $(1,\ 2)$이고 점 B는 $(3,\ 8)$이다.

따라서 $\overline{\mathrm{AP}}=k-\frac{1}{2}-2=k-\frac{5}{2}$, $\overline{\mathrm{BQ}}=8-k+\frac{1}{8}=\frac{65}{8}-k$

$\overline{\mathrm{AP}}=2\overline{\mathrm{BQ}}$ 이므로

$k-\frac{5}{2}=2\left(\frac{65}{8}-k\right)=\frac{65}{4}-2k$

$3k=\frac{75}{4}$, $k=\frac{25}{4}$이다.

사각형 APBQ는 사다리꼴이므로 넓이 S를 구하면

$\mathrm{S}=\left(\frac{15}{4}+\frac{15}{8}\right)\times 2\times\frac{1}{2}=\frac{45}{8}$이다.

따라서 $k+S=\frac{95}{8}$이다.

94-8. ②

조건 (가)에서

$\int_0^x f(t)dt=x(x-1)(x-k)$로 둘 수 있다.

$g'(x)=\begin{cases}(x-1)(4x^2-3kx-2x+k) & (x>1)\\ -(x-1)(4x^2-3kx-2x+k) & (x<1)\end{cases}$

조건 (나)에서 이차방정식

$4x^2-3kx-2x+k=0$ … ㉠

의 해가 α, β인 것을 알 수 있다.

이때 이차방정식 ㉠의 근과 계수의 관계에 의하여 $\alpha\beta=1$,

$\therefore\ k=4$

$\int_0^x f(t)dt=x(x-1)(x-4)$

의 양변을 미분하면

$f(x)=(2x-1)(x-4)+(x^2-x)$

$g(5)=|5-1|\times(5\cdot 4\cdot 1)=80$

(이차방정식 ㉠의 한 근이 1일 때, 함수 $g(x)$가 $x=\frac{1}{4}$,

$x=1$에서 극값을 가지므로 모순이다.)

확률과 통계

94-9. ③

두 빨간 구슬 사이에는 구슬이 없거나 파란 구슬만이 들어갈 수 있다.

빨간 구슬 사이의 파란 구슬의 개수가

0인 경우 노란 구슬 3개와 파란 구슬 3개를 나열하는 경우의 수이므로 $\frac{6!}{3!3!}=20$

1인 경우 노란 구슬 3개와 파란 구슬 2개를 나열하는 경우의 수이므로 $\frac{5!}{2!3!}=10$

2인 경우 노란 구슬 3개와 파란 구슬 1개를 나열하는 경우의 수이므로 $\frac{4!}{3!}=4$

3인 경우 노란 구슬 3개와 나열하는 경우의 수이므로 1

따라서 모든 경우의 수는

$20+10+4+1=35$

94-10. ①

신뢰구간의 양쪽 끝이 0.7%이므로 신뢰구간은

$b-a=2\times z\times\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$

이때 Z값이 98.6%이므로 표에 따라 $z=2.45$이다.

또한 표본크기 $n=100$이므로

$b-a=2\times2.45\times\frac{\sigma}{\sqrt{100}}=4.9\times\frac{\sigma}{10}$ 이다.

문제에서 주어진 식

$\mathrm{P}\left(\overline{X}\geq m-\frac{(b-a)\sqrt{n}}{35}\right)$에서 $n=100$이므로

$\mathrm{P}\left(\overline{X}\geq m-\frac{(b-a)\sqrt{n}}{35}\right)=\mathrm{P}\left(\overline{X}\geq m-\frac{4.9\sigma}{35}\right)$이다.

주어진 확률은

$\mathrm{P}\left(\frac{\overline{X}-m}{\frac{\sigma}{10}}\geq-\frac{4.9\sigma}{35}\times\frac{10}{\sigma}\right)=\mathrm{P}(Z\geq-1.4)$이다.

표준정규분표에 따라

$\mathrm{P}(Z\geq-1.4)=0.9192$이다.

94-11. ④

동전을 네 번 던졌을 때, 앞면이 2번 나올 확률은

${}_4\mathrm{C}_2\times\left(\frac{1}{2}\right)^4=\frac{3}{8}$ 이고

동전을 두 번 던졌을 때, 앞면이 2번 나올 확률은 $\frac{1}{4}$이다.

$n=1$일 때 약수가 하나이다.

$\frac{1}{6}\times\frac{3}{8}+\frac{5}{6}\times\frac{1}{4}\neq\frac{7}{24}$

$n=2$일 때 약수가 두 개이다.

$\frac{2}{6}\times\frac{3}{8}+\frac{4}{6}\times\frac{1}{4}=\frac{7}{24}$

약수가 두 개인 경우에만 조건을 만족한다.

따라서 $n=2,\ 3,\ 5,\ 9$

답은 19이다.

94-12. 66

조건 (가)를 만족하는 순서쌍 $(a,\ b,\ c,\ d)$의 개수는

${}_4H_6={}_9C_3=84$이다.

i) $a+b+c+d=6,\ ab>0$인 경우의 수는 ${}_4H_4={}_7C_3=35$

ii) $a+b+c+d=6,\ ab=0$인 경우의 수는 $84-35=49$

iii) $a+b+c+d=6,\ ab>0,\ c=1$인 경우의 수는

${}_3H_3={}_5C_2=10$

iv) $a+b+c+d=6,\ ab>0,\ c=d=1$인 경우의 수는

${}_2H_2={}_3C_1=3$ 이다.

따라서 구하는 경우의 수는 $49+2\times10-3=66$이다.

미적분

94-9. ③

$\lim_{x\to0}\frac{f(x+\cos x)-f(3)}{x^2-2x}=2$에서

$\lim_{x\to0}(x^2-2x)=0$이므로 $\lim_{x\to0}\{f(x+\cos x)-f(3)\}=0$

따라서 $f(1)=f(3)$이고

$f(x+\cos x)=g(x)$라 하면

$\lim_{x\to0}\frac{g(x)-g(0)}{x^2-2x}=-\frac{1}{2}g'(0)=2$에서 $g'(0)=-4$

$g'(x)=(1-\sin x)f'(x+\cos x)$이므로

$g'(0)=f'(1)=-4$

$f(x)=2(x-1)(x-3)+c$

$f(4)-f(1)=2\times3\times1=6$

94-10. ①

조건 (가)에 의하여 함수 $f'(x)$는 $(0,\ -1)$ 대칭이고

$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\{f''(x)+f(x)+x+1\}\cos x\,dx=\pi$ 에서

우함수인 $\cos x$ 와의 곱이 값을 가지므로

$f\left(\frac{\pi}{2}\right)-f\left(-\frac{\pi}{2}\right)=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}f'(x)dx=-\pi\ \cdots$ ㉠

(나)에서

$\frac{d}{dx}(f'(x)\cos x+(f(x)+x+1)\sin x)$

$=\{f''(x)+f(x)+1\}\cos x+\sin x$

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} [\{f''(x)+f(x)+x+1\}\cos x+\sin x\,]dx=\pi$$

에서

$$\left[f'(x)\cos x+(f(x)+x+1)\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}$$

$$=f\left(\frac{\pi}{2}\right)+f\left(-\frac{\pi}{2}\right)+2=\pi$$

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right)+f\left(-\frac{\pi}{2}\right)=\pi-2 \cdots ㉡$$

㉠, ㉡에 의하여 $f\left(\frac{\pi}{2}\right)=-1$

94-11. ③

$h(x)=e^{f(x)}-8$이라 하면

$h'(x)=f'(x)e^{f(x)}$이므로 $f'(x)=0$일 때, $h'(x)=0$이다.

그런데 조건 (가)에서 $x=\frac{3}{2}$에서 $f(x)$가 자연수인 최댓값을 가지고,

$h\left(\frac{3}{2}\right)\neq 0$이므로, $e^{f(x)}-8\neq 0$에서

$f(x)<3$이고 $e^{f(x)}-8<0$

따라서 $g(x)=-e^{f(x)}+8$이다.

조건 (나)에서 $g(1)=7$에서

$e^{f(1)}=1$이고 $f(1)=0$

따라서 $f(x)=a(x-1)(x-2)$로 둘 수 있고

$f'(1)=-a$

$f\left(\frac{3}{2}\right)=-\frac{a}{4}$에서 $-\frac{a}{4}=2$일 때, $-a$는 최댓값 8을 갖는다.

94-12. ②

$$f'(x)=(\cos x-\sin x)e^{-kx}+(-k)(\sin x+\cos x)e^{-kx}$$
$$=\{(1-k)\cos x-(1+k)\sin x\}e^{-kx}$$

$\tan x=\frac{1-k}{1+k}$일 때, 함수 $f(x)$가 극대 또는 극소이다.

$\frac{1-k}{1+k}<0$이므로

함수 $f(x)$가 극대 또는 극소가 되는 x를 α라 하면

$\tan\alpha=\frac{1-k}{1+k}$

$\sin^2\alpha(1+k)^2=\cos^2\alpha(1-k)^2$

$\sin^2\alpha(1+k)^2=(1-\sin^2\alpha)(1-k)^2$

$\sin^2\alpha(2+2k^2)=(1-k)^2$

$\sin\alpha=\pm\frac{1-k}{\sqrt{2+2k^2}}$, $\cos\alpha=\pm\frac{1+k}{\sqrt{2+2k^2}}$

이때 $\tan\alpha<0$에서

$2m\pi+\frac{\pi}{2}<x<2m\pi+\pi$ (m은 정수)일 때,

$\sin\alpha=\dfrac{k-1}{\sqrt{2+2k^2}}$, $\cos\alpha=\dfrac{-k-1}{\sqrt{2+2k^2}}$

$f(\alpha)=\left(-\dfrac{2}{\sqrt{2+2k^2}}\right)e^{-k\alpha}$

$(2m+1)\pi+\dfrac{3\pi}{2}<x<(2m+1)\pi+2\pi$ (m은 정수)일 때,

$\sin\alpha=\dfrac{-k+1}{\sqrt{2+2k^2}}$, $\cos\alpha=\dfrac{k+1}{\sqrt{2+2k^2}}$

$f(\alpha)=\left(\dfrac{2}{\sqrt{2+2k^2}}\right)e^{-k\alpha}$

$f(\alpha_1)=\left(-\dfrac{2}{\sqrt{2+2k^2}}\right)e^{-k\alpha_1}$에서

$f(\alpha_1)e^{\alpha_1 k}=-\dfrac{2}{\sqrt{2+2k^2}}=-\dfrac{\sqrt{5}}{5}$

$k=3$ 이다.

$f(\alpha_1)=-\dfrac{\sqrt{5}}{5}e^{-3\alpha_1}$

$f(\alpha_2)=\dfrac{\sqrt{5}}{5}e^{-3(\alpha_1+\pi)}=\dfrac{\sqrt{5}}{5}e^{-3\alpha_1}\cdot e^{-3\pi}$

$\dfrac{f(\alpha_2)}{f(\alpha_1)}=-e^{-3\pi}$

$f(\alpha_3)=-\dfrac{\sqrt{5}}{5}e^{-3(\alpha_1+2\pi)}=-\dfrac{\sqrt{5}}{5}e^{-3\alpha_1}\cdot e^{-6\pi}$

$\dfrac{f(\alpha_3)}{f(\alpha_1)}=e^{-6\pi}$

$\vdots$

$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{f(\alpha_n)}{f(\alpha_1)}=\frac{1}{1+e^{-3\pi}}=\frac{e^{3\pi}}{1+e^{3\pi}}$

Day. 95

수학1, 수학2

95-1. 12

$\cos\dfrac{14}{5}\pi=-\sin\dfrac{3}{10}\pi=\sin\dfrac{13}{10}\pi$

$\alpha=\dfrac{13}{10}$, $\beta=\dfrac{17}{10}$이다.

이때 $\beta-\alpha=\dfrac{2}{5}$, $\beta+\alpha=3$이므로

$10\times(\beta^2-\alpha^2)=10\times(\beta-\alpha)(\beta+\alpha)=10\times\dfrac{6}{5}=12$이다.

95-2. 6

$t=0$에서 $t=a$까지 점 P가 움직인 거리가 20이므로

$\int_0^a |v(t)|\,dt = 20$이다.

$\int_0^2 (-2t+4)\,dt + \int_2^a (2t-4)\,dt$

$= 4 + \int_2^a (2t-4)\,dt = 20$

이므로

$\int_2^a (2t-4)\,dt = a^2-4a+4 = 16$

$a = 6$이다.

95-3. 80

점 A의 좌표는 $A(\cos\theta_1,\ \sin\theta_1)$이고 점 B의 좌표는

$B\left(\frac{1}{\cos\theta_1},\ 0\right)$이다.

또한 $\overline{AB} = \tan\theta_1$이고 $\tan\theta_2 = \frac{\overline{AC}}{\overline{AB}} = \frac{1}{2}$이므로

$$\frac{\frac{1}{\cos\theta_1}-1}{\tan\theta_1} = \frac{1}{2}$$

이고 이 방정식을 풀면 $\tan\theta_1 = \frac{4}{3}$이다.

따라서 구하는 값은 $60\tan\theta_1 = 80$이다.

95-4. ①

수열 a_n은 첫째항이 9이고 공차가 3인 등차수열이다.

따라서 $a_n = 3n+6$이다.

수열 b_n은 첫째항이 1이고 공비가 $\sqrt{3}$인 등비수열이다.

따라서 $b_n = (\sqrt{3})^{n-1}$이다.

$a_k = b_9$ 에서

$3k+6 = 81$이므로

$k = 25$이다.

95-5. ③

$f(x)$가 $x=0$에서 극대이고 $(2,\ 0)$에서 x축에 접하므로

$f(x) = (x+1)(x-2)^2$이다.

이때 $A-B = \int_0^2 \left\{f(x) - \left(-\frac{k}{2}x+k\right)\right\}dx = 4-k$

$4-k = \frac{3}{4}$이므로

$k = \frac{13}{4}$이다.

95-6. ②

등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공차를 d라 하자.

조건 (가)에 의하여

$a_4 < 0,\ a_5 > 0$임을 알 수 있고,

$a<0,\ d>0$이다.

또한, $\sum_{k=1}^{3}a_k<\sum_{k=1}^{5}a_k$에서 $a_4+a_5>0$

임을 알 수 있다.

$$\sum_{k=1}^{7}|a_k|=-(a_1+a_2+a_3+a_4)+a_5+a_6+a_7$$

$$=-a+9d$$

$30<-a+9d<40$

이고 $a_4<0,\ a_5>0,\ a_4+a_5>0,\ a$가 음의 정수,

d가 양의 정수인 경우는

$a=-10,\ d=3$인 경우이다.

따라서 $a_{10}=-10+9\cdot 3=17$

95-7. 14

$x<0$에서 $f(x)=t$가 서로 다른 실근의 개수가 2인 실수 t의 범위는 $0<t<8$이다.

이때 조건에서 x에 대한 방정식 $f(x)=t$가 서로 다른 실근의 개수가 2인 실수 t의 범위가 $0<t<2$라 하였으므로

$x\geq 0$에서 $f(x)$의 함숫값이 2 이상 8 미만이어야 한다.

따라서 $b=8$이고 $3^a-8=-2$이어야 하므로 $3^a=6$이다.

$3^a+b=14$이다.

95-8. 5

점 P의 x좌표는 x에 대한 이차방정식

$x^2=-x+a,\ x^2+x-a=0$의 양의 실근이다.

즉, $\frac{-1+\sqrt{4a+1}}{2}$ 이고 이를 k라 하자.

곡선 $y=x^2$ 위의 점 P에서의 접선의 방정식은

$y=2k(x-k)+k^2$

$y=2kx-k^2$

이고 이 접선의 x절편은 $\frac{k}{2}$이다.

따라서

$$S(a)=\frac{1}{2}\left(a-\frac{k}{2}\right)(-k+a)$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{4a+1-\sqrt{4a+1}}{4}\right)\left(\frac{2a+1-\sqrt{4a+1}}{2}\right)$$

$$\lim_{a\to 0+}\frac{S(a)}{a^3}$$

$$=\lim_{a\to 0+}\frac{1}{2a^3}\left(\frac{4a+1-\sqrt{4a+1}}{4}\right)\left(\frac{2a+1-\sqrt{4a+1}}{2}\right)$$

$$=\lim_{a\to 0+}\frac{1}{16a^3}\left(\frac{4a(4a+1)}{4a+1+\sqrt{4a+1}}\right)\left(\frac{4a^2}{2a+1+\sqrt{4a+1}}\right)$$

$$=\lim_{a\to 0+}\left(\frac{4a+1}{4a+1+\sqrt{4a+1}}\right)\left(\frac{1}{2a+1+\sqrt{4a+1}}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$$

따라서 $p+q=5$

확률과 통계

95-9. 81

모집단의 확률변수를 X라 하면

확률변수 $\overline{X}$는 정규분포 $\mathrm{N}\left(120,\ \left(\frac{6}{\sqrt{n}}\right)^2\right)$를 따르고

$\mathrm{P}(\overline{X} \geq 121) = \mathrm{P}\left(Z \geq \frac{\sqrt{n}}{6}\right) \leq 0.0668$

$\mathrm{P}\left(0 \leq Z \leq \frac{\sqrt{n}}{6}\right) \geq 0.4332$

$\frac{\sqrt{n}}{6} \geq \frac{3}{2}$에서 $\sqrt{n} \geq 9$이므로

$n \geq 81$이다.

95-10. 205

모든 경우의 수를 구해보면

62111 : 20가지, 53111 : 20가지, 52211 : 30가지,

44111 : 10가지

43211 : 60가지, 42221 : 20가지, 33311 : 10가지,

33221 : 30가지

32222 : 5가지

모두 더해주면 205가지이다.

[다른 풀이]

${}_5\mathrm{H}_6 - 5 = {}_{10}\mathrm{C}_4 - 5 = 205$

95-11. 106

각 주머니에 넣는 구슬의 개수를 각각 $a,\ b,\ c,\ d$라 하면

$a+b+c+d < 10 (1 \leq a,\ b,\ c,\ d \leq 4)$

$a+b+c+d+e = 10 (1 \leq a, b, c, d \leq 4,\ e \geq 1)$

$a-1 = a', b-1 = b', c-1 = c', d-1 = d', e-1 = e'$이라 하면

$a'+b'+c'+d'+e' = 5 (0 \leq a', b', c', d' \leq 3,\ e' \geq 0)$

이므로

${}_5\mathrm{H}_5 - 4 \times 5 = 106$이다.

95-12. 528

i) $f(1) = 1$인 경우

f의 치역이 되는 1이 아닌 원소 2개를 선택한 후,

f의 치역의 원소의 개수가 3이 되도록 하는 경우의 수는

${}_4\mathrm{C}_2 \times (3^4 - 2 \times 15 - 1) = 300$

ii) $f(1) = a,\ f(a) = 1$인 경우 $(a = 2,\ 3,\ 4,\ 5)$

a를 선택하고 f의 치역이 되는 1, a가 아닌 원소 1개를 선택한 후, f의 치역의 원소의 개수가 3이 되도록 하는 경우의 수는

${}_4\mathrm{C}_1 \times {}_3\mathrm{C}_1 \times (3^3 - 2^3) = 228$

i), ii)에 의하여 모든 함수 f의 개수는
$300+228=528$

미적분

95-9. ③

$$\frac{d}{dx}\frac{g(x)}{x^2+1}=\frac{(x^2+1)g'(x)-2xg(x)}{(x^2+1)^2}$$

$5g'(2)=4g(2)$, $\frac{g(2)}{5}=1$이므로 $g(2)=5$,

$g'(2)=4$이므로

$$\int_0^2 \frac{xf'(x)}{\{f(x)\}^2}dx=-\int_0^2 xg''(x)\,dx=g(2)-2g'(2)$$
$$=5-8=-3\text{이다.}$$

95-10. 30

함수 $f(x)=x\ln x+\frac{1}{2}x^2-(t+1)x$에서

$g(t)$는 $f'(x)=0$이 되는 값이므로 $f'(x)$를 구하면

$f'(x)=\ln x+x-(t+1)$이다.

$g(t)$를 대입한 후 미분하면

$\ln g(t)+g(t)-t=0$

$\frac{g'(t)}{g(t)}+g'(t)-1=0$

$g'(t)=\frac{1}{\frac{1}{g(t)}+1}$이다.

이때 $t=\ln x+x-1$이라 하면

$dt=(\frac{1}{x}+1)\,dx$

여기서 $x=g(t)$로 둔 뒤 치환 적분을 진행하면

$$\int_\alpha^\beta g(t)\,dt=\int_{g(\alpha)}^{g(\beta)} x\left(\frac{dt}{dx}\right)dx$$

$\frac{dt}{dx}=\left(\frac{1}{x}+1\right)$이므로

$\int_\alpha^\beta g(t)\,dt=\int_1^7 x(\frac{1}{x}+1)\,dx$이다.

따라서 $\int_\alpha^\beta g(t)\,dt=30$이다.

95-11. 64

(가)조건에 의하여 $f(x)=x^2Q(x)$의 형태

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)-x^4}{2x^4\times\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}=2\text{이므로}\quad f(x)=x^4+4x^3+ax^2$$

$f(x)=x^2(x^2+4x+a)$에서

$a\geq 4$이어야만 $|f(x)|$가 전체 실수의 집합에서 미분가능하다.

$f(2)=4a+48\geq 64$이다.

95-12. 7

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{|a_n||a_{n+1}|}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a_na_{n+1}}=\frac{1}{4}$$

이므로 첫째항은 음수이다.

$a_ia_{i+1}<0$을 만족시키는 i의 값이 오직 하나 존재하고

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{|a_n||a_{n+1}|}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a_na_{n+1}}=\frac{2}{|a_i||a_{i+1}|}=\frac{1}{4}$$

따라서 $a_ia_{i+1}=-8$

정수인 조건에 따라서

$a_i=-1,\ a_{i+1}=8$ 또는

$a_i=-8,\ a_{i+1}=1$ 또는

$a_i=-4,\ a_{i+1}=2$ 또는

$a_i=-2,\ a_{i+1}=4$

등차수열 $\{a_n\}$의 공차를 d라 할 때,

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{|a_n|a_{n+1}}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a_na_{n+1}}$$

$$=\sum_{n=1}^{i}\frac{2}{|a_n|a_{n+1}}$$

$$=-\sum_{n=1}^{i}\frac{2}{a_na_{n+1}}$$

$$=-\frac{2}{d}\left(\frac{1}{a_1}-\frac{1}{a_2}+\frac{1}{a_2}-\frac{1}{a_3}+\cdots+\frac{1}{a_i}-\frac{1}{a_{i+1}}\right)$$

$$=-\frac{2}{d}\left(\frac{1}{a_1}-\frac{1}{a_{i+1}}\right)=\frac{7}{40}$$

이고 a_1이 음이 정수이므로 이를 만족시키는 경우는

$a_i=-4,\ a_{i+1}=2,\ d=6$인 경우이다.

또한 $a_i=-40$이므로 $i=7$

문제의 조건에서

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a_{n+k}}$의 값이 최대가 되는 경우는 $k=7$인 경우이다.

Day. 96

수학1, 수학2

96-1. 14

$\sum_{k=1}^{2n}a_k=n^2+3n$이므로

$a_{2n-1}+a_{2n}=2n+2$이다.

$n=5$일 때, $a_9+a_{10}=12$이므로 $a_{10}=10$이고

$n=1$일 때 $a_1+a_2=4$이다.

96-2. ②

조건 (가)에 의해 $f(1)=0$이고

조건 (나)에 의해 $f(2)=0$, $f'(2)=4$이다.

$f(x)=a(x-1)(x-2)$ 에서 $f'(2)=4$이므로

$a=4$이다.

$$\lim_{x\to 1}\frac{f(x)}{x^2-1}=\lim_{x\to 1}\frac{4(x-1)(x-2)}{x^2-1}$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{4(x-2)}{x+1}=-2\text{이다.}$$

96-3. 18

함수 $y=\dfrac{2x+3}{x}\ (x>0)$의 점근선은 $y=2$

함수 $y=a^x\times\left(\dfrac{1}{6}\right)^x$ 가 감소해야 하므로 $a\le 6$

함수 $y=-a^{-x+1}+a$의 점근선이 $y=a$이므로 $a>2$

$2<a\le 6$에서

$a=3+4+5+6=18$

96-4. ②

함수 $y=a_x$를 $a(x)$, 함수 $y=S_x$ 를 $S(x)$라 하자.

등차수열 $\{a_n\}$은 첫째항이 양수이고

어떤 자연수 m에 대하여 $a_m=0$인 수열이므로

이차함수 $S(x)$는

최고차항의 계수가 음수이고 $(0,\ 0)$을 지나는 형태이다.

이때 $a_m=0$이므로 $S_m=S_{m-1}$이고

$S(x)=a(x-m+1)(x-m)+51$이다.

이때 함수 $S(x)$는 $(0,\ 0)$을 지나므로

$S(x)=ax^2+a(1-2m)x$이다.

따라서 등차수열 $a_n=2an+p$ 형태이다.

$S(x)-a(x)=0$에서

$ax^2+a(-1-2m)x-p=0$이고

두 근의 합은 $2m+1$이다.

이때 $a_1=S_1$이므로 한 근은 1이고

두 근의 합이 $2m+1$이고 한 근이 1이므로

나머지 한 근은 $2m$이다,

조건 (나)에 의해 나머지 한 근은 35초과 36이하이다.

$35<2m\le 36$

따라서 자연수 m의 값은 18이다.

$S(x)=a(x-m+1)(x-m)+51$가 $(0,\ 0)$을 지나므로

$a=-\dfrac{1}{6}$

따라서 $a_n=-\dfrac{1}{3}n+6$이고

$a_3=5$이다.

96-5. ④

곡선 $y=a^x-b$는 곡선 $y=a^{x+b}$를 x축의 방향으로 b만큼, y축의 방향으로 $-b$만큼 평행이동한 것이다.

직선 AB의 기울기가 -1이고, $\overline{AB}=3\sqrt{2}$이므로 $b=3$

점 A의 좌표가 $(0, 3)$이므로 $3=a^3$에서 $a=3^{\frac{1}{3}}$이고

직선 $y=3$과 곡선 $y=3^{\frac{x}{3}}-3$과 만나는 점의 x좌표는

$3=3^{\frac{x}{3}}-3$에서 $3^{\frac{x}{3}}=6$, $x=3\log_3 6$

따라서 $\overline{AC}=3\log_3 6$ 이다.

96-6. 81

$\angle BAC=\theta$, $\overline{PM}=a$, $\overline{PN}=b$라 하자.

코사인법칙을 이용하면 $\cos\theta=\frac{1}{8}$, $\sin\theta=\frac{3\sqrt{7}}{8}$이다.

$\overline{BC}=2R_1\sin\theta$이므로 $R_1=\frac{8}{\sqrt{7}}$이다.

$R_2=\frac{3}{4}R_1=\frac{6}{\sqrt{7}}$이고 $\angle MPN=\alpha$라 하자.

$\overline{MN}=2R_2\sin\alpha$이므로 $\sin\alpha=\frac{\sqrt{7}}{4}$, $\cos\alpha=\frac{3}{4}$이다.

삼각형 MNP에서 코사인법칙을 이용하면

$3^2=a^2+b^2-2ab\times\frac{3}{4}$ … (가)

삼각형 ABC의 넓이는 $\frac{1}{2}\times4\times5\times\sin\theta=\frac{15\sqrt{7}}{4}$이고

삼각형 MNP의 넓이는 삼각형 ABC의 넓이의 $\frac{1}{4}$인

$\frac{15\sqrt{7}}{16}$이다.

따라서 $\frac{1}{2}ab\sin\alpha=\frac{15\sqrt{7}}{16}$, $ab=\frac{15}{2}$ … (나)

두 식 (가), (나)를 연립하면 $a^2+b^2=\frac{81}{4}$

$4(\overline{PM}^2+\overline{PN}^2)=81$

96-7. ④

함수 $k(x^3-9x^2+15x)$의 극댓값이 35가 될 때, 함수 $g(t)$가 $t=a$에서 불연속인 a가 3개가 된다.

$f'(x)=3k(x-1)(x-5)$에서

$k>0$일 때, 극댓값은 $f(1)=7k=35$에서 $k=5$이고

$k<0$일 때, 극댓값은 $f(5)=-25k=35$에서 $k=-\frac{7}{5}$이므로

모든 k의 값의 합은 $5-\frac{7}{5}=\frac{18}{5}$이다.

96-8. 52

$(a_{n+2})^2-(a_n)^2=2a_{n+1}(a_{n+2}-a_n)$

$(a_{n+2})^2-(a_n)^2=2a_{n+2}a_{n+1}-2a_{n+1}a_n$

$(a_{n+2})^2-2a_{n+2}a_{n+1}+(a_{n+1})^2=(a_{n+1})^2-2a_{n+1}a_n+(a_n)^2$

$(a_{n+2}-a_{n+1})^2=(a_{n+1}-a_n)^2$

따라서 모든 자연수 n에 대하여

$a_{n+2}-a_{n+1}=a_{n+1}-a_n$ 또는

$a_{n+2}-a_{n+1}=-(a_{n+1}-a_n)$

이때, 조건 (나)에 의하여 $\sum_{n=1}^{10}a_n$이 최대인 경우는

$a_1=1,\ a_2=3,\ a_3=5,\ a_4=7,\ a_5=5$

$a_6=7,\ a_7=5,\ a_8=7,\ a_9=5,\ a_{10}=7$

인 경우이다.

이때, $\sum_{n=1}^{10}a_n=52$이다.

확률과 통계

96-9. ②

a가 짝수이면 $f(a)$도 짝수이므로 $f(6)$과 $f(8)$의 값은 6 또는 8이다.

i) $f(6)=6$인 경우

$f(8)$의 값을 정하는 경우의 수는 ${}_2C_1=2$

$f(5),\ f(7),\ f(9)$의 값은 모두 6 또는 7 또는 8 또는 9이므로

$f(5),\ f(7),\ f(9)$의 값을 정하는 경우의 수는

${}_4\Pi_3=4^3=64$

따라서 이 경우의 함수 f의 개수는

$2\times64=128$

ii) $f(6)=8$인 경우

$f(8)$의 값을 정하는 경우의 수는 ${}_2C_1=2$

$f(5),\ f(7),\ f(9)$의 값은 모두 8 또는 9이므로

$f(5),\ f(7),\ f(9)$의 값을 정하는 경우의 수는

${}_2\Pi_3=2^3=8$

따라서 이 경우의 함수 f의 개수는

$2\times8=16$

i), ii)에서 구하는 함수 f의 개수는

$128+16=144$이다.

96-10. ⑤

실근이 존재하려면 $D/4=a^2-2b\geq0$이어야 한다.

i) 3의 배수가 나오면 가능한 순서쌍은

$a=2$일 때, $b=1$

$a=3$일 때, $b=1,2,4$

$a=4$일 때, $b=1,2,3$

7개이고

ii) 3의 배수가 나오지 않으면 가능한 순서쌍은

$a=-1$일 때, $b=0$

$a=0$일 때, $b=-1$

$a=1$일 때, $b=-1, 0$

총 4개이므로

$\frac{1}{3}\times\frac{7}{{}_4C_2\times 2!}+\frac{2}{3}\times\frac{4}{{}_3C_2\times 2!}=\frac{23}{36}$이다.

96-11. 19

조건 (가)에서 $12 \le m \le 13$임을 알 수 있다.

조건 (나)에서 표본평균 $\overline{X}$는 평균 m, 표준편차 $\frac{\sigma}{2}$를 갖는다.

$P(\overline{X}\le 7)=0.0228$이므로, 표준화하면 $z=-2$에 해당된다.

$\frac{7-m}{\frac{\sigma}{2}}=-2$이므로

$m=7+\sigma$이다.

이때, $P(\overline{X}\ge 18)=0.0228$에서 $m=13$, $\sigma=6$이 되어야 한다.

따라서 $m=13$, $\sigma=6$

$m+\sigma=13+6=19$이다.

96-12. 12

$P(A_n)=\frac{2(n-6)}{n(n-1)}$, $P(B_n)=\frac{2}{n}$

$P(A_n\cap B_n)=\frac{2}{n(n-1)}$

$P(A_n)\times P(B_n)=P(A_n\cap B_n)$이므로

$\frac{2(n-6)}{n(n-1)}\cdot\frac{2}{n}=\frac{2}{n(n-1)}$에서

$n=12$이다.

미적분

96-9. ③

점 $P(t, f(t))$를 중심으로 하는 원이 y축과 접하므로 이 원의 반지름의 길이는 t이다. 또한

$\overline{OP}=\sqrt{t^2+\{f(t)\}^2}\ge t$이므로

$g(t)=\sqrt{t^2+\{f(t)\}^2}-t$ … ㉠

이때, $g(2)=2$이므로

$g(2)=\sqrt{4+\{f(2)\}^2}-2=2$

$\therefore \{f(2)\}^2=12$ … ㉡

㉠의 양변을 t에 대하여 미분하면

$g'(t)=\frac{2t+2f(t)f'(t)}{2\sqrt{t^2+\{f(t)\}^2}}-1=\frac{t+f(t)f'(t)}{\sqrt{t^2+\{f(t)\}^2}}-1$

이때 $g'(2)=0$이므로

$g'(2)=\dfrac{2+f(2)f'(2)}{\sqrt{2^2+\{f(2)\}^2}}-1=0$

$f(2)f'(2)=2$

양변을 제곱하면

$\{f(2)\}^2\{f'(2)\}^2=4$에서

$\{f'(2)\}^2=\dfrac{1}{3}$이다.

96-10. ④

$\int_0^1 g(x)\,dx=1-\int_0^1 f'(x)\cos\dfrac{\pi}{2}x\,dx$에서

$g(x)=f'(x)\cos\dfrac{\pi}{2}x+x$이므로

$\int_0^1 g(x)\,dx=1-\int_0^1 f'(x)\cos\dfrac{\pi}{2}x\,dx$

$=1-\int_0^1\{g(x)-x\}\,dx$

$=1-\int_0^1 g(x)\,dx+\int_0^1 x\,dx$이므로

$\int_0^1 g(x)\,dx=\dfrac{3}{4}$이다.

$\int_0^{\frac{1}{2}} f(2x)\sin\pi x\,dx$을 구하기 위해

$2x=t$로 치환하면

$\int_0^{\frac{1}{2}} f(2x)\sin\pi x\,dx=\dfrac{1}{2}\int_0^1 f(t)\sin\dfrac{\pi}{2}t\,dt$이다.

$g(x)=f'(x)\cos\dfrac{\pi}{2}x+x$에서

$g(x)-x=f'(x)\cos\dfrac{\pi}{2}x$이고

부분 적분을 이용하면

$\int_0^1\{g(x)-x\}dx=\int_0^1 f'(x)\cos\dfrac{\pi}{2}x\,dx$

$=\left[f(x)\cos\dfrac{\pi}{2}x\right]_0^1+\dfrac{\pi}{2}\int_0^1 f(x)\sin\dfrac{\pi}{2}x\,dx$

이때 $f(0)=0$이고 $\int_0^1 g(x)\,dx=\dfrac{3}{4}$이므로

$\dfrac{1}{4}=\dfrac{\pi}{2}\int_0^1 f(x)\sin\dfrac{\pi}{2}x\,dx$

$\int_0^1 f(x)\sin\dfrac{\pi}{2}x\,dx=\dfrac{1}{2\pi}$이다.

구하고 싶은 $\int_0^{\frac{1}{2}} f(2x)\sin\pi x\,dx$의 값은

$\dfrac{1}{2}\int_0^1 f(x)\sin\dfrac{\pi}{2}x\,dx$이므로

$\int_0^{\frac{1}{2}} f(2x)\sin\pi x\,dx=\dfrac{1}{2}\int_0^1 f(x)\sin\dfrac{\pi}{2}x\,dx=\dfrac{1}{4\pi}$이다.

96-11. ④

$\overline{BD}=\overline{DC}$, $\overline{AD}=b$라 하면

$\frac{a^2}{4}+\frac{b^2}{9}=13$, $\frac{a^2}{4}+b^2=45$이므로

$a=6$, $b=6$이다.

$\tan(\angle ACD)=2$, $\tan(\angle FCD)=\frac{2}{3}$에서

$\tan\alpha=\frac{\tan(\angle ACD)-\tan(\angle FCD)}{1+\tan(\angle ACD)\tan(\angle FCD)}=\frac{4}{7}$

$\tan(\angle ABD)=2$, $\tan(\angle EBD)=\frac{4}{3}$에서

$\tan\beta=\frac{\tan(\angle ABD)-\tan(\angle EBD)}{1+\tan(\angle ABD)\tan(\angle EBD)}=\frac{2}{11}$,

$\tan(\alpha-\beta)=\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}=\frac{\frac{4}{7}-\frac{2}{11}}{1+\frac{4}{7}\cdot\frac{2}{11}}=\frac{6}{17}$이다.

96-12. 13

모든 실수 x에 대하여 부등식 $x\{g(x)-mx\}\le 0$이 성립하기 위해서는 $x<0$일 때, $g(x)\ge mx$이고 $x\ge 0$일 때, $g(x)\le mx$이어야 한다. 이를 만족시키기 위해서는 $g(0)=0$이어야 하고 따라서 $f(0)=1$이다.

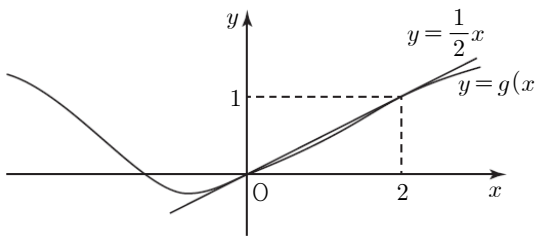
또한 $y=g(x)$가 $y=\frac{1}{2}x$와 접해야 하는데

$g'(x)=\frac{f'(x)}{f(x)}$에서 $g'(x)=\frac{1}{2}$의 가장 큰 근은 2이므로

$y=g(x)$와 $y=\frac{1}{2}x$가 접하는 접점은 $(2,\ 1)$이고

$g(2)=1$이다.

따라서 $f(2)=e$, $f'(e)=\frac{e}{2}$를 얻는다.

이를 종합하면 $f(x)=\frac{1}{4}(x-2)^2+\frac{1}{2}e(x-2)+e$이고

$f(8)=4e+9$이다.