백일대장

수능 역전을 위한 백일 전략서

13

정답 및 해설

100人대장

Day. 85

수학1, 수학2

85-1. ③

$\{a_n\}$이 등차수열이고 $a_4+a_{14}=7$이므로

$a_1+a_{17}=a_2+a_{16}=a_3+a_{15}=\cdots=a_8+a_{10}=2a_9=7$

$\sum_{k=1}^{16}(a_k+a_{k+1})$

$=a_1+2(a_2+a_3+\cdots+a_{16})+a_{17}$

$=(a_1+a_{17})+2(a_2+a_{16})+2(a_3+a_{15})+\cdots+2(a_8+a_{10})+2a_9$

$=7\times(1+2\times7+1)$

$=112$

85-2. ①

원점에서 출발한 점 P 의 시각 $t=a$ 에서의 위치가 0 이므로

$$\int_0^a v(t)dt=\int_0^a(-3t^2+12t)dt$$

$$=-a^3+6a^2=-a^2(a-6)=0$$

a 가 양수이므로 $a=6$

따라서 시각 $t=2$에서 $t=6$까지 점 P 가 움직인 거리는

$$\int_2^6|-3t^2+12t|dt=\int_2^4(-3t^2+12t)dt+\int_4^6(3t^2-12t)dt$$

$$=16+32=48$$

<참고>

$f(x)=a(x-\alpha)(x-\beta)$ (단, $a\neq0$, $\alpha<\beta$)일 때,

① $\int_\alpha^\beta f(x)dx=-\frac{a}{6}(\beta-\alpha)^3$

② $\int_\alpha^\beta f(x)dx=-\int_{\alpha-\frac{\beta-\alpha}{2}}^{\alpha}f(x)dx=-\int_\beta^{\beta+\frac{\beta-\alpha}{2}}f(x)dx$

임을 이용하면 위 문제를 복잡한 적분 계산 없이 풀 수 있다.

85-3. 30

ⅰ) $\sqrt{2^a\times\sqrt[3]{9^b}}=2^{\frac{a}{2}}\times3^{\frac{b}{3}}$ 이 자연수이므로

$a=2m$, $b=3m$ (m은 자연수)

$a=2,\ 4,\ 6,\ \cdots,\ 20$

$b=3,\ 6,\ 9,\ \cdots,\ 18$

ⅱ) $\log_4(2^a\times8^b)=\log_4 2^{a+3b}$이 자연수이므로

$a+3b$가 짝수가 되어야 한다.

이때 ⅰ)에서 a가 짝수이므로 b도 짝수여야 한다.

따라서 가능한 자연수 a와 b는

$a=2,\ 4,\ 6,\ \cdots,\ 20$

$b=6,\ 12,\ 18$

이므로 순서쌍 $(a,\ b)$의 개수는 $10\times3=30$

85-4. ④

조건 (가)에서 실수 a가 $\lim_{x\to0}\frac{f(x)-f(a)}{x}=18$을

만족시키려면

$f(0)-f(a)=0,\ f(0)=f(a)$이어야 한다.

이러한 서로 다른 실수 a가 2개 존재하고

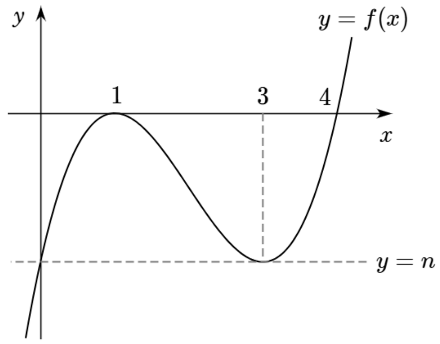
$\lim_{x\to0}\frac{f(x)-f(a)}{x}=\lim_{x\to0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=f'(0)=18$이므로

$f(x)=2x(x-m)^2+n$과 같이 둘 수 있고

$f'(0)=2m^2=18$이므로

$m=-3$ 또는 $m=3$이다.

한편, $f(3)<0$이고 조건 (나)에서 방정식 $f(x)=0$이 중근을 가져야 하므로, $y=f(x)$의 그래프는 다음과 같을 수밖에 없다.



따라서 $m=3$

$f(1)=n+8=0,\ n=-8$이므로

$f(x)=2x(x-3)^2-8$

$f'(4)=18$

85-5. 6

$a_n=S_n-S_{n-1}$

$=pn^2+3n-\{p(n-1)^2+3(n-1)\}$

$=2pn-p+3\ (n\ge2)$

$a_1=S_1=p+3$

$\therefore\ a_n=2pn-p+3\ (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$

$b_n=T_n-T_{n-1}$

$=n^2+qn-\{(n-1)^2+q(n-1)\}$

$=2n-1+q\ (n\ge2)$

$b_1=T_1=1+q$

$b_n=2n-1+q\ (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$

$a_n+b_n=(2pn-p+3)+(2n-1+q)$

$=(2p+2)n+(-p+q+2)$

이 값이 n의 값에 관계없이 일정하므로

$2p+2=0,\ p=-1$

$a_n=-2n+4,\ a_3=-2$

$b_3=5+q=-2,\ q=-7$

$\therefore\ p-q=(-1)-(-7)=6$

85-6. ③

$\sin\theta_1=\sqrt{1-\left(-\frac{7}{25}\right)^2}=\frac{24}{25}$

삼각형 OAB의 넓이는 $\frac{1}{2}\cdot 10\cdot 10\sin\theta_1=48$

삼각형 OAB에서 코사인법칙을 이용하면

$\overline{\mathrm{AB}}=\sqrt{100+100-2\cdot 10\cdot 10\cdot\left(-\frac{7}{25}\right)}=16$

선분 AB의 중점을 F, 선분 DE의 중점을 G라 하자.

$\overline{\mathrm{AF}}=8$이므로 $\overline{\mathrm{OF}}=\sqrt{10^2-8^2}=6$

$\overline{\mathrm{OG}}=t$라 할 때, $\overline{\mathrm{DG}}=\frac{4}{3}t,\ \overline{\mathrm{DE}}=\frac{8}{3}t$

삼각형 CDE의 넓이가 $48\times\frac{13}{12}=52$이므로

$\frac{1}{2}\cdot(10+t)\cdot\frac{8}{3}t=52$

$(t-3)(t+13)=0$에서 $t=3$

$\overline{\mathrm{DG}}=4$

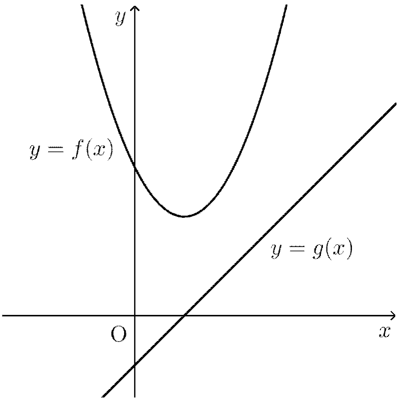
$\overline{\mathrm{CD}}=\overline{\mathrm{CE}}=\sqrt{(10+3)^2+4^2}=\sqrt{185}$

삼각형 CDE에서 코사인법칙을 이용하면

$\cos\theta_2=\frac{185+185-64}{2\cdot\sqrt{185}\cdot\sqrt{185}}=\frac{153}{185}$

85-7. 25

조건을 만족시키려면 그림과 같이 모든 실수 x에 대하여 $f(x)\geq g(x)$가 되어야 한다.



$f(x)-g(x)=h(x)$라 할 때, $h(x)=x^2-3x+k+3$

모든 실수 x에 대하여 $h(x)\geq 0$이므로

$D=9-4(k+3)=-4k-3\leq 0$

$k\geq-\frac{3}{4}$

따라서 $m=-\frac{3}{4},\ m^2=\frac{9}{16}$이므로

$p+q=16+9=25$

85-8. 10

$$g(x)=f(x)\int_a^x f(t)dt-\int_a^x \{f(t)\}^2 dt$$

$$g'(x)=f'(x)\int_a^x f(t)dt+\{f(x)\}^2-\{f(x)\}^2$$

$$=f'(x)\int_a^x f(t)dt=(2x-8)\int_a^x (t^2-8t+15)dt$$

$g(x)$의 극점이 두 개가 되도록 하는 경우는 다음과 같다.

i) x에 대한 방정식 $\int_a^x f(t)dt=0$이 $x=4$를 근으로 갖는 경우

$g'(4)=0$이지만, $g'(x)$가 $x=4$ 전후로 부호가 바뀌지 않기 때문에, $g(x)$는 $x=4$에서 극값을 가지지 못한다.

한편, $\int_{4-\sqrt{3}}^{4} f(t)dt=\int_4^{4+\sqrt{3}} f(t)dt=0$이므로

$a=4-\sqrt{3}$ 또는 4 또는 $4+\sqrt{3}$일 때

$\alpha=4-\sqrt{3}$, $\beta=4+\sqrt{3}$으로

$\alpha+\beta=8\le 9$이므로 조건 (나)를 만족시킨다.

따라서 가능한 실수 a의 개수는 3

ii) $\int_a^x f(t)dt=0$이 중근이 아닌 실근을 하나만 가질 경우

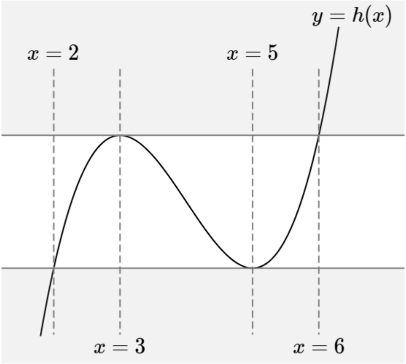
그 실근이 $x=k$일 때, $g(x)$는 $x=k$에서 극값을 가진다.

또한, 이 경우 방정식 $\int_a^x f(t)dt=0$이 $x=4$를 근으로 갖지 않으므로 $g(x)$는 $x=4$에서도 극값을 가진다.

따라서 k와 4가 α 또는 β가 된다.

한편, $h(x)=\int_a^x f(t)dt$라 하면, $h(a)=0$이고,

$h'(x)=(x-3)(x-5)$이므로 $h(x)$는 $x=3$과 $x=5$에서 극값을 갖고 $y=h(x)$의 그래프가 다음과 같다.



이때 방정식 $h(x)=0$이 중근이 아닌 실근을 하나만 가지려면, x축이 그림의 색칠한 부분(경계선 포함)에 있어야 한다.

따라서 가능한 a의 범위는

$a\le 2,\ a=3,\ a=5,\ a\ge 6$이다.

① $a\ge 6$일 경우

$k=a$이고, 따라서 $\alpha=4,\ \beta=a$이다.

이 경우 $\alpha+\beta\ge 10$이므로 조건 (나)를 위배한다.

② $a=5$일 경우

$k=2$이고, 따라서 $\alpha=2,\ \beta=4$이다.

이 경우 $\alpha+\beta=6$이므로 조건 (나)를 만족시킨다.

③ $a=3$일 경우

$k=6$이고, 따라서 $\alpha=4,\ \beta=6$이다.

이 경우 $\alpha+\beta=10$이므로 조건 (나)를 위배한다.

④ $a\le 2$일 경우

$k=a$이고, 따라서 $\alpha=a,\ \beta=4$이다.

이 경우 $-3\le a\le 2$일 때 조건 (나)를 만족시킨다.

따라서 가능한 실수 a의 개수는 7

최종적으로 i), ii)에 따라 가능한 실수 a의 개수는

$3+7=10$

확률과 통계

85-9. ②

i) 숫자 1을 흰색 카드 2장에 적은 경우

$$\frac{5!}{2!\times 2!}=30$$

ii) 숫자 1을 노란색 카드 1장, 흰색 카드 1장에 적은 경우

$$\frac{5!}{2!}=60$$

iii) 숫자 1을 노란색 카드 2장에 적은 경우

$$\frac{5!}{2!\times 3!}=10$$

따라서 구하는 경우의 수는 $30+60+10=100$

85-10. ④

조건 (가)에 의해

$\mathrm{E}(Y)=k(\mathrm{E}(X)-1)=mk-k$

$\sigma(Y)=2\sigma=k\sigma(X)=k\sigma$이므로 $k=2,\ m=-1$

따라서 확률변수 X는 정규분포 $\mathrm{N}(-1,\ \sigma^2)$을 따르고,

확률변수 Y는 정규분포 $\mathrm{N}(-4,\ 4\sigma^2)$을 따른다.

조건 (나)에서

$\mathrm{P}(X\le 0)+\mathrm{P}(Y\ge -6)$

$$=\mathrm{P}\left(Z\le \frac{1}{\sigma}\right)+\mathrm{P}\left(Z\ge -\frac{1}{\sigma}\right)=1.383$$

$\mathrm{P}\left(Z\le \dfrac{1}{\sigma}\right)=0.6915=0.5+0.1915$이므로 $\sigma=2$

따라서 $\mathrm{P}(X\le 2)=\mathrm{P}(Z\le 1.5)=0.9332$

85-11. 77

i) 앞면이 2번 나오는 경우

$${}_6\mathrm{C}_2\times\left(\frac{1}{2}\right)^7=15\times\left(\frac{1}{2}\right)^7$$

ii) 앞면이 3번 나오는 경우

$${}_5\mathrm{C}_3\times\left(\frac{1}{2}\right)^7=10\times\left(\frac{1}{2}\right)^7$$

iii) 앞면이 4번 나오는 경우

$\left(\frac{1}{2}\right)^7$

따라서 구하는 확률은 $(15+10+1)\times\left(\frac{1}{2}\right)^7=\frac{13}{64}$

$\therefore\ p+q=77$

85-12. 83

동전의 앞면이 나온 개수에 따라 주머니 B에서 꺼낸 공이 검은 색일 확률은

i) 앞면이 나온 횟수가 0인 경우

$${}_3C_0\times\left(\frac{1}{2}\right)^3\times\frac{0}{3}=0$$

ii) 앞면이 나온 횟수가 1인 경우

$${}_3C_1\times\left(\frac{1}{2}\right)^3\times\frac{1}{4}=\frac{3}{32}$$

iii) 앞면이 나온 횟수가 2인 경우

$${}_3C_2\times\left(\frac{1}{2}\right)^3\times\frac{2}{5}=\frac{3}{20}$$

iv) 앞면이 나온 횟수가 3인 경우

$${}_3C_3\left(\frac{1}{2}\right)^3\times\frac{3}{6}=\frac{1}{16}$$

i)~iv)에 의하여 구하는 조건부확률은

$$\frac{\frac{3}{20}+\frac{1}{16}}{\frac{3}{32}+\frac{3}{20}+\frac{1}{16}}=\frac{\frac{24+10}{160}}{\frac{15+24+10}{160}}=\frac{34}{49}$$

$\therefore\ p+q=49+34=83$

미적분

85-9. ①

$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\csc^{2n}\alpha+\sec^{n}\alpha}{2^n}=1$에서

$\csc\alpha=\sqrt{2},\ \sec\alpha=\sqrt{2}$ 또는 $\csc\alpha=\frac{2}{\sqrt{3}},\ \sec\alpha=2$

$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\csc^{n}\beta+\sec^{2n}\beta}{3^n}=1$에서

$\csc\beta=3,\ \sec\beta=\frac{3}{2\sqrt{2}}$ 또는 $\csc\beta=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}},\ \sec\beta=\sqrt{3}$

이때 $\alpha<\beta$에서 $\csc\alpha>\csc\beta$이므로

$\csc\alpha=\sqrt{2},\ \csc\beta=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$이 가능하다.

$\sin\alpha=\frac{1}{\sqrt{2}},\ \sin\beta=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$

$\therefore\ \sin\alpha\times\sin\beta=\frac{\sqrt{3}}{3}$

85-10. ⑤

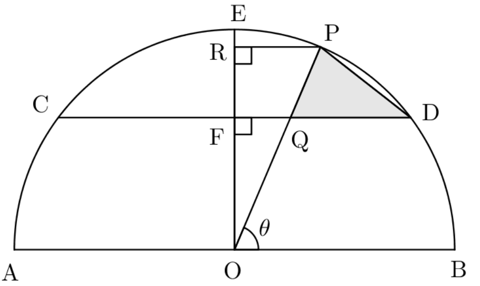
$\angle \mathrm{CBF}=\theta_1$, $\angle \mathrm{DEG}=\theta_2$라 하면

$\tan\theta_1=\dfrac{1}{3}$, $\tan\theta_2=\dfrac{2}{3}$

$\theta=\theta_1+\theta_2$이므로

$$\tan\theta=\tan(\theta_1+\theta_2)=\frac{\frac{1}{3}+\frac{2}{3}}{1-\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}}=\frac{9}{7}$$

85-11. ②



그림과 같이 선분 AB에 수직인 직선이 호 AB와 만나는 점을 E, 선분 CD와 선분 OF의 교점을 F, 점 P에서 선분 OE에 내린 수선의 발을 R이라 하면

$\overline{\mathrm{OF}}=3$, $\overline{\mathrm{FQ}}=3\tan\left(\dfrac{\pi}{2}-\theta\right)=3\cot\theta$

$\overline{\mathrm{OR}}=5\cos\left(\dfrac{\pi}{2}-\theta\right)=5\sin\theta$

$\overline{\mathrm{QD}}=4-3\cot\theta$이므로

$$S(\theta)=\frac{1}{2}(4-3\cot\theta)(5\sin\theta-3)$$

$$S'(\theta)=\frac{1}{2}(3\csc\theta^2)(5\sin\theta-3)+\frac{1}{2}(4-3\cot\theta)(5\cos\theta)$$

$\cos\alpha=\dfrac{3}{5}$이므로 $\sin\alpha=\dfrac{4}{5}$

$$S'(\alpha)=\frac{1}{2}\left(3\times\frac{25}{16}\right)\left(5\times\frac{4}{5}-3\right)+\frac{1}{2}\left(4-3\times\frac{3}{4}\right)\left(5\times\frac{3}{5}\right)$$
$$=\frac{75}{32}+\frac{84}{32}=\frac{159}{32}$$

85-12. ②

곡선 $y=g(x)$ 위의 점 $(a,\ g(a))$에서의 접선의 방정식은

$y=g'(a)(x-a)+g(a)$

$$h(a)=a-\frac{g(a)}{g'(a)}$$

따라서 $x(h(x)-x)=-\dfrac{xg(x)}{g'(x)}$이고

$0<x<1$인 x에 대하여 $g(x)>0$, $g'(x)<0$이므로

$x(h(x)-x)>0$이다.

또한, $\displaystyle\lim_{x\to0+}-\frac{xg(x)}{g'(x)}=0=0\times(h(0)-0)$,

$\lim_{x\to 1-}\dfrac{xg(x)}{g'(x)}=0=1\times(h(1)-1)$이므로

$y=x(h(x)-x)$와 x축으로 둘러싸인 부분의 넓이는

$\int_0^1 \dfrac{xg(x)}{g'(x)}dx$이라 할 수 있다.

$x=f(t)$로 치환하면

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{0} -tf(t)\{f'(t)\}^2 dt=\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos x\sin^2 x dx$$

$$=\left[x\times\frac{1}{3}\sin^3 x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}-\frac{1}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^3 x\,dx$$

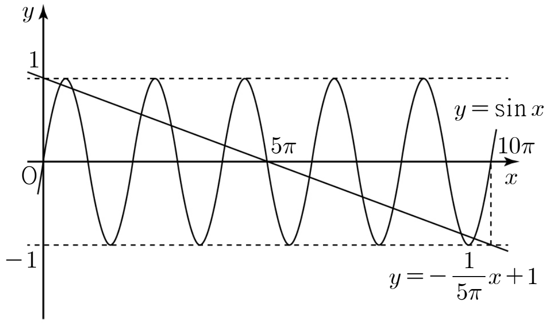
$$=\frac{\pi}{6}-\frac{1}{3}\left(1-\frac{1}{3}\right)=\frac{\pi}{6}-\frac{2}{9}$$

Day. 86

수학1, 수학2

86-1. ③

직선 $y=-\dfrac{1}{5\pi}x+1$과 함수 $y=\sin x$의 그래프는 그림과 같다.



따라서 두 그래프의 교점의 개수는 11 이다.
같은 방법으로 $f(1)=3$, $f(2)=5$, $f(3)=7$, $f(4)=9$이다.

따라서 $\sum_{k=1}^{5} f(k)=3+5+7+9+11=35$

86-2. 20

$f(x)=x^2+ax+b$라 두면

함수 $g(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이므로

$$\int_0^1\{f(t)-t^2\}dt=\int_0^1 f(t)dt-\frac{1}{3}=0$$

$$\int_0^1 f(t)dt=\frac{1}{3}+\frac{a}{2}+b=\frac{1}{3} \qquad \cdots ㉠$$

함수 $g(x)$가 실수 전체의 집합에서 미분가능하므로

$f(1)-1=2f(1)-1$

$f(1)=1+a+b=0$ $\cdots$ ㉡

㉠, ㉡을 연립하면 $a=-2,\ b=1$

$\therefore\ f(x)=x^2-2x+1$

$6\times g(3)=6\int_1^3(2t^2-4t+1)dt=6\times\frac{10}{3}=20$

86-3. ④

$3^{\frac{f(t)}{2}}=N\ (N=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$이므로

t에 대한 방정식 $f(t)=2\log_3 N$의 모든 해의 합이 15인 것이고

이는 곡선 $y=f(x)$와

직선 $y=\log_3 1,\ y=\log_3 4,\ y=\log_3 9\ \cdots$

의 교점의 x좌표의 합이 15인 것과 같다.

이때 곡선과 한 직선이 한 점 즉 포물선의 꼭짓점에서 만나면, 그 점의 x좌표는 3이다.

그리고 곡선과 한 직선이 두 점에서 만나면, 그 두 점은 직선 $x=3$에 대해 대칭이므로 두 점의 x좌표의 합은 6이다.

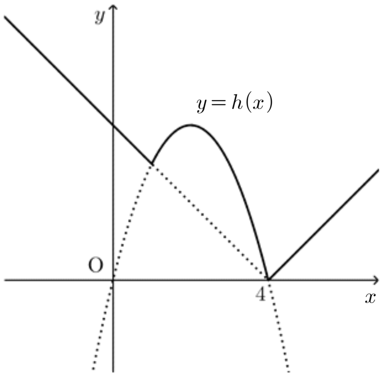
따라서 곡선 $y=f(x)$는 직선 $y=0,\ y=\log_3 4$와 두 점에서 만나고 $y=2$와 한 점에서 만나야 한다. $a=2$

$\therefore\ f(a)=f(2)=1$

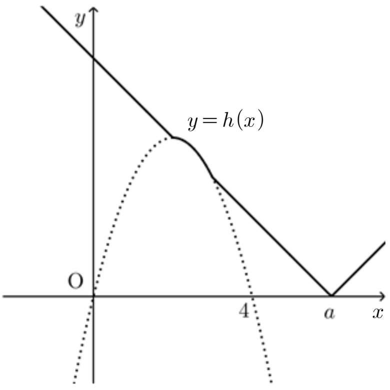
86-4. 14

a의 값에 따라 함수 $y=h(x)$의 그래프와 극점의 개수는 다음과 같다.

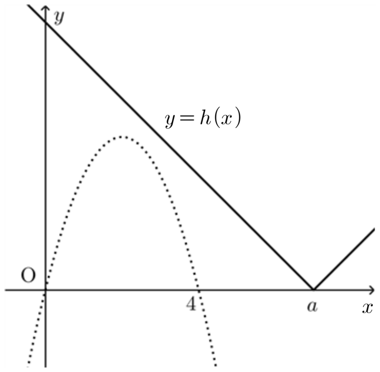
i) $-2<a<6$일 때, 3개



ii) $a=-2$ 또는 $a=6$일 때, 1개



iii) $a<-2$ 또는 $a>6$일 때, 1개



따라서 조건을 만족시키는 a는 $-1, 0, 1, 2, 3, 4, 5$이고 모든 a의 합은 14이다.

86-5. ④

$a_n=ar^{n-1}$ $(a\neq 0,\ r\neq 0)$이라 두면

조건 (가)에 의해 $r=-1,\ a_n=a(-1)^{n-1}$

조건 (나)에서

$$\sum_{n=1}^{10} na_n=a-2a+3a-4a\cdots -10a=-5a=20$$

$a=-4,\ a_n=-4(-1)^{n-1}$

$$\therefore \sum_{n=1}^{5}(a_n)^2=16\times 5=80$$

86-6. ③

조건 (가)에서 함수 $f(x)$의 최고차항의 계수는 1이다.

조건 (나)에서 $\lim_{x\to 2} f(x)=0$이 되어야 하므로

$f(x)=(x-2)(x^2+ax+b)$로 놓을 수 있고,

$\lim_{x\to 2}\dfrac{f(x)}{x-2}=4+2a+b$가 자연수이므로

$4+2a+b=n$ (n은 자연수) $\cdots$ ㉠

$f'(x)=(x^2+ax+b)+(x-2)(2x+a)$

이고 조건 (다)에서 $\lim_{x\to 1} f'(x)=0$이 되어야 하므로

$f'(1)=(1+a+b)-(2+a)=b-1=0$

$b=1$

$f'(x)=(x-1)(3x+2a-1)$

$\lim_{x\to 1}\dfrac{x-1}{f'(x)}=\dfrac{1}{3+2a-1}=\dfrac{1}{2a+2}$가 자연수이므로

$\dfrac{1}{2a+2}=m$ (m은 자연수) $\cdots$ ㉡

㉠에서 $2a+5=n$

$a=\dfrac{1}{2}(n-5)$ $\cdots$ ㉢

㉡에서 $2a+2=\dfrac{1}{m}$

$a=\dfrac{1}{2m}-1$ $\cdots$ ㉣

㉢과 ㉣에 의해 $n-5=\dfrac{1}{m}-2$

따라서 $n=4$, $m=1$, $a=-\dfrac{1}{2}$

$f(x)=(x-2)\left(x^2-\dfrac{1}{2}x+1\right)$

$\therefore\ f(4)=2\cdot(16-2+1)=30$

86-7. 67

$\angle\mathrm{BAE}=\alpha$, $\angle\mathrm{DAE}=\beta$라 하자.

사인법칙을 이용하면

$\overline{\mathrm{AB}}=2\cos\beta$, $\overline{\mathrm{BC}}=2\sin\alpha$, $\overline{\mathrm{CD}}=2\sin\beta$, $\overline{\mathrm{DA}}=2\cos\alpha$

$2\,\overline{\mathrm{AB}}=\overline{\mathrm{BC}}$이므로 $\sin\alpha=2\cos\beta$

$3\,\overline{\mathrm{AD}}=\overline{\mathrm{DC}}$이므로 $\cos\alpha=\dfrac{1}{3}\sin\beta$

$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$이므로

$4\cos^2\beta+\dfrac{1}{9}\sin^2\beta=\dfrac{1+35\cos^2\beta}{9}=1$

$\cos^2\beta=\dfrac{8}{35}$

$\overline{\mathrm{AB}}^2=4\cos^2\beta=\dfrac{32}{35}$

$\therefore\ p+q=67$

86-8. ⑤

조건 (가)에 의해 $f(x)=(x-\alpha)^2(x-\beta)$이라 둘 수 있다.

조건 (나)에서 $\lim\limits_{x\to1+}(|g(x)|+|g'(x)-4|)=0$이므로

$\lim\limits_{x\to1+}|g(x)|=|f(1)|=0$, $f(1)=0$

$\lim\limits_{x\to1+}|g'(x)-4|=0$, $\lim\limits_{x\to1+}g'(x)=4$

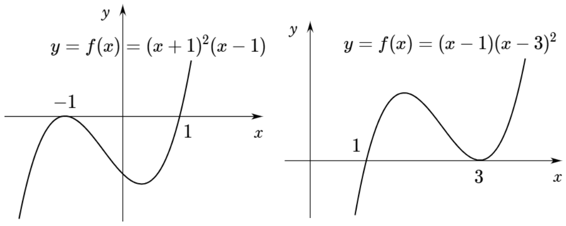
따라서 $\beta=1$, $f(x)=(x-1)(x-\alpha)^2$

여기서 $\lim\limits_{x\to1+}f(x)>0$이고

$f'(x)=(x-\alpha)^2+2(x-1)(x-\alpha)$이므로

$\lim\limits_{x\to1+}g'(x)=\lim\limits_{x\to1+}f'(x)=f'(1)=(1-\alpha)^2=4$

따라서 $\alpha=-1$ 또는 $\alpha=3$



이중 $\alpha=3$일 때, $\displaystyle\int_0^2 f(x)dx<0$이 성립하므로

$\alpha=3$, $f(x)=(x-1)(x-3)^2$

$$k = \lim_{x \to 1+} \frac{|g(x)| + |g'(x) - 4|}{x-1}$$
$$= \lim_{x \to 1+} \frac{f(x) - \{f'(x) - 4\}}{x-1}$$
$$= \lim_{x \to 1+} \frac{(x-1)(x-3)^2 - (x-1)(3x-11)}{x-1}$$
$$= 4 + 8 = 12$$
$$\therefore\ f(k-6) = f(6) = 45$$

확률과 통계

86-9. 84

ⅰ) 사과를 선택하지 않을 경우

사과를 뺀 세 종류의 과일을 2개, 1개, 1개씩 나누어 주므로

$${}_3C_1 \times \frac{4!}{2!} = 36$$

$$\frac{5!}{2! \times 2!} = 30$$

ⅱ) 사과를 선택할 경우

배와 바나나 중 한 종류를 선택한 후 사과는 1개, 나머지 두 종류의 과일을 1개와 2개씩 나누어 주므로

$${}_2C_1 \times {}_2C_1 \times \frac{4!}{2!} = 48$$

따라서 구하는 경우의 수는 $36 + 48 = 84$

86-10. ①

$P(X \geq k) = P(Y \leq k+1)$이므로

$$P\left(Z \geq \frac{k-10}{3}\right) = P\left(Z \leq \frac{k+1-8}{2}\right)$$

$$\frac{k-10}{3} = -\frac{k-7}{2}$$

$$\therefore\ k = \frac{41}{5}$$

학교 B의 학생들 중 4명을 임의추출해 구한 인터넷 접속시간의 표본평균을 $\overline{Y}$ 라 하면,

확률변수 $\overline{Y}$ 는 정규분포 $N\left(8,\ \frac{2^2}{4}\right)$, 즉 $N(8,\ 1^2)$을 따른다.

$$P(\overline{Y} \leq k) = P\left(\overline{Y} \leq \frac{41}{5}\right) = P\left(Z \leq \frac{1}{5}\right)$$
$$= 0.5 + 0.0793 = 0.5793$$

86-11. ③

ⅰ) 주사위를 한 번 던져 나온 눈의 수가 3인 경우

$$\frac{1}{6} \times {}_3C_2 \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{6} \times \frac{3}{8}$$

ⅱ) 주사위를 한 번 던져 나온 눈의 수가 4인 경우

$$\frac{1}{6} \times \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{6} \times \frac{1}{4}$$

iii) 주사위를 한 번 던져 나온 눈의 수가 5인 경우

$$\frac{1}{6}\times{}_5C_2\left(\frac{1}{2}\right)^5=\frac{1}{6}\times\frac{5}{16}$$

iv) 주사위를 한 번 던져 나온 눈의 수가 6인 경우

$$\frac{1}{6}\times{}_3C_2\left(\frac{1}{2}\right)^3=\frac{1}{6}\times\frac{3}{8}$$

i)~iv)에 의하여 구하는 확률은

$$\frac{1}{6}\times\left(\frac{3}{8}+\frac{1}{4}+\frac{5}{16}+\frac{3}{8}\right)=\frac{1}{6}\times\frac{21}{16}=\frac{7}{32}$$

86-12. 62

i) $f(5)=1$일 경우

조건 (나)를 만족시키지 않는다.

ii) $f(5)=2$일 경우

$f(1)f(2)f(3)f(4)=4$

$f(1)$, $f(2)$, $f(3)$, $f(4)$의 값이 1, 1, 1, 4가 되어야 하므로

$$\frac{4!}{1!3!}=4$$

iii) $f(5)=4$일 때

$f(1)f(2)f(3)f(4)=16$

$f(1)$, $f(2)$, $f(3)$, $f(4)$의 값이 1, 1, 2, 8 또는 1, 2, 2, 4가 되어야 하므로

$$\frac{4!}{2!}+\frac{4!}{2!}=12+12=24$$

iv) $f(5)=8$일 때

$f(1)f(2)f(3)f(4)=64$

$f(1)$, $f(2)$, $f(3)$, $f(4)$의 값이 1, 2, 4, 8 또는 1, 4, 4, 4 또는 2, 2, 4, 4가 되어야 하므로

$$4!+\frac{4!}{3!}+\frac{4!}{2!2!}=24+4+6=34$$

i)~iv)에 의하여 구하는 경우의 수는

$4+24+34=62$

미적분

86-9. 3

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty}(a_{n+1}+b_n)&=\sum_{n=1}^{\infty}(a_{n+1}+b_{n+1}-b_{n+1}+b_n)\\&=\sum_{n=1}^{\infty}(a_{n+1}+b_{n+1})-\sum_{n=1}^{\infty}(b_{n+1}-b_n)\\&=\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n)-(a_1+b_1)-\left(\lim_{n\to\infty}b_n-b_1\right)\\&=5-a_1-\lim_{n\to\infty}b_n=3-\lim_{n\to\infty}b_n=0\end{aligned}$$

$\therefore \lim_{n\to\infty}b_n=3$

86-10. ②

$f'(x)=2ax+\ln x+\ln 4,\ f''(x)=2a+\dfrac{1}{x}$

조건 (가)에 의해 $(2,\ f(2))$가 변곡점이므로

$f''(2)=2a+\dfrac{1}{2}=0,\ a=-\dfrac{1}{4}$

조건 (나)에서 변곡점에서의 접선의 방정식은

$y=f'(2)(x-2)+f(2)$이므로

$-2f'(2)+f(2)=-2(\ln 8-1)+(b-3+\ln 64)=1$

$b=2$

$\therefore\ f(1)=\dfrac{3}{4}+\ln 4$

86-11. 258

$g(x)=e^{2x}+e^{x}+1$이라 하자.

곡선 $y=\dfrac{g(x)}{t}-1$과 x축의 교점을 $(s,0)$이라 하면

$g(s)=t$이다.

$(s,0)$에서 곡선 $y=\dfrac{g(x)}{t}-1$에 접하는 직선의 기울기

$f(t)=\dfrac{g'(s)}{t}$이다.

$$\begin{aligned} f'(t)&=\frac{d}{dt}\left\{\frac{1}{t}g'(s)\right\}\\ &=\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{t}\right)\times g'(s)+\frac{1}{t}\times\frac{d}{dt}\{g'(s)\}\\ &=-\frac{1}{t^2}g'(s)+\frac{1}{t}\cdot\frac{ds}{dt}g''(s) \quad \cdots ㉠\end{aligned}$$

이때, $t=7$일 때,

$g(s)=e^{2s}+e^{s}+1=7$이므로

$e^{s}=2,\ s=\ln 2$이다.

한편, $g'(x)=2e^{2x}+e^{x},\ g''(x)=4e^{2x}+e^{x}$이므로

$g'(\ln 2)=10,\ g''(\ln 2)=18$이고

$g(s)=t$를 t에 대해 미분하면 $\dfrac{ds}{dt}g'(s)=1$이므로

$\dfrac{ds}{dt}=\dfrac{1}{g'(\ln 2)}=\dfrac{1}{10}$

따라서 ㉠에 $t=7$을 대입하면

$f'(7)=-\dfrac{1}{49}\times 10+\dfrac{1}{7}\times\dfrac{1}{10}\times 18=\dfrac{13}{245}$

$\therefore\ p+q=245+13=258$

86-12. 857

제곱근 안은 항상 0 또는 양수이어야 하므로

$x\le 3$일 때, $f(x)\le f(1)$이고,

$x>3$일 때, $f(x)\ge f(a)$이어야 한다.

따라서 삼차함수 $f(x)$는 $x=1$에서 극대, $x=a$에서 극소이다.

또한 함수 $g(x)$는 $x=3$에서 연속이므로

$\sqrt{f(1)-f(3)}\times f'(3)=\sqrt{f(3)-f(a)}\times f'(3)$

위 식이 성립하려면 $3-1=a-3$이어야 하므로

$a=5$

$f(x)=(x-1)^2(x-7)+k$ (k는 상수)

$$\frac{3}{2}\int_1^8 |g(x)|dx$$

$$=\int_1^3 \frac{3}{2}\sqrt{f(1)-f(x)}\times\{-f'(x)\}dx$$

$$+\int_3^5 \frac{3}{2}\sqrt{f(x)-f(5)}\times\{-f'(x)\}dx$$

$$+\int_5^8 \frac{3}{2}\sqrt{f(x)-f(5)}\times f'(x)dx$$

$$=\left[\{f(1)-f(x)\}^{\frac{3}{2}}\right]_1^3-\left[\{f(x)-f(5)\}^{\frac{3}{2}}\right]_3^5$$

$$+\left[\{f(x)-f(5)\}^{\frac{3}{2}}\right]_5^8$$

$$=\{f(1)-f(3)\}^{\frac{3}{2}}+\{f(3)-f(5)\}^{\frac{3}{2}}+\{f(8)-f(5)\}^{\frac{3}{2}}$$

$$=64+64+729=857$$

Day. 87

수학1, 수학2

87-1. 700

점 A의 x좌표를 α, 점 B의 x좌표를 β라 하자

방정식 $x^2-\sqrt{n}x-1=0$의 두 해가 α, β이므로

$\alpha+\beta=\sqrt{n}$, $\alpha\beta=-1$

$\alpha-\beta=\sqrt{n+4}$

따라서 $a_n=(\alpha-\beta)\sqrt{n+1}=\sqrt{(n+1)(n+4)}$

$$\sum_{n=1}^{10}\{a_n\}^2=\sum_{n=1}^{10}(n^2+5n+4)$$

$$=\frac{10\times11\times21}{6}+5\times\frac{10\times11}{2}+4\times10=700$$

87-2. ②

$n\le8$일 때, $a_n=4$, $n>8$일 때, $a_n=\dfrac{n}{2}$

이면 $\displaystyle\sum_{k=1}^{15}a_k$이 최대이다. 이때의 최댓값은

$$4\times8+\frac{9+10+\cdots+15}{2}=32+42=74$$

87-3. 2

$f'(x)=3x^2+2a$, $f'(0)=2a$

$g(x)=2ax+1$

$f(x)$와 $g(x)$ 모두 증가함수이므로
$f(g(0))$이 구간 $[0, 5]$에서의 $f(g(x))$의 최솟값이다.
$f(g(0))=f(1)=2a+2=6$
$\therefore\ a=2$

87-4. ④

$a^2-9a-14=(a-2)(a-7)$

i) $a^2-9a-14=0$, $a=2$ 또는 $a=7$인 경우
$a=2$이면 $f(x)=2$, $a=7$이면 $f(x)=-3$이므로
x축과 만나지 않는다.

ii) $a^2-9a-14<0$, $2<a<7$일 때,
x축과 만나지 않으려면, $4-a\le 0$, $a\ge 4$
즉, $a=4, 5, 6$일 때, x축과 만나지 않는다.

iii) $a^2-9a-14>0$, $a<2$ 또는 $a>7$일 때,
x축과 만나지 않으려면, $4-a\ge 0$, $a\le 4$
즉, $a=1$일 때, x축과 만나지 않는다.

i)~iii)에 의하여 조건을 만족시키는 자연수 a는
$1, 2, 4, 5, 6, 7$이고 개수는 6이다.

87-5. ③

점 A의 좌표는 $\left(\frac{4}{3}, \sqrt{3}k\right)$이고

점 B의 좌표는 $\left(\frac{2}{3}, -\sqrt{3}k\right)$이다.

$\overline{\mathrm{OA}}=\overline{\mathrm{AB}}$이므로

$\sqrt{\frac{16}{9}+3k^2}=\sqrt{\frac{4}{9}+12k^2}$

$\therefore\ k=\frac{2\sqrt{3}}{9}$

따라서 삼각형 OAB의 넓이는

$\frac{1}{2}\times 1\times 2\sqrt{3}k=\frac{2}{3}$

87-6. ⑤

등비수열의 공비를 r이라 하면
조건 (가)에서 $r^4=16$
따라서 $r=2$ 또는 $r=-2$
이때 조건 (나)를 만족시키려면
$a_2\times a_3=1$이거나 $a_2\times a_4=1$이 되어야 한다.

i) $a_2\times a_3=1$인 경우
$(a_1)^2r^3=8(a_1)^2=1$
$a_1=-\frac{\sqrt{2}}{4}$ 또는 $a_1=\frac{\sqrt{2}}{4}$

ii) $a_2\times a_4=1$인 경우
$(a_1)^2r^4=16(a_1)^2=1$
$a_1=\frac{1}{4}$ 또는 $a_1=-\frac{1}{4}$

ⅰ), ⅱ)에 의하여 모든 a_1의 곱은

$$\left(-\frac{\sqrt{2}}{4}\right)\times\frac{\sqrt{2}}{4}\times\left(-\frac{1}{4}\right)\times\frac{1}{4}=\frac{1}{128}$$

87-7. 28

$\overline{AB}=4$라 하자.

$\overline{DE}=4\sin(\angle DBE)=\dfrac{10}{\sqrt{7}}$

$\overline{CD}=x$라 하면, $\overline{AC}\times\overline{BC}=\overline{CD}\times\overline{CE}$이므로

$1\times3=x\left(\dfrac{10}{\sqrt{7}}-x\right)$

$\sqrt{7}x^2-10x+3\sqrt{7}=(\sqrt{7}x-3)(x-\sqrt{7})=0$

$x=\dfrac{3}{\sqrt{7}}$ $(\because\ \overline{BE}<\overline{BD})$

$\overline{AD}=y$, $\overline{BD}=z$라 하면,

$\overline{AD}^2+\overline{BD}^2=\overline{AB}^2$, $y^2+z^2=16$

$\left(\dfrac{3}{4}\overline{AD}\right)^2+\left(\dfrac{1}{4}\overline{BD}\right)^2=\overline{CD}^2$, $\dfrac{9}{16}y^2+\dfrac{1}{16}z^2=\dfrac{9}{7}$

$y=\dfrac{2}{\sqrt{7}}$, $z=\dfrac{6\sqrt{3}}{\sqrt{7}}$

$\sin(\angle AED)=\sin(\angle ABD)=\dfrac{\overline{AD}}{\overline{AB}}=\dfrac{1}{2\sqrt{7}}$

$\therefore\ \dfrac{1}{\sin^2(\angle AED)}=28$

87-8. 31

$h(x)=\displaystyle\int_0^x f(t)dt$ 라 하면,

함수 $h(x)$는 최고차항이 양수이고 $h(0)=0$인 삼차함수이다.

이때 $h(x)$가 조건 (나)와 (다)를 만족시키므로

$h(x)=ax^2(x-k)$ $(a>0)$

한편 $h'(x)=f(x)$이고, 조건 (가)에서

$\displaystyle\lim_{x\to0}\{f(x+2)-f(x)\}=f(2)-f(0)=0$

$f(0)=f(2)=0$ $(\because\ h'(0)=0)$이므로

함수 $h(x)$는 $x=0$에서 극댓값, $x=2$에서 극솟값을 가진다.

따라서 $k=3$, $h(x)=ax^2(x-3)$

$f(x)=3ax(x-2)$, $f'(x)=6ax-6a$

$$\begin{aligned}\lim_{x\to0}\frac{f(x+2)-f(x)}{x}&=\lim_{x\to0}\left\{\frac{f(x+2)-f(2)}{x}-\frac{f(x)-f(0)}{x}\right\}\\&=f'(2)-f'(0)=6a-(-6a)\\&=12a=12\end{aligned}$$

$\therefore\ a=1$, $g(x)=|x^2(x-3)|$

$\displaystyle\int_0^3 g(x)dx=\int_0^3 -x^2(x-3)dx=\frac{27}{4}$

$\therefore\ p+q=31$

확률과 통계

87-9. ④

A와 B가 이웃할 때, A와 B를 하나로 묶고 나머지와 원형으로 나열하는 수는 $(6-1)!=120$

여기서 A와 B의 순서를 바꾸는 경우의 수는 2!

A와 B가 이웃하고, C와 D가 이웃할 때, A와 B를 하나로 묶고, C와 D를 하나로 묶고 나머지와 원형으로 나열하는 수는 $(5-1)!=24$

여기서 A와 B의 순서를 바꾸는 경우의 수는 2!

C와 D의 순서를 바꾸는 경우의 수는 2!

따라서 구하는 경우의 수는

$120\times2-24\times2\times2=144$

87-10. ③

확률변수 W가 정규분포 $\mathrm{N}(m+3,\ 6^2)$을 따르므로

$$\mathrm{P}(W\geq 6)=\mathrm{P}\left(Z\geq\frac{6-m-3}{6}\right)=0.1587$$

$$\frac{6-m-3}{6}=1,\ m=-3$$

확률변수 X가 정규분포 $\mathrm{N}(-3,\ {\sigma_1}^2)$을 따르고

확률변수 Y가 정규분포 $\mathrm{N}(-3,\ {\sigma_2}^2)$을 따르므로

$$\mathrm{P}(X\leq 6)+\mathrm{P}(Y\geq 9)=\mathrm{P}\left(Z\leq\frac{9}{\sigma_1}\right)+\mathrm{P}\left(Z\geq\frac{12}{\sigma_2}\right)=1$$

$$\frac{9}{\sigma_1}=\frac{12}{\sigma_2}$$

$$\therefore\ \frac{\sigma_2}{\sigma_1}=\frac{4}{3}$$

87-11. 50

X	1	2	3	4	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{3}$	1

$$\mathrm{V}(X)=\mathrm{E}(X^2)-\{\mathrm{E}(X)\}^2=\frac{17}{2}-\left(\frac{8}{3}\right)^2=\frac{25}{18}$$

$$\mathrm{V}(6X-2)=36\mathrm{V}(X)=50$$

87-12. 50

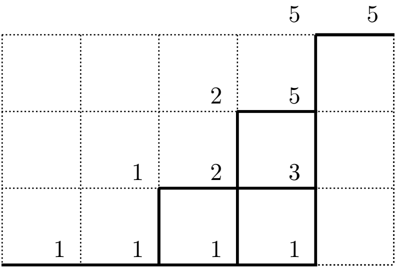
주사위의 눈이 홀수가 나올 확률과 짝수가 나올 확률이 같으므로 경우의 수로 접근하자.

8번째 시행에서 A가 이겨야 하므로, 8번째 시행에서 홀수가 나오고 그전까지 7번의 시행에서 홀수가 4번, 짝수가 3번 나와야 한다.

따라서 $\frac{7!}{4!\times3!}=35$가지이다.

그 중에서 A가 항상 B보다 높은 계단에 있으려면 매 시행마다

누적해서 나온 홀수의 개수가 항상 짝수의 개수보다 많아야 한다. 이는 홀수가 나왔을 때 가로방향, 짝수가 나왔을 때 세로방향으로 이동하는 길찾기로 접근해 보면 5가지이다.



따라서 구하는 확률은 $\frac{5}{35}=\frac{1}{7}$

$\therefore\ p^2+q^2=50$

미적분

87-9. ④

$$g(t)=\frac{1}{2}te^{-\frac{t^2}{a}}$$

$$g'(t)=\frac{1}{2a}\times e^{\frac{-t^2}{a}}(a-2t^2)$$

$g'(2)=0$이므로 $a-8=0$

$\therefore\ a=8$

87-10. ③

$$\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}}\frac{f(\tan x)}{\sin^2 x}dx$$

$$=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}}f(\tan x)\csc^2 x\,dx$$

$$=-\Big[\cot x\, f(\tan x)\Big]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}}+\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}}\frac{f'(\tan x)}{\sin x\cos x}dx$$

$$=-f(1)+\sqrt{3}f\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)+2\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}}\frac{f'(\tan x)}{2\sin x\cos x}dx$$

$$=2+2\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}}\frac{f'(\tan x)}{\sin 2x}dx=4$$

$$\therefore\ \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}}\frac{f'(\tan x)}{\sin 2x}dx=1$$

87-11. ④

점 P가 출발한지 t초 후 점 P의 좌표는 $(t,\ 0)$이므로

$$S(t)=\int_0^t\{1+2\ln(x+1)-\ln(x+1)\}dx$$

$$=\int_0^t\{1+\ln(x+1)\}dx$$

$S'(t)=1+\ln(t+1)$

$S'(a)=1+\ln(a+1)=3$

$\therefore\ a=e^2-1$

$$S(a)=\int_0^{e^2-1}\{1+\ln(x+1)\}dx$$

$$=\int_1^{e^2}(1+\ln t)dt\ \left(\because\ x+1=t,\ \frac{dx}{dt}=1\right)$$

$$=\Big[t+t\ln t-t\Big]_1^{e^2}=\Big[t\ln t\Big]_1^{e^2}=2e^2$$

87-12. 150

$f'(x)=-a\sin x+b\cos x$

$g'(x)=f'(x)e^{f(x)}$

$g'\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{b-a}{\sqrt{2}}e^{\frac{a+b}{\sqrt{2}}}=0$이므로

$a=b,\ f(x)=a(\cos x+\sin x)$

$f''(x)=-a(\cos x+\sin x)$

$g'(x)=f''(x)e^{f(x)}+\{f(x)\}^2e^{f(x)}$

$g''\left(\frac{\pi}{4}\right)<0$이므로 ($\because$ 극댓값)

$f''\left(\frac{\pi}{4}\right)=-\sqrt{2}a<0,\ a>0$

조건 (나)에서 $g'(k)=f'(k)g(k)=2g(k)$이므로

$f'(k)=-a(\sin k-\cos k)=2$ $\cdots$ ㉠

$g''(k)=[f''(k)+\{f'(k)\}^2]g(k)$

$=\{f''(k)+4\}g(k)=0$이므로

$f''(k)=-a(\cos k+\sin k)=-4$ $\cdots$ ㉡

㉠과 ㉡을 연립하면

$a\sin k=1,\ a\cos k=3$

$a^2\sin k+a^2\cos k=a^2=10$

$\therefore\ a=\sqrt{10},\ \sin k=\frac{1}{\sqrt{10}},\ \cos k=\frac{3}{\sqrt{10}}$

$$\frac{9ab}{\sin 2k}=\frac{9ab}{2\sin k\cos k}=\frac{9\times\sqrt{10}\times\sqrt{10}}{2\times\frac{1}{\sqrt{10}}\times\frac{3}{\sqrt{10}}}=150$$

Day. 88

수학1, 수학2

88-1. ⑤

$|f(a)|=\{f(a)\}^2$

$\{f(a)\}^2-|f(a)|=|f(a)|\{|f(a)|-1\}=0$

$f(a)=a^2-4a+k=-1$ or 0 or 1

위 방정식의 해의 개수가 3이므로

방정식 $a^2-4a+k=0$이 중근을 가져야 한다.

$\frac{D}{4}=4-k=0$

$\therefore\ k=4$

88-2. ③

조건 (가)에 의해 $a_7=0$

$\{a_n\}$의 공차를 d라 하면, 조건 (나)에서

$\sum_{n=3}^{7}|a_n-a_5|=2|d|+|d|+0+|d|+2|d|=6|d|=18$

$|d|=3$

이때 $d=3$이면 $\sum_{k=1}^{m}(a_k+|a_k|)$는 $m=7$일 때부터 계속

증가하기 때문에 최댓값을 가질 수 없다.

따라서 $d=-3,\ a_n=-3n+21$

$\sum_{k=1}^{m}(a_k+|a_k|)$은 $m\geq 6$ 일 때 최댓값 M을 가지며

$M=\sum_{k=1}^{6}2|d|k=\sum_{k=1}^{6}6k=126$

88-3. 33

$\lim_{h\to0}\frac{g(2+2h)-3}{h}=8$에서

$\lim_{h\to0}\{g(2+2h)-3\}=0,\ g(2)=3$

$\lim_{h\to0}\frac{g(2+2h)-3}{h}=2\times\lim_{h\to0}\frac{g(2+2h)-g(2)}{2h}=2g'(2)=8$

$g'(2)=4$

함수 $g(x)$가 $x=2$에서 연속이므로

$f(2)=f(-2)=3$

따라서 $f(x)=(x^2-4)(x^2+ax+b)+3$으로 둘 수 있다.

함수 $g(x)$가 $x=2$에서 좌미분계수와 우미분계수가 같으므로

$\lim_{x\to2+}g'(x)=f'(2)=\lim_{x\to2-}g'(x)=-f'(-2)=4$

$f'(x)=2x(x^2+ax+b)+(x^2-4)(2x+a)$

$f'(2)=4(4+2a+b)=4$

$2a+b=-3$ $\cdots$ ㉠

$f'(-2)=-4(4-2a+b)=-4$

$-2a+b=-3$ $\cdots$ ㉡

㉠, ㉡을 연립하면 $a=0$, $b=-3$

$\therefore\ f(x)=(x^2-4)(x^2-3)+3$

$f(3)=5\times6+3=33$

88-4. ①

a_5의 최솟값은 $1+2+2+2+2=9$

a_5의 최댓값은 $1+6+6+6+6=25$

a_5가 될 수 있는 값은 9부터 25까지의 모든 홀수이므로

모든 a_5의 값의 합은

$\dfrac{9+25}{2}\times9=153$

88-5. ①

$2\tan^2x-4\tan x+k-1=0$

$\tan x=t$라 하면,

$2t^2-4t+k-1=2(t-1)^2+k-3=0$ $\cdots$ ㉠

$t\ge0$일 때 $\tan x=t$를 만족시키는 $x\left(0\le x<\dfrac{3}{2}\pi\right)$는 2개,

$t<0$일 때 $\tan x=t$를 만족시키는 x는 1개이다.

i) $k>3$일 때

t에 대한 방정식 ㉠은 해를 갖지 않는다.

$\therefore\ f(k)=0$

ii) $k=3$일 때

t에 대한 방정식 ㉠은 양의 중근을 가진다.

$\therefore\ f(k)=2$

iii) $1\le k<3$일 때

t에 대한 방정식 ㉠은 서로 다른 음수가 아닌 실근을 가진다.

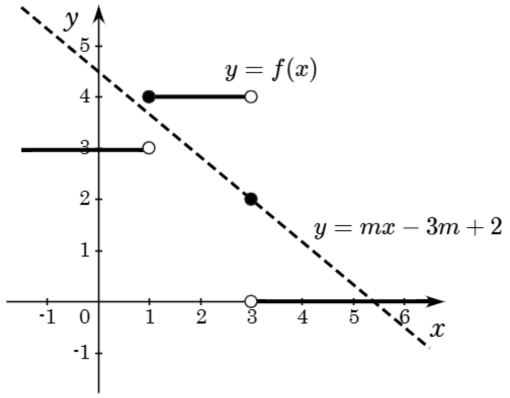
$\therefore\ f(k)=4$

iv) $k<1$일 때

t에 대한 방정식 ㉠은 양수인 실근과 음수인 실근을 가진다.

$\therefore\ f(k)=3$

따라서 $y=f(x)$의 그래프는 다음과 같다.



직선 $y=mx-3m+2$는 점 $(3,\ 2)$을 지나고 기울기가 m인 직선이므로 이 직선이 $y=f(x)$의 그래프와 서로 다른 두 점에서

만나려면 점 $(1,\ 3)$이나 $(1,\ 3)$과 $(1,\ 4)$ 사이를 지나가야 한다.

따라서 $-1 < m \le -\dfrac{1}{2}$이고,

m의 최댓값은 $-\dfrac{1}{2}$

88-6. 5

조건 (나)를 해석하면 열린구간 $(2-c,\ 2)$과 $(2,\ 2+c)$에서 $f(x)$가 0이 아니며 항상 부호가 같아야 한다.

그런데 조건 (가)에서 $f(2)=0$이므로 곡선 $y=f(x)$는 $x=2$에서 x축에 접해야 한다.

또한 조건 (나)에서 곡선 $y=f(x)$가 직선 $y=-4$에 접해야 한다.

따라서 $f(x)=(x-2)^2(x-k)$ (단, $k>2$)라 둘 때,

함수 $f(x)$는 $x=\dfrac{2k+2}{3}$에서 극솟값을 가지므로

$$f\left(\frac{2k+2}{3}\right)=\left(\frac{2}{3}k-\frac{4}{3}\right)^2\left(-\frac{1}{3}k+\frac{2}{3}\right)=-4\left(\frac{1}{3}k-\frac{2}{3}\right)^3=-4$$

$k=5$

$\therefore\ f(x)=(x-2)^2(x-5)$

모든 실수 x에 대하여 $\displaystyle\int_a^x f(t)dt \ge 0$을 만족시키려면

구간 $(-\infty,\ a]$에서 $f(x)\le 0$이고 구간 $[a,\ \infty)$에서 $f(x)\ge 0$ 이어야 하므로 $a=5$

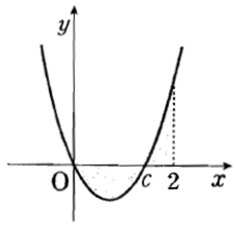
88-7. ②

$\displaystyle\int_0^2 |f(t)|dt=c$ (단, $c\ge 0$)라고 하면,

$f(x)=x^2-x\displaystyle\int_0^2 |f(t)|dt=x^2-cx$이며

이를 적분식에 대입하면 $c=\displaystyle\int_0^2 |t^2-ct|dt$

i) $0\le c<2$일 때



$$c=\int_0^c -(t^2-ct)dt+\int_c^2 (t^2-ct)dt$$

$$=-\left[\frac{t^3}{3}-\frac{ct^2}{2}\right]_0^c+\left[\frac{t^3}{3}-\frac{ct^2}{2}\right]_c^2$$

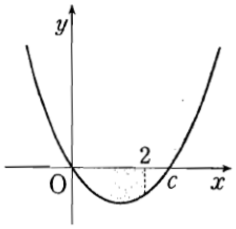
$$=-\frac{c^3}{3}+\frac{c^3}{2}+\frac{1}{3}(8-c^3)-\frac{c}{2}(4-c^2)=\frac{c^3}{3}-2c+\frac{8}{3}$$

$c^3-9c+8=0,\ (c-1)(c^2+c-8)=0$

$c=1,\ \dfrac{-1\pm\sqrt{33}}{2}$

조건에서 $0 \le c < 2$이므로 $c=1$

ii) $c \ge 2$일 때



$$c=\int_0^2 -(t^2-ct)dt=-\left[\frac{t^3}{3}-\frac{ct^2}{2}\right]_0^2=-\frac{8}{3}+2c$$

$c=\frac{8}{3}$이므로 $c \ge 2$를 만족시킨다.

i)과 ii)에 의해 $f_1(x)=x^2-x$, $f_2(x)=x^2-\frac{8}{3}x$

$\therefore\ f_1'(0)+f_2'(0)=-1-\frac{8}{3}=-\frac{11}{3}$

88-8. 15

사인법칙을 이용하면

$\overline{OA}=\frac{\overline{AC}}{2\sin\alpha}$, $\overline{O'A}=\frac{\overline{AC}}{2\sin\beta}=\frac{\overline{AC}}{2\sqrt{2}\sin\alpha}$

두 외접원의 넓이의 합이 9π이므로

$$\pi\left(\frac{\overline{AC}}{2\sin\alpha}\right)^2+\pi\left(\frac{\overline{AC}}{2\sqrt{2}\sin\alpha}\right)^2=\frac{3}{8}\pi\left(\frac{\overline{AC}}{\sin\alpha}\right)^2=9\pi$$

$\therefore\ \frac{\overline{AC}}{\sin\alpha}=2\sqrt{6}$, $\overline{OA}=\sqrt{6}$, $\overline{O'A}=\sqrt{3}$

$\angle ABC+\angle ADC=2\alpha+2\beta$

이때 삼각형 AOO′과 삼각형 COO′이 합동이므로

$\angle AOO'+\angle COO'=\alpha+\beta$

$\therefore\ \angle OAO'=\pi-\alpha-\beta$

삼각형 AOO′에서 코사인법칙을 이용하면

$$\overline{OO'}^2=6+3-2\sqrt{6}\times\sqrt{3}\cos(\pi-\alpha+\beta)$$
$$=9+6\sqrt{2}\times\cos(\alpha+\beta)=15$$

확률과 통계

88-9. ④

$c=1.96\times\frac{20}{\sqrt{100}}=3.92$

$d=2.58\times\frac{20}{\sqrt{100}}=5.16$

$\therefore\ c+d=3.92+5.16=9.08$

88-10. ③

두 수가 서로소인 조합은 다음과 같다.

$(2,\ 3)$, $(2,\ 5)$, $(3,\ 4)$, $(3,\ 5)$, $(4,\ 5)$, $(5,\ 6)$

따라서 구하는 확률은 $\dfrac{6\times2}{({}_5\mathrm{C}_1)^2}=\dfrac{12}{25}$

88-11. 204

총 100회의 독립시행에서 1이 적힌 공이 나오는 횟수를 확률변수 Y라 하자. 그러면 3이 적힌 공이 나오는 횟수는 $100-Y$이다. 확률변수 Y는 이항분포 $\mathrm{B}\left(100,\ \dfrac{4}{5}\right)$를 따르므로

$\mathrm{E}(Y)=100\times\dfrac{4}{5}=80$

$\mathrm{V}(Y)=100\times\dfrac{4}{5}\times\dfrac{1}{5}=16$

이때, $X=Y+3(100-Y)=300-2Y$이므로

$\mathrm{E}(X)=300-2\mathrm{E}(Y)=140$

$\mathrm{V}(X)=4\mathrm{V}(Y)=64$

$\therefore\ \mathrm{E}(X)+\mathrm{V}(X)=140+64=204$

88-12. 62

조건 (나)에서 $a=b$ 또는 $c=d$

i) $a=b$인 경우

$a=b=1$일 때, $c+d+e=8$에서 ${}_3\mathrm{H}_5=21$

$a=b=2$일 때, $c+d+e=6$에서 ${}_3\mathrm{H}_3=10$

$a=b=3$일 때, $c+d+e=4$에서 ${}_3\mathrm{H}_1=3$

따라서 모든 순서쌍 (a, b, c, d, e)의 개수는

$21+10+3=34$

ii) $c=d$인 경우

i)과 상황이 같으므로 모든 순서쌍 (a, b, c, d, e)의 개수는

$21+10+3=34$

iii) $a=b$이고, $c=d$인 경우

$a=b=1$일 때, $c=d=1$ 또는 2 또는 3

$a=b=2$일 때, $c=d=1$ 또는 2

$a=b=3$일 때, $c=d=1$

따라서 모든 순서쌍 (a, b, c, d, e)의 개수는 6

i)~iii)에 의하여 두 조건 (가), (나)를 만족시키는 순서쌍 (a, b, c, d, e)의 개수는

$34+34-6=62$

미적분

88-9. ③

$3a_{n+1}=\pi-a_n$이므로

$3\alpha=\pi-\alpha$

$\therefore\ \dfrac{\pi}{\alpha}=4$

88-10. ①

$$\int_0^k x\{f'(x)+g'(x)\}dx$$

$$=[x\{f(x)+g(x)\}]_0^k-\int_0^k\{f(x)+g(x)\}dx$$

$$=k\{f(k)+g(k)\}-\int_0^k f(x)dx-\left\{kf(k)-\int_0^k f(x)dx\right\}$$

$$=k(k+k)-k^2=k^2=9$$

$$\therefore\ k=3$$

$$f(k)=k,\ a^3-1=3$$

$$\therefore\ a=4^{\frac{1}{3}},\ f(x)=4^{\frac{x}{3}}-1$$

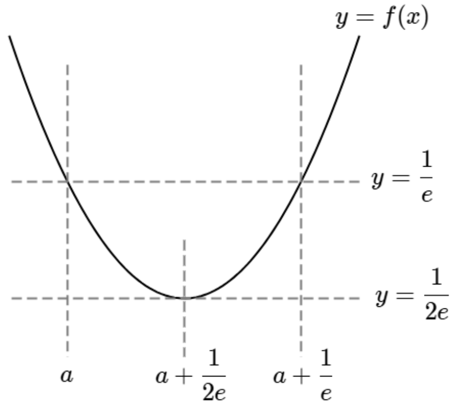
따라서 구하려는 넓이는

$$2\times\int_0^3\{x-f(x)\}dx=15-\frac{9}{\ln 2}$$

88-11. ①

$$g'(x)=f'(x)\ln f(x)+f'(x)=f'(x)\{\ln f(x)+1\}$$

따라서 $g(x)$는 $f'(x)=0$일 때 극대, $f(x)=\frac{1}{e}$일 때 극소이다.



조건 (가)에서 방정식 $f(x)=\frac{1}{e}$의 두 해가 $a,\ a+\frac{1}{e}$이므로

$f(x)=k(x-a)\left(x-a-\frac{1}{e}\right)+\frac{1}{e}$ (단, $k>0$)이라 둘 수 있다.

이차함수 $f(x)$는 $x=a+\frac{1}{2e}$일 때 최솟값 $\frac{1}{2e}$을 가지므로

$$f\left(a+\frac{1}{2e}\right)=-\frac{k}{4e^2}+\frac{1}{e}=\frac{1}{2e}$$

$$\therefore\ k=2e,\ f(x)=2e(x-a)\left(x-a-\frac{1}{e}\right)+\frac{1}{e}$$

곡선 $y=f(x)$는 $x=a+\frac{1}{2e}$에 대하여 대칭이므로

곡선 $y=g(x)$도 $x=a+\frac{1}{2e}$에 대하여 대칭이다.

따라서 조건 (나)에서 x에 대한 방정식 $g(x)=g(t)$가 서로 다른 세 실근을 가지려면 $g(t)=g\left(a+\frac{1}{2e}\right)$이어야 하고,

이러한 t의 값을 작은 수부터 차례로 α, β, γ라 하면,

$\beta = a + \frac{1}{2e}$, $\alpha + \gamma = 2\left(a + \frac{1}{2e}\right)$

$\alpha + \beta + \gamma = 3\left(a + \frac{1}{2e}\right) = 6$

$\therefore\ a = 2 - \frac{1}{2e}$

$f(x) = 2e\left(x - 2 + \frac{1}{2e}\right)\left(x - 2 - \frac{1}{2e}\right) + \frac{1}{e}$

$\therefore\ f(3) = 2e\left(1 - \frac{1}{4e^2}\right) + \frac{1}{e} = 2e + \frac{1}{2e}$

88-12. 3

곡선 $y = f(x)$의 원점에서의 접선의 기울기가 $\frac{\pi}{2}$이므로

t의 값이 $\frac{\pi}{2}$보다 클 때와 작을 때로 나누어 생각해야 한다.

i) $t > \frac{\pi}{2}$일 때

$h(t)$는 원점과 점 $(1,\ t)$를 지나는 직선의 기울기이다.

$h(t) = t$

$h'(t) = 1$

$\therefore\ h'(\pi) = 1$

ii) $1 < t \leq \frac{\pi}{2}$일 때

$h(t)$는 점 $(1,\ t)$에서 곡선 $y = \sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)$ $(0 \leq x < 1)$에 그은 접선의 기울기이다.

이때, 접점의 x좌표를 α라 하면

$h(t) = \frac{\pi}{2}\cos\frac{\pi}{2}\alpha$

$h'(t) = -\frac{\pi^2}{4}\sin\frac{\pi}{2}\alpha\frac{d\alpha}{dt}$ $\cdots$ ㉠

$\frac{d\alpha}{dt}$를 구해야 하므로 곡선 $y = f(x)$의 점 $(\alpha,\ f(\alpha))$에서의 접선의 기울기와 $(\alpha,\ f(\alpha))$과 $(1,\ t)$ 사이의 기울기가 같다는 점을 이용하여 α와 t 사이의 관계식을 구하면

$$\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}\alpha\right) - t}{\alpha - 1} = f'(\alpha) = \frac{\pi}{2}\cos\left(\frac{\pi}{2}\alpha\right)$$

$$\sin\frac{\pi}{2}\alpha - t = (\alpha - 1)\frac{\pi}{2}\cos\frac{\pi}{2}\alpha$$

양변을 t에 대하여 미분하면

$$\frac{\pi}{2}\cos\frac{\pi}{2}\alpha\frac{d\alpha}{dt} - 1 = \left\{\frac{\pi}{2}\cos\frac{\pi}{2}\alpha - (\alpha - 1)\frac{\pi^2}{4}\sin\frac{\pi}{2}\alpha\right\}\frac{d\alpha}{dt}$$

$$\frac{d\alpha}{dt} = \frac{1}{(\alpha - 1)\frac{\pi^2}{4}\sin\frac{\pi}{2}\alpha}$$

구한 $\frac{d\alpha}{dt}$을 ㉠에 대입하면 $h'(t) = -\frac{1}{\alpha - 1}$

한편 $h(k)=\dfrac{\sqrt{2}}{4}\pi$일 때

$\dfrac{\pi}{2}\cos\dfrac{\pi}{2}\alpha=\dfrac{\sqrt{2}}{4}\pi,\ \alpha=\dfrac{1}{2}$

$\therefore\ h'(k)=-\dfrac{1}{\dfrac{1}{2}-1}=2$

$\therefore\ h'(\pi)+h'(k)=1+2=3$

Day. 89

수학1, 수학2

89-1. ⑤

$a_1=2,\ a_3=-2,\ a_5=2,\ a_7=-2,\ a_9=2,\ \cdots$

$a_2=3,\ a_4=5,\ a_6=7,\ a_8=9,\ a_9=11,\ \cdots$

$$\sum_{n=1}^{30}a_n=\sum_{n=1}^{15}a_{2n-1}+\sum_{n=1}^{15}a_{2n}=2+\sum_{n=1}^{15}(2n+1)$$

$$=2+2\times\frac{15\cdot 16}{2}+15=257$$

89-2. 5

i) $k=0$일 때

조건 (가)를 만족시키나

$\log_2 k$가 존재할 수 없으므로 조건 (나)를 만족시키지 않는다.

ii) $k\neq 0$일 때

조건 (가)를 만족시키려면 $k>0$이고

kx^2+kx+2의 판별식 $D=k^2-8k<0$ 이어야 한다.

$\therefore\ 0<k<8\ \cdots$ ㉠

또한 조건 (나)를 만족시키려면 $k>0$이고

$(3+\log_2 k)x^2+2(1+\log_2 k)x+1=0$의 판별식

$\dfrac{D}{4}=(1+\log_2 k)^2-(3+\log_2 k)>0$

$(\log_2 k)^2+\log_2 k-2=(\log_2 k+2)(\log_2 k-1)>0$

$\log_2 k<-2,\ \log_2 k>1$

$\therefore\ 0<k<\dfrac{1}{4},\ k>2\quad\cdots$ ㉡

㉠과 ㉡을 동시에 만족시키는 정수는

$k=3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7$

따라서 조건을 만족시키는 정수 k의 개수는 5

89-3. ③

함수 $\dfrac{1}{f(x)}$이 실수 전체의 집합에서 연속이려면

우선 $\lim_{x\to -1-} f(x) = f(-1)$이어야 하는데,

$\lim_{x\to -1-} f(x) = \frac{3}{2}a+4$, $f(-1) = \frac{3}{2}a+4$이므로

$\frac{1}{f(x)}$은 a의 값과 관계없이 $x=-1$에서 연속이다.

또한 실수 전체의 집합에서 $f(x) \neq 0$이어야 한다.

이때 함수 $f(x)$가 $x<-1$에서 감소하는 일차함수이므로

결국 실수 전체의 집합에서 $f(x)>0$이어야 한다.

$x<-1$일 때는

a의 값과 관계없이 $\lim_{x\to -1-} f(x) > 0$이므로 $f(x)>0$이다.

$x \geq -1$일 때는

a의 값과 관계없이 $f(-1)>0$이고,

$f'(x) = 3x^2-3ax = 3x(x-a)$이므로

극솟값 $f(a) = -\frac{1}{2}a^3+3a+5>0$이어야 한다.

위 부등식을 만족시키는 자연수 a는 1, 2, 3 뿐이다.

따라서 a의 값의 합은 6

89-4. ⑤

$y=\log_2(|x|-2)$의 두 점근선은 $x=-2$, $x=2$이므로

선분 AB의 길이는 아무리 짧아도 4보다는 길다.

따라서 모든 자연수 k의 값의 합은 $1+2+3+4=10$

[다른 풀이]

$f(t) = 2^{t+1}+4$이므로 모든 실수 t에 대하여

$f(t)>k$를 만족시키는 k는 4 이하의 자연수이다.

따라서 모든 자연수 k의 값의 합은 $1+2+3+4=10$

89-5. ②

$$f(t) = \begin{cases} 5 & (t=0) \\ 4 & (-1<t<0,\ 0<t<1) \\ 2 & (t=\pm 1) \\ 0 & (t<-1,\ 1<t) \end{cases}$$

$$g(t) = \begin{cases} 4 & (-1<t<1) \\ 2 & (t=-1) \\ 3 & (t=1) \\ 0 & (t<-1,\ 1<t) \end{cases}$$

$$g(t) = \begin{cases} 9 & (t=0) \\ 8 & (-1<t<0,\ 0<t<1) \\ 4 & (t=-1) \\ 5 & (t=1) \\ 0 & (t<-1,\ 1<t) \end{cases}$$

따라서 $\lim_{t\to a+} h(t) > h(a)$를 만족시키는 실수 a는 -1로,

1개뿐이다.

89-6. ⑤

$2^{f(n)}$의 세제곱근 중 실수인 것은 $2^{\frac{f(n)}{3}}$

$2^{f(n)}$의 네제곱근 중 실수인 것은 $-2^{\frac{f(n)}{4}}$, $2^{\frac{f(n)}{4}}$
이 수를 모두 곱한 것은
$-2^{\frac{5}{6}f(n)}=-32$
이므로 $f(n)=6$이 되어야 한다.
이를 만족시키는 자연수 n의 개수가 1이 되려면
$f(2)=6$이거나
$m \geq 4$인 자연수 m에 대하여 $f(m)=6$이 되어야 한다.
$f(2)=6$인 경우 $k=10$
$f(4)=6$인 경우 $k=6$
$f(5)=6$인 경우 $k=1$
$m \geq 6$일 때, $k<0$이므로 조건을 만족시키지 않는다.
따라서 모든 k의 값의 합은 $10+6+1=17$

89-7. 6

$$g'(x)=2x\int_0^x f(t)dt+x^2f(x)-x^2f(x)=2x\int_0^x f(t)dt$$

함수 $g(x)$의 역함수가 존재하려면 실수 전체의 집합에서
$g'(x)>0$이어야 하므로
$x>0$에서 $\int_0^x f(t)dt \geq 0$이어야 한다.
$\int_0^x f(t)dt$는 $x=a$에서 극소인 삼차함수이므로

$$\int_0^a f(t)dt=\int_0^a \{x^2-(a+2)x+2a\}dx=-\frac{a^3}{6}+a^2 \geq 0$$

$a^3-6a^2=a^2(a-6) \leq 0$
따라서 a의 최댓값은 6

89-8. ⑤

조건 (가)에서 $f'(x)$는 최고차항의 계수가 1인 이차함수이고
$g'(x)$는 최고차항의 계수가 1인 일차함수이다.
이때, 조건 (나)에서
$f'(x)g'(x)=(x+2)(x-1)(x-2)$이므로
$f'(x)$는 $(x+2)$, $(x-1)$, $(x-2)$ 중 두 항으로 구성되고
$g'(x)$은 나머지 한 항으로 구성된다.
조건 (다)에서 $f(x)-g(x)$가 증가함수가 되려면
실수 전체의 집합에서 $f'(x)-g'(x) \geq 0$
즉, $f'(x) \geq g'(x)$가 되어야 한다.
이를 만족시키는 경우는
$f'(x)=(x+2)(x-1)$, $g'(x)=x-2$
밖에 없다.
$\therefore\ f'(4)+g'(4)=18+2=20$

확률과 통계

89-9. 430

16명을 임의추출하여 구한 모평균 m에 대한 신뢰도 95%의 신뢰구간이 $90 \le m \le 110$이므로

$2 \times 1.96 \times \dfrac{\sigma}{\sqrt{16}} = 20$, $\sigma = \dfrac{40}{1.96}$

또한, 36명을 임의추출하여 구한 모평균 m에 대한 신뢰도 99%의 신뢰구간이 $\dfrac{21}{20}\overline{x_1} \le m \le a$이므로

$a - \overline{x_2} = 2.58 \times \dfrac{\sigma}{6} = 2.58 \times \dfrac{1}{6} \times \dfrac{40}{1.96} = \dfrac{430}{49}$

$\therefore\ 49\left(a - \overline{x_2}\right) = 430$

89-10. 89

$A \cap B$는 네 수의 곱이 10의 배수가 되는 사건이다.
따라서 숫자 5는 무조건 뽑아야 하고 나머지 세 카드 중에 2, 4, 6, 8 중 하나 이상이 포함되어 있어야 한다.
9장의 카드 중 임의로 4장을 뽑는 경우의 수 : ${}_9\mathrm{C}_4 = 126$
그중 숫자 5를 무조건 뽑는 경우의 수 : ${}_8\mathrm{C}_3 = 56$
그중 2, 4, 6, 8를 한 장도 뽑지 않는 경우의 수 : ${}_4\mathrm{C}_3 = 4$

$\therefore\ \mathrm{P}(A \cap B) = \dfrac{56-4}{126} = \dfrac{26}{63}$, $p + q = 89$

89-11. ③

$b + 1 > 3$에서 $b > 2$이다.

i) $b = 3$일 때
$a \ge b + 2$에서 $a \ge 5$이므로
$a = x + 5$ (x는 음의 아닌 정수)로 놓으면 조건 (가)는
$x + 5 + 3 + c + d = 12$
$x + c + d = 4$
$\therefore\ {}_3\mathrm{H}_4 = 15$

ii) $b = 4$일 때
$a \ge b + 2$에서 $a \ge 6$이므로
$a = x + 6$ (x는 음이 아닌 정수)로 놓으면 조건 (가)는
$x + 6 + 4 + c + d = 12$
$x + c + d = 2$
$\therefore\ {}_3\mathrm{H}_2 = 6$

iii) $b = 5$일 때
$a \ge b + 2$에서 $a \ge 7$이므로
$c = 0$, $d = 0$
$\therefore\ 1$

iv) $b \ge 6$인 경우는 존재하지 않는다.

따라서 순서쌍 $(a,\ b,\ c,\ d)$의 개수는 $15 + 6 + 1 = 22$

89-12. ②

i) A상자에서 검은 공 1개, 흰 공 1개를 꺼내는 경우

A상자에서 검은 공 1개, 흰 공 1개를 꺼내는 확률은

$$\frac{{}_1C_1\times{}_2C_1}{{}_3C_2}=\frac{2}{3}$$

이때, B상자에 검은 공 2개, 흰 공 3개가 있게 되므로

B상자에서 흰 공 2개를 꺼낼 확률은

$$\frac{{}_3C_2}{{}_5C_2}=\frac{3}{10}$$

ii) A상자에서 흰 공 2개를 꺼내는 경우

A상자에서 흰 공 2개를 꺼낼 확률은

$$\frac{{}_2C_2}{{}_3C_2}=\frac{1}{3}$$

이때 B상자에 검은 공 1개, 흰 공 4개가 있게 되므로

B상자에서 흰 공 2개를 꺼낼 확률은

$$\frac{{}_4C_2}{{}_5C_2}=\frac{6}{10}=\frac{3}{5}$$

따라서 구하는 확률은

$$\frac{\frac{1}{3}\times\frac{3}{5}}{\frac{2}{3}\times\frac{3}{10}+\frac{1}{3}\times\frac{3}{5}}=\frac{\frac{1}{5}}{\frac{1}{5}+\frac{1}{5}}=\frac{1}{2}$$

미적분

89-9. ②

접선의 방정식은 $y=-f'(t)(x-t)+f(t)$

$g(t)=tf'(t)+f(t)$

$$G(x)=\int_0^x g(t)dt=\int_0^x \{tf'(t)+f(t)\}dt$$

$$=xf(x)=(2x^2-3x)e^x$$

$G'(x)=(2x^2+x-3)e^x=(x-1)(2x+3)e^x$

따라서 함수 $G(x)$는 $x=-\frac{3}{2}$ 에서 극대, $x=1$ 에서 극소를 가지므로

$$M=G\left(-\frac{3}{2}\right)=9e^{-\frac{3}{2}}$$

$m=G(1)=-e\ \left(\because\ G(-3)=27e^{-3}>G(1)\right)$

$$\therefore\ \frac{M}{m}=-9e^{-\frac{5}{2}}$$

89-10. ⑤

$0<x<e$에서 함수 $f(x)$의 역함수를 $g(x)$라 하자.

$g(0)=1,\ g\left(\frac{k}{e}\right)=e$

$$f(g(x))=\frac{k\ln g(x)}{g(x)}=x$$

$xg(x)=k\ln g(x)$ $\quad\cdots$ ㉠

입체도형의 부피는

$$\int_0^{\frac{k}{e}}\{g(x)\}^2dx=\left[x\{g(x)\}^2\right]_0^{\frac{k}{e}}-\int_0^{\frac{k}{e}}2xg(x)g'(x)dx$$

$$=\left[x\{g(x)\}^2\right]_0^{\frac{k}{e}}-\int_0^{\frac{k}{e}}2xg(x)g'(x)dx$$

$$=\frac{k}{e}\times e^2-\int_0^{\frac{k}{e}}2kg'(x)\ln g(x)dx\quad(\because ㉠)$$

$$=ke-2k\left[g(x)\ln g(x)-g(x)\right]_0^{\frac{k}{e}}$$

$$=ke-2k(0+1)=k(e-2)$$

$$=4e-8$$

$\therefore\ k=4$

89-11. 57

$$\int_0^t f'(x)f(x)e^{f(x)}dx=\left[f(x)e^{f(x)}\right]_0^t-\int_0^t f'(x)e^{f(x)}dx$$

$$=\left[f(x)e^{f(x)}\right]_0^t-\left[e^{f(x)}\right]_0^t$$

$$=f(t)e^{f(t)}-e-e^{f(t)}+e$$

$$=e^{f(t)}(f(t)-1)$$

$$=e^{f(t)}(t^3+at^2+12t)$$

$\therefore\ f(x)=x^3+ax^2+12x+1$

$f'(x)=3x^2+2ax+12$

이때 조건 (가)에서 실수 전체의 집합에서 $f'(x)\geq 0$이므로

$\frac{D}{4}=a^2-36\leq 0$

$\therefore\ -6\leq a\leq 6$

$f(2)=4a+33$이므로, $f(2)$의 최댓값은 $a=6$일 때 57

89-12. 49

$\mathrm{P}(m,\ n)$, $\mathrm{Q}(n,\ m)$, $\mathrm{R}(n,\ -m)$이라 하자.

점 P에서 직선 QR에 내린 수선의 발을 $\mathrm{H}(n,\ n)$이라 하면

$$\cos(\angle\mathrm{PRQ})=\frac{\overline{\mathrm{RH}}}{\overline{\mathrm{PR}}}=\frac{m+n}{\sqrt{2m^2+2n^2}}=\frac{4}{5}$$

$7m^2-50mn+7n^2=(7m-n)(m-7n)=0$

$\frac{n}{m}=\frac{1}{7}$ 또는 7

따라서 조건을 만족시키는 점 P는 곡선 $y=a^x$와 직선 $y=7x$

또는 $y=\frac{1}{7}x$와의 교점이다.

이러한 점 P의 개수가 3이 되기 위해서는 곡선 $y=a^x$와 직선

$y=\frac{1}{7}x$가 접해야 하므로 그 접점을 $(t,\ a^t)$라 두면

$a^t=\frac{t}{7}$ $\quad\cdots$ ㉠

$a^t\ln a=\frac{1}{7}$ $\quad\cdots$ ㉡

ⓒ을 ㉠으로 나누면 $\ln a=\frac{1}{t}$, $\log_{a}e=t$ $\cdots$ ⓒ

ⓒ을 ⓒ에 대입하면 $e\ln a=\frac{1}{7}$, $\ln a=\frac{1}{7e}$

$\therefore \left(\frac{1}{e\times\ln a}\right)^{2}=7^{2}=49$