

백일대장

수능 역전을 위한 백일 전략서

12

정답 및 해설

Day. 78

수학1, 수학2

78-1. 34

$$f(x) = \tan(\pi + ax) + b = \tan ax + b \text{ 이므로}$$

이 함수의 주기는 $\frac{\pi}{|a|} = \frac{\pi}{3}$ 이고, $a = \pm 3$ 이다.

함수 $f(x) = \tan ax + b$ 의 그래프는 원점에 대하여 대칭인 함수인 $y = \tan ax$ 의 그래프를 y 축의 방향으로 b 만큼 평행이동한 그래프이므로 점 $(0, b)$ 에 대하여 대칭이다.

$$\text{따라서 } b = -5, a^2 + b^2 = 34$$

78-2. ④

두 함수가 점 $A(1, 1)$ 에서 만나므로

$$f(1) = a + b = 1$$

$$g(1) = -1 + c + 3 = 1, c = -1$$

두 함수의 접선이 점 $A(1, 1)$ 에서 직교하므로

$$f'(1) \times g'(1) = (2a + b) \times (c - 2) = -1$$

세 식을 연립하여 계산하면

$$a = -\frac{2}{3}, b = \frac{5}{3}, c = -1 \text{ 이므로}$$

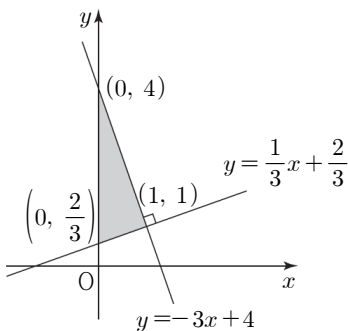
$$f(x) = -\frac{2}{3}x^2 + \frac{5}{3}x, g(x) = -x^2 - x + 3$$

점 A 에서 함수 $y = f(x)$ 의 접선의 방정식은

$$l : y = \frac{1}{3}(x - 1) + 1 = \frac{1}{3}x + \frac{2}{3}$$

점 A 에서 함수 $y = g(x)$ 의 접선의 방정식은

$$m : y = -3(x - 1) = -3x + 4$$



$$\text{따라서 } S = \frac{1}{2} \times \left(4 - \frac{2}{3}\right) \times 1 = \frac{5}{3} \text{ 이다.}$$

78-3. ①

$$g'(x) = (x - 1)f'(x) \text{ 이므로}$$

함수 $g(x)$ 는 최고차항의 계수가 양수인 사차함수이다.

이때 $g'(1) = 0$ 이지만 함수 $g(x)$ 는 $x = 4$ 에서 최솟값이자

극값을 가지므로 함수 $g'(x)$ 는 $(x-1)^2$ 을 인수로 가져야만 한다.

따라서 $g'(x) = 3(x-1)^2(x-4)$ 이다.

$$\begin{aligned} & \int_1^5 |3(x-1)^2(x-4)| dx \\ &= \int_1^4 -3(x-1)^2(x-4) dx + \int_4^5 3(x-1)^2(x-4) dx = \frac{81}{2} \end{aligned}$$

78-4. ③

$P(t, a^t)$ 라 두면 $A\left(t, \frac{1}{3}a^t\right)$, $B\left(\frac{2}{3}t, a^t\right)$ 라 둘 수 있다.

두 점 A, B 는 모두 함수 $y = -\log_a x$ 위의 점이므로

$$-\log_a \frac{2}{3}t = a^t, -\log_a t = \frac{1}{3}a^t \text{ 이므로}$$

두 식을 연립하여 계산하면 $t = \frac{\sqrt{6}}{3}$ 이다.

78-5. ①

조건 (가)에 의하여 $\angle AOP = \frac{5}{6}\pi$ 이고,

점 P 는 제2사분면 또는 제3사분면 위의 점이다.

조건 (나)에 의하여

$$\frac{\cos\theta}{\sin\theta} - \frac{\sin^2\theta\cos\theta}{\sin\theta} > 0, \frac{\cos^3\theta}{\sin\theta} > 0 \text{ 이므로}$$

점 P 는 제3사분면 위의 점이다.

따라서 $P(-2\sqrt{3}, -2)$ 이고,

$$a+b = -2-2\sqrt{3} \text{ 이다.}$$

78-6. 426

조건 (다)에 의하여

$$S_1 = S_{15}$$

$$S_2 = S_{14}$$

$\vdots$

$$S_6 = S_{10}$$

$$S_7 = S_9 \text{ 이므로}$$

$$a_8 + a_9 = 0, a_7 + a_{10} = 0, \dots, a_1 + a_{16} = 0 \text{ 이다.}$$

$$a_2 + a_{15} = 0 \text{ 이므로 } a_2 = 2 - k = -10, k = 12 \text{ 이다.}$$

$$\text{이때 대칭성에 의하여 } \sum_{n=1}^8 a_{2n-1} = -\sum_{n=1}^8 a_{2n} = -414 \text{ 이고,}$$

$$k - \sum_{n=1}^8 a_{2n-1} = 12 - (-414) = 426 \text{ 이다.}$$

78-7. ③

함수 $f(x)$ 는 연속함수이므로

$$0 < x < 2 \text{ 에서 } f(x) = x^2 - 2x + 1 = (x-1)^2 \text{ 이다.}$$

$$2 < x < 4 \text{ 에서 } f'(x) = x - 3 \text{ 이므로}$$

$f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 3x + C$ (C 는 적분상수)이고,

$f(2) = 1$ 이므로 $C' = 5$ 이다.

$$f(x) = \frac{1}{2}(x^2 - 6x) + 5 = \frac{1}{2}(x-3)^2 + \frac{1}{2}$$

같은 방법으로 $4 < x < 6$ 에서

$$f(x) = \frac{1}{4}(x-5)^2 + \frac{3}{4}$$

$\vdots$

$2k-2 < x < 2k$ 에서

$$f(x) = \frac{1}{2^{k-1}}(x-2k+1)^2 + \frac{2^{k-1}-1}{2^{k-1}} \text{ 이므로}$$

$18 < x < 20$ 에서

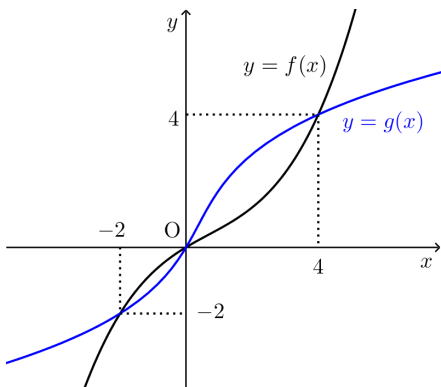
$$f(x) = \frac{1}{2^9}(x-19)^2 + \frac{2^9-1}{2^9} \text{ 이다.}$$

$$\begin{aligned} \int_{18}^{20} f(x) dx &= \int_{18}^{20} \left\{ \frac{1}{2^9}(x-19)^2 + \frac{511}{512} \right\} dx \\ &= \int_0^2 \left\{ \frac{1}{2^9}(x-1)^2 + \frac{511}{512} \right\} dx \\ &= \frac{1}{2^9} \int_0^2 (x-1)^2 dx + \frac{511}{256} \\ &= \frac{1}{2^9} \times \frac{2}{3} + \frac{511}{256} = \frac{767}{384} \end{aligned}$$

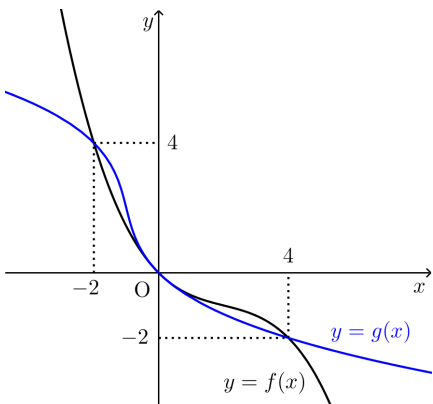
78-8. 33

다음과 같이 두 가지 경우를 생각해 볼 수 있다.

i) 함수 $f(x)$ 가 증가함수인 경우



ii) 함수 $f(x)$ 가 감소함수인 경우



이때 함수 $f(x)$ 가 증가함수라면 $\int_{-2}^4 |g(x)| dx > 10$ 이어야

하므로 조건 (나)에 위배된다.

따라서 함수 $y = f(x)$ 의 그래프는

세 점 $(0, 0)$, $(-2, 4)$, $(4, -2)$ 를 지난다.

이때 두 함수 $f(x)$, $g(x)$ 는 역함수 관계이므로

$$\int_{-2}^4 |f(x)| dx + \int_{-2}^4 |g(x)| dx = 16 \text{이고,}$$

$$\int_{-2}^4 |g(x)| dx = \frac{35}{4} \text{이므로 } \int_{-2}^4 |f(x)| dx = \frac{29}{4} \text{이다.}$$

확률과 통계

78-9. 171

1부터 9까지의 숫자를 3으로 나눈 나머지를 기준으로 케이스를 분류하고, 각 자리에 들어갈 숫자를 결정하는 방식으로 확률의 곱셈정리를 이용하여 구한다.

(단, 처음 나온 1과 마지막 나온 수는 고정)

X	0의 개수	가능한 예	확률
2	0개	12	$\frac{3}{8}$
3	0개	111	$\frac{2}{8} \times \frac{1}{7}$
	1개	102	$\frac{3}{8} \times \frac{3}{7}$
4	0개	1122	$\frac{2}{8} \times \frac{3}{7} \times \frac{2}{6}$
	1개	1011	$2 \times \frac{3}{8} \times \frac{2}{7} \times \frac{1}{6}$
	2개	1001	$\frac{3}{8} \times \frac{2}{7} \times \frac{3}{6}$
5	1개	10122	$3 \times \frac{3}{8} \times \frac{2}{7} \times \frac{3}{6} \times \frac{2}{5}$
	2개	10011	$3 \times \frac{3}{8} \times \frac{2}{7} \times \frac{2}{6} \times \frac{1}{5}$
	3개	10002	$\frac{3}{8} \times \frac{2}{7} \times \frac{1}{6} \times \frac{3}{5}$

(단 위에서 흰색으로 표시된 숫자는 순서가 바뀔 수 있다.)

따라서

$$P(X=4) = \frac{1}{28} + \frac{1}{28} + \frac{3}{56} = \frac{1}{8}$$

$$P(X=5) = \frac{9}{140} + \frac{3}{140} + \frac{3}{280} = \frac{27}{280}$$

$$\therefore P(X=4) + P(X=5) = \frac{1}{8} + \frac{27}{280} = \frac{31}{140}$$

78-10. 3

확률변수 X 는 정규분포 $N(m, 36^2)$ 을 따르므로

$$\begin{aligned}
 f(k) &= P(0 \leq X \leq m + k^2) \\
 &= P\left(\frac{0-m}{36} \leq \frac{X-m}{36} \leq \frac{(m+k^2)-m}{36}\right) \\
 &= P\left(-\frac{m}{36} \leq Z \leq \frac{k^2}{36}\right)
 \end{aligned}$$

또한 크기가 81인 표본의 표본평균 $\bar{X}$ 에 대하여

$$E(\bar{X}) = E(X) = m$$

$$V(\bar{Y}) = \frac{V(Y)}{81} = \frac{36^2}{81} = 4^2$$

이므로 표본평균 $\bar{X}$ 는 정규분포 $N(m, 4^2)$ 을 따른다. 따라서

$$\begin{aligned}
 g(k) &= P\left(\frac{8}{9}m \leq \bar{X} \leq m + \frac{1}{3}k\right) \\
 &= P\left(\frac{\frac{8}{9}m - m}{4} \leq \frac{\bar{X} - m}{4} \leq \frac{\left(m + \frac{1}{3}k\right) - m}{4}\right) \\
 &= P\left(-\frac{m}{36} \leq Z \leq \frac{k}{12}\right)
 \end{aligned}$$

$f(k) = g(k)$ 에서

$$P\left(-\frac{m}{36} \leq Z \leq \frac{k^2}{36}\right) = P\left(-\frac{m}{36} \leq Z \leq \frac{k}{12}\right)$$

$$\text{이므로 } \frac{k^2}{36} = \frac{k}{12}$$

$$k(k-3) = 0$$

이때 k 가 자연수이므로 $k = 3$

78-11. ③

모든 함수 f 의 개수는 5^5

$f(1) \leq f(2) \leq f(3) \leq f(4) \leq f(5)$ 을 만족시키는 함수 f 의 개수는

1, 2, 3, 4, 5 중에서 5개의 수를 중복을 허용하여 선택하는 경우의 수이므로

$${}_5H_5 = {}_9C_5 = 126$$

따라서 사건 A 를 만족시킬 확률은

$$\frac{126}{5^5}$$

$f(1) \leq f(2) \leq f(3) \leq f(4) \leq f(5)$ 이고 함수 f 의 치역의 원소의 곱이 홀수인 경우의 수는 1, 3, 5에서 3개의 수를 중복을 허용하여 선택하는 경우의 수이므로

$${}_3H_5 = {}_7C_5 = 21$$

따라서 사건 A 를 만족시키고 사건 B 를 만족시킬 확률은

$$\frac{21}{5^5}$$

따라서 함수 f 가 사건 A 를 만족시킬 때, 사건 B 를 만족시킬 확률은

$$\frac{\frac{21}{5^5}}{\frac{126}{5^5}} = \frac{1}{6}$$

78-12. 273

i) $a=b=0$ 인 경우 c 는 0부터 6까지 모든 정수이므로 모든 순서쌍 (a, b, c) 의 개수는 7ii) $a=0, b \neq 0$ 인 경우

$$1 \leq |b| \leq c \leq 6$$

인 순서쌍 $(|b|, c)$ 의 개수는

$${}_6H_2 = {}_7C_2 = 21$$

이때, $|b|$ 는 b 가 양수인 경우와 음수인 경우가 있으므로 모든 순서쌍 (a, b, c) 의 개수는

$$2 \times 21 = 42$$

iii) $a \neq 0$ 인 경우

$$1 \leq |a| \leq |b| \leq c \leq 6$$

인 순서쌍 $(|a|, |b|, c)$ 의 개수는

$${}_6H_3 = {}_8C_3 = 56$$

이때, $|a|$ 는 a 가 양수인 경우와 음수인 경우가 있고, $|b|$ 는 b 가 양수인 경우와 음수인 경우가 있으므로 모든 순서쌍 (a, b, c) 의 개수는

$$4 \times 56 = 224$$

i)~iii)에 의하여 모든 순서쌍 (a, b, c) 의 개수는

$$7 + 42 + 224 = 273$$

미적분

78-9. 12

$$S = \int_1^2 \frac{1}{x} dx = \ln 2 \text{이므로}$$

$$\int_1^{f(n)} \frac{1}{x} dx = n \ln 2 \text{이고, } \ln f(n) = n \ln 2, f(n) = 2^n \text{이다.}$$

따라서

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^{2n+1} + 2^{n+4} f(n)}{2^{2n+1} - 2^{n-1} f(n)} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^{2n+1} + 2^{2n+4}}{2^{2n+1} - 2^{2n-1}} \\ &= \frac{2+16}{2-\frac{1}{2}} = 12 \text{이다.} \end{aligned}$$

78-10. 95

수열 a_n 의 첫째항을 a , 공차를 d 라 두면

$$a_n = d(n-1) + a = dn - d + a,$$

$$S_n = \frac{n}{2} \times \{2a + (n-1)d\} = \frac{d}{2} n^2 + \left(a - \frac{d}{2}\right) n \text{이다.}$$

이때 $\frac{1}{2}d = d^2$ 이어야만 $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{S_n} - a_n)$ 이 수렴하므로

$$d = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{S_n} - a_n)$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \sqrt{\frac{1}{4}n^2 + \left(a - \frac{1}{4}\right)n} - \left(\frac{1}{2}n + a - \frac{1}{2}\right) \right\}$$

$$= \frac{1}{4}$$

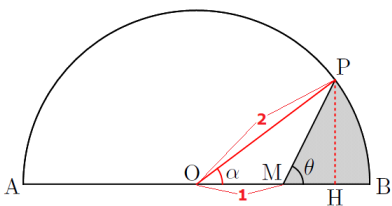
$$\therefore a = \frac{1}{4}$$

따라서 $a_n = \frac{1}{2}n - \frac{1}{4}$ 이고 $a_{10} = \frac{19}{4}$ 이다.

78-11. ⑤

반원의 중심을 O, $\angle POB = \alpha$,

점 P에서 선분 AB에 내린 수선의 발을 H라 하자.



$$\overline{MH} = 2\cos\alpha - 1, \overline{HP} = 2\sin\alpha$$

$$\tan\theta = \frac{2\sin\alpha}{2\cos\alpha - 1}, S = 2\alpha - \sin\alpha$$

$\tan\theta = 2$ 일 때, $\overline{MH} = x$, $\overline{HP} = 2x$ 라 두면

$$(x+1)^2 + (2x)^2 = 4, x = \frac{3}{5} \text{ 이다.}$$

$\tan\theta = \frac{2\sin\alpha}{2\cos\alpha - 1}$ 의 양변을 θ 에 대해 미분하면

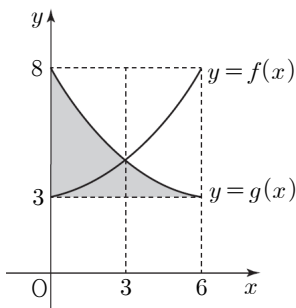
$$\sec^2\theta = \frac{4 - 2\cos\alpha}{(2\cos\alpha - 1)^2} \frac{d\alpha}{d\theta}$$

$\tan\theta = 2$ 일 때,

$$5 = \frac{4 - 2 \times \frac{4}{5}}{\left(2 \times \frac{4}{5} - 1\right)^2} \frac{d\alpha}{d\theta}, \frac{d\alpha}{d\theta} = \frac{3}{4}$$

$$\frac{dS}{d\theta} = \frac{dS}{d\alpha} \times \frac{d\alpha}{d\theta} = (2 - \cos\alpha) \times \frac{d\alpha}{d\theta} = \frac{9}{10}$$

78-12. 33



색칠한 영역이 $\int_3^8 g^{-1}(x) dx$ 이고, 이 넓이가 15 이다.

$$\therefore \int_0^6 f(x) dx = 15 + 18 = 33$$

$\int_1^{e^3} \frac{f(\ln x) + g(\ln x)}{x} dx$ 에서 $\ln x = t$ 로 치환하면

$$\int_1^{e^3} \frac{f(\ln x) + g(\ln x)}{x} dx = \int_0^3 \{f(t) + g(t)\} dt$$

$$= \int_0^3 f(t) dt + \int_3^6 f(t) dt = \int_0^6 f(t) dt = 33$$

[다른 풀이]

치환적분 및 대칭성을 이용하여

$$\int_1^{e^3} \frac{f(\ln x) + g(\ln x)}{x} dx = \int_0^6 g(x) dx \text{이고}$$

$$\int_0^6 g(x) dx + \int_{g(0)}^{g(6)} g^{-1}(y) dy = 6g(6) - 0g(0) \text{이므로}$$

$g(6) = 3, g(0) = 8$ 로부터 $\int_0^6 g(x) dx = 33$ 임을 알 수 있다.

Day. **79**

수학1, 수학2

79-1. ㉔

$$\tan\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) = -\frac{1}{\tan \theta} = -\frac{1}{2}, \tan \theta = 2 \text{이다.}$$

$$\cos \theta \leq 0 \text{이므로 } \cos \theta = -\frac{1}{\sqrt{5}}, \sin \theta = -\frac{2}{\sqrt{5}} \text{이고,}$$

$$\frac{\sin \theta}{1 - \cos^2 \theta} = \frac{-\frac{2}{\sqrt{5}}}{1 - \frac{1}{5}} = -\frac{\sqrt{5}}{2} \text{이다.}$$

79-2. ㉔

$$g(x) = x^2 - 4x + 5 - b \text{라 두면}$$

$$\int_0^a \{f(x) - g(x)\} dx = ab = 8 \quad \dots \textcircled{㉔}$$

$$\int_0^a \{f(x) + g(x)\} dx = \frac{2}{3}a^3 - 4a^2 - ab + 10a = 4 \quad \dots \textcircled{㉕}$$

㉔, ㉕을 연립하여 계산하면 $a = 3, b = \frac{8}{3}$ 이므로

$$g(x) = x^2 - 4x + \frac{7}{3}, g(3) = 9 - 12 + \frac{7}{3} = -\frac{2}{3} \text{이다.}$$

79-3. 102

$$g(3) + g(5) + g(7) + g(9) = 1 + 1 + 1 + 1 = 4 \text{이므로}$$

$$g(2) + g(4) + g(6) + g(8) + g(10) = 8$$

함수 $f(x)$ 가 $x = 6$ 을 기준으로 대칭이므로

함수 $g(x)$ 역시 $x = 6$ 을 기준으로 대칭이다.

따라서 $g(2) = g(4) = g(8) = g(10) = 2$, $g(6) = 0$ 이고,
 $f(6) < 0$, $f(4) = f(8) > 0$ 이다.

따라서 $32 < k < 36$ 이고, 가능한 정수 k 의 값의 합은
 $33 + 34 + 35 = 102$ 이다.

79-4. ④

$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x^2 + 2x + 4}$ 이 0이 아닌 실수로 수렴하므로

함수 $f(x)$ 는 이차함수이다.

조건 (나)에 의하여

$$f'(x) = 4x - 4 \text{ 이고}$$

$$f'(m) = 4m - 4, f'(n) = 4n - 4 \text{ 이므로}$$

$$\begin{aligned} f'(m) + f'(n) &= (4m - 4) + (4n - 4) \\ &= 4(m + n) - 8 = 40 - 8 = 32 \text{ 이다.} \end{aligned}$$

79-5. ③

곡선 $y = \log_{\frac{1}{2}}(x - 2)$ 는 곡선 $y = \log_{\frac{1}{2}}x$ 를 x 축 방향으로

2만큼 평행이동한 곡선이므로 색칠한 부분의 넓이는
 선분 AB를 밑변으로 하고 높이가 k 인 직사각형의 넓이와 같다.

$$\overline{AB} = 2 \text{ 이므로 } k = 3 \text{ 이고, } D\left(\frac{17}{8}, 3\right) \text{ 이다.}$$

따라서 직선 AD의 기울기는

$$\frac{3 - 0}{\frac{17}{8} - 1} = \frac{3}{\frac{9}{8}} = \frac{8}{3} \text{ 이다.}$$

79-6. 432

함수 $f(x)$ 는 최고차항의 계수가 1인 이차함수이므로
 $f'(x) = 2(x - k)$ 라 둘 수 있다.

함수 $|f'(x)|$ 는 $x = k$ 에서 미분이 가능하지 않지만

함수 $g(x) = |f'(x)| \times f(x)$ 는 실수 전체의 집합에서
 미분가능하므로

함수 $g(x)$ 는 $(x - k)^2$ 을 인수로 가져야 한다.

따라서 $f(k) = 0$ 이고, $f(x) = (x - k)^2$ 이라 둘 수 있다.

$$f(4) = (k - 4)^2 = 4 \text{ 이므로 } k = 2 \text{ 또는 } k = 6 \text{ 이고,}$$

$$f(x) = (x - 2)^2 \text{ 또는 } f(x) = (x - 6)^2 \text{ 이다.}$$

$$f(x) = (x - 2)^2 \text{ 일 때 } g(8) = 12 \times 36 = 432$$

$$f(x) = (x - 6)^2 \text{ 일 때 } g(8) = 4 \times 4 = 16 \text{ 이므로}$$

$g(8)$ 의 최댓값은 432이다.

79-7. 13

삼각형 BFC와 삼각형 EFD는 닮음비가 2 : 1인 닮음
 관계이므로

$$\overline{DE} = \frac{1}{2} \overline{BC} = 1$$

따라서 삼각형 ABC와 삼각형 ADE의 닮음비 역시 2 : 1이고

$$\overline{BD} = \frac{1}{2} \overline{AB} = 2$$

점 A에서 선분 BC에 내린 수선의 발을 H라 하면

$$\angle BAH = \frac{\theta}{2}, \overline{BH} = 1 \text{ 이므로 } \sin \frac{\theta}{2} = \frac{1}{4}$$

삼각형 BDC에서 코사인법칙에 의하여

$$\overline{CD}^2 = \overline{BD}^2 + \overline{BC}^2 - 2 \times \overline{BD} \times \overline{BC} \times \cos\left(\frac{\pi - \theta}{2}\right)$$

$$\overline{CD} = \sqrt{6}$$

원 O의 반지름을 R이라 두면

삼각형 BDC에서 사인법칙에 의하여

$$\frac{\overline{CD}}{\sin\left(\frac{\pi - \theta}{2}\right)} = 2R, 2R = \frac{\sqrt{6}}{\frac{\sqrt{15}}{4}}, R = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{5}} \text{ 이므로}$$

$$S = \frac{8}{5}\pi, p + q = 5 + 8 = 13 \text{ 이다.}$$

79-8. 147

$$S_n = a_n a_{n+1} - 3 \sum_{k=1}^n a_k = 10 \text{ 이라 두자.}$$

$$S_{n-1} = a_{n-1} a_n - 3 \sum_{k=1}^{n-1} a_k = 10 \text{ 이므로}$$

$$S_n - S_{n-1} = a_n(a_{n+1} - a_{n-1}) - 3a_n = 0 \text{ 이고,}$$

2 이상의 모든 자연수 n 에 대하여

$$a_n(a_{n+1} - a_{n-1} - 3) = 0 \text{ 이 성립한다.}$$

이때 수열 a_n 의 모든 항은 양수이므로

$$2 \text{ 이상의 모든 자연수 } n \text{에 대하여 } a_{n+1} - a_{n-1} = 3 \text{ 이다.}$$

$$S_1 = a_1 a_2 - 3a_1 = 10 \text{ 이므로}$$

$$a_1 = p \text{ 라 두면 } a_2 = \frac{10}{p} + 3, a_3 = p + 3 \text{ 이다.}$$

a_n 은 증가하는 수열이므로

$$p < \frac{10}{p} + 3 < p + 3,$$

$$10 < p^2, p^2 - 3p - 10 < 0, \sqrt{10} < p < 5 \text{ 이다.}$$

이때 p 는 자연수이므로 $p = 4$ 이다.

따라서 수열 a_n 은

$$a_{2k-1} = 3k + 1, a_{2k} = 3k + \frac{5}{2} \text{ 를 만족시키므로}$$

$$\sum_{k=1}^{12} a_k = \sum_{k=1}^6 \left\{ (3k+1) + \left(3k + \frac{5}{2}\right) \right\} = 147 \text{ 이다.}$$

확률과 통계

79-9. ②

$a = k, b = 5 - k (k = 0, 1, 2, 3, 4)$ 일 확률은

$${}_5C_k \left(\frac{1}{2}\right)^k \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{5-k} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{6} \times {}_5C_k \left(\frac{1}{2}\right)^5$$

따라서 구하는 확률은

$$\begin{aligned} & \frac{1}{6} \times \left(\frac{1}{2}\right)^5 ({}_5C_0 + {}_5C_1 + {}_5C_2 + {}_5C_3 + {}_5C_4) \\ &= \frac{1}{6 \times 32} (2^5 - 1) = \frac{2^5 - 1}{6 \times 32} = \frac{31}{192} \end{aligned}$$

79-10. 68i) $f(4) = 1$ 인 경우 $f(1) + f(2) + f(3) \leq 2$ 를 만족시키는순서쌍 $(f(1), f(2), f(3))$ 는 존재하지 않는다.ii) $f(4) = 2$ 인 경우 $f(1) + f(2) + f(3) \leq 4$ 를 만족시키는순서쌍 $(f(1), f(2), f(3))$ 의 개수는

$${}_3H_0 + {}_3H_1 = {}_2C_0 + {}_3C_1 = 4$$

iii) $f(4) = 3$ 인 경우 $f(1) + f(2) + f(3) \leq 6$ 을 만족시키는순서쌍 $(f(1), f(2), f(3))$ 의 개수는

$${}_3H_0 + {}_3H_1 + {}_3H_2 + {}_3H_3$$

$$= {}_2C_0 + {}_3C_1 + {}_4C_2 + {}_5C_3 = {}_6C_3 = 20$$

iv) $f(4) = 4$ 인 경우 $f(1) + f(2) + f(3) \leq 8$ 을 만족시키는순서쌍 $(f(1), f(2), f(3))$ 은 $f(1) + f(2) + f(3) \leq 6$ 인 경우

$${}_3H_0 + {}_3H_1 + {}_3H_2 + {}_3H_3$$

$$= {}_2C_0 + {}_3C_1 + {}_4C_2 + {}_5C_3 = {}_6C_3 = 20$$

 $f(1) + f(2) + f(3) = 7$ 인 경우 $a + b + c = 7$ (a, b, c 는 자연수)에서 $a \geq 5$ 또는 $b \geq 5$ 또는 $c \geq 5$ 인 경우를 제외하면 된다.이 순서쌍 (a, b, c) 는 $(1, 1, 5), (1, 5, 1), (5, 1, 1)$ 이므로 $f(1) + f(2) + f(3) = 7$ 인 순서쌍 $(f(1), f(2), f(3))$ 의

개수는

$${}_3H_4 - 3 = {}_6C_4 - 3 = 12$$

 $f(1) + f(2) + f(3) = 8$ 인 경우 $a + b + c = 8$ (a, b, c 는 자연수)에서 $a \geq 5$ 또는 $b \geq 5$ 또는 $c \geq 5$ 인 경우를 제외하면 된다.이 순서쌍 (a, b, c) 는 $(1, 2, 5), (1, 5, 2), (2, 1, 5), (2, 5, 1), (5, 1, 2), (5, 2, 1)$ $(1, 1, 6), (1, 6, 1), (6, 1, 1)$ 이므로 $f(1) + f(2) + f(3) = 8$ 인 순서쌍 $(f(1), f(2), f(3))$ 의

개수는

$${}_3H_5 - 9 = {}_7C_5 - 9 = 12$$

따라서 $f(1) + f(2) + f(3) \leq 8$ 을 만족시키는순서쌍 $(f(1), f(2), f(3))$ 의 개수는

$$20 + 12 + 12 = 44$$

i)~iv)에 의하여 모든 함수 f 의 개수는

$$4 + 20 + 44 = 68$$

79-11. ①

카드 3장을 선택하는 경우의 수는

$${}_{20}C_3$$

$b = 8$ 인 경우는

a 는 1부터 7까지의 자연수이고,

c 는 9부터 20까지의 자연수이므로

$$7 \times 12 = 84$$

따라서 $b = 8$ 일 확률은

$$\frac{84}{{}_{20}C_3}$$

$b = 8$ 이고 $a + c = 24$ 일 때의 순서쌍 (a, c) 은

$(4, 20), (5, 19), (6, 18), (7, 17)$

의 4개이므로

$b = 8$ 이고 $a + c = 24$ 일 확률은

$$\frac{4}{{}_{20}C_3}$$

따라서 구하는 확률은

$$\frac{\frac{4}{{}_{20}C_3}}{\frac{84}{{}_{20}C_3}} = \frac{1}{21}$$

79-12. 8

함수 $y = f(x - 8)$ 의 그래프는 함수 $y = f(x)$ 의 그래프를
 x 축의 방향으로 8만큼 평행이동시킨 것이므로

확률변수 Y 는 정규분포 $N(m + 8, 2^2)$ 을 따른다.

함수 $y = f(x - a)$ 의 그래프는 함수 $y = f(x)$ 의 그래프를
 x 축의 방향으로 a 만큼 평행이동시킨 것이므로

확률변수 W 는 정규분포 $N(m + a, 2^2)$ 을 따른다.

따라서 방정식

$f(x) = g(x), f(x) = f(x - 8)$ 의 해는 $m + 4$ 이고,

$$P(0 \leq X \leq \alpha)$$

$$= P(0 \leq X \leq m) + P(m \leq X \leq m + 4)$$

이고 이때

$$P(m \leq X \leq m + 4)$$

$$= P\left(\frac{m - m}{2} \leq \frac{X - m}{2} \leq \frac{m + 4 - m}{2}\right)$$

$$= P(0 \leq Z \leq 2) = 0.4772$$

이므로

$$P(0 \leq X \leq m) = 0.3413$$

$$P(0 \leq X \leq m)$$

$$= P\left(\frac{0 - m}{2} \leq \frac{X - m}{2} \leq \frac{m - m}{2}\right)$$

$$= P\left(-\frac{m}{2} \leq Z \leq 0\right) = 0.3413$$

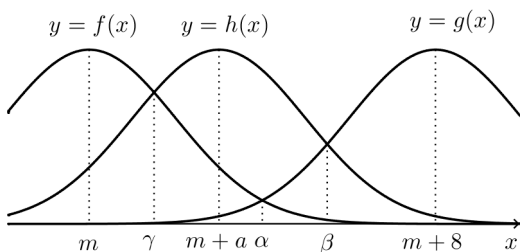
$$\text{이므로 } -\frac{m}{2} = -1 \therefore m = 2$$

한편 $f(\alpha) < g(\beta) < h(\gamma)$

에서 그림과 같이 $m < m + a < \alpha$

즉, $m < m+a < m+4$

에서 a 가 정수이므로 a 가 될 수 있는 수는
1, 2, 3이다.



따라서 확률변수 W 의 평균 $m+a$ 의

최댓값은 $2+3=5$,

최솟값은 $2+1=3$

이므로 최댓값과 최솟값의 합은 $5+3=8$ 이다.

미적분

79-9. ③

주어진 극한에 의하여

$f(2)=2$, $f'(2)=2$ 이다.

역함수의 미분법에 의하여

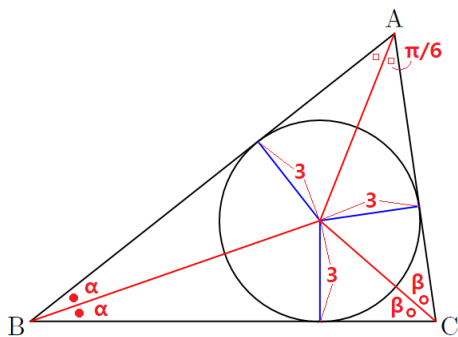
$g'(x) = \frac{1}{f'(g(x))}$ 이므로

$g'(2) = \frac{1}{f'(g(2))} = \frac{1}{f'(2)} = \frac{1}{4}$

$h'(x) = \frac{g'(x)}{g(x)}$ 에서 $h'(2) = \frac{g'(2)}{g(2)} = \frac{1}{8}$

79-10. ②

$\angle B=2\alpha$, $\angle C=2\beta$ 라 하면 $\alpha+\beta=\frac{\pi}{3}$ 이다.



삼각형 둘레의 절반이 곧

$$\frac{3}{\tan \alpha} + \frac{3}{\tan \beta} + \frac{3}{\tan \frac{\pi}{6}} = 10\sqrt{3} \text{ 이고,}$$

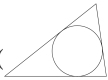
$$\frac{3}{\tan \alpha} + \frac{3}{\tan\left(\frac{\pi}{3} - \alpha\right)} = 7\sqrt{3} \text{ 이다.}$$

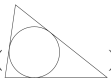
$\tan \alpha = x$ 라 두면

$$\frac{3}{x} + \frac{3(1 + \sqrt{3}x)}{\sqrt{3} - x} = 7\sqrt{3},$$

$$10x^2 - 7\sqrt{3}x + 3 = 0$$

이차방정식의 두 근의 곱이 $\left(\tan \frac{\angle B}{2}\right) \times \left(\tan \frac{\angle C}{2}\right)$ 의 값과 같으므로 구하는 값은 $\frac{3}{10}$ 이다.

실제로 두 근을 구하면 $x = \frac{\sqrt{3}}{5}$ () 또는

$$x = \frac{\sqrt{3}}{2} \left(\text{ \right)$$

79-11. 11

$a_1 \times a_4 = \alpha \times (-\beta) = 8$, $\alpha\beta = -8$ 이다.

α , β 는 정수이고 $\alpha < \beta$ 이므로 가능한 (α, β) 의 순서쌍은 $(-8, 1)$, $(-4, 2)$, $(-2, 4)$, $(-1, 8)$ 뿐이다.

이때 $\cos \frac{n}{2}\pi$ 와 $\sin \frac{n}{2}\pi$ 는 모두 주기가 4이므로

모든 자연수 n 에 대하여 $a_n = a_{n+4}$ 이다.

따라서

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_{4n-1} b_n) = a_3 \times \sum_{n=1}^{\infty} b_n,$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_{4n-2} |b_n|) = a_2 \times \sum_{n=1}^{\infty} |b_n|$$

수열 b_n 의 첫째항을 b , 공비를 r 이라 두면

$$a_3 \times \sum_{n=1}^{\infty} b_n = (-\alpha) \times \frac{b}{1-r} = 6,$$

$$a_2 \times \sum_{n=1}^{\infty} |b_n| = \beta \times \frac{b}{1-|r|} = 6 \text{ 이다.}$$

이때 $r > 0$ 이면 $-\alpha = \beta$ 인데 이는 α, β 가 정수임에 모순이다.

따라서 $r < 0$ 이고, $\beta \times \frac{b}{1+r} = 6$ 이다.

따라서 $\frac{-\alpha}{1-r} = \frac{\beta}{1+r}$, $\frac{1+r}{1-r} = -\frac{\beta}{\alpha}$ 이다.

가능한 (α, β) 의 순서쌍에 의해

$$\frac{1+r}{1-r} = \frac{1}{8}, \frac{1}{2}, 2, 8 \text{ 중 하나이고,}$$

$-1 < r < 0$ 을 만족시키는 경우는

$$-\frac{\beta}{\alpha} = \frac{1}{2}, \frac{1}{8} \text{ 일 때 각각 } r = -\frac{1}{3}, r = -\frac{7}{9} \text{ 일 때뿐이다.}$$

이 중 $r = -\frac{1}{3}$ 일 때에만 b 가 정수라는 조건을 만족시킨다.

따라서 $b_n = 2 \times \left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1}$ 이고,

$$\sum_{n=1}^{\infty} (b_n)^2 = \sum_{n=1}^{\infty} 4 \times \left(\frac{1}{9}\right)^{n-1} = \frac{4}{1 - \frac{1}{9}} = \frac{9}{2} \text{ 이다.}$$

79-12. ③

$f(x) - g(x) = \sin(x^4) \times x^{n-1}(1-x)$ 이므로

$$\begin{aligned} a_n &= \int_0^1 \sin(x^4) \times x^{n-1}(1-x) dx \\ &\quad + \int_1^{\sqrt[4]{\pi}} \sin(x^4) \times x^{n-1}(x-1) dx \end{aligned}$$

따라서

$$\begin{aligned} &a_4 + a_5 + a_6 + a_7 \\ &= \int_0^1 (x^3 - x^7) \sin(x^4) dx + \int_1^{\sqrt[4]{\pi}} (x^7 - x^3) \sin(x^4) dx \text{ 이고,} \end{aligned}$$

$x^4 = t$ 로 치환하면

$$\begin{aligned} &\int_0^1 (x^3 - x^7) \sin(x^4) dx + \int_1^{\sqrt[4]{\pi}} (x^7 - x^3) \sin(x^4) dx \\ &= \frac{1}{4} \int_0^1 (1-t) \sin t dt + \frac{1}{4} \int_1^{\pi} (t-1) \sin t dt \\ &= \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \sin 1 \text{ 이다.} \end{aligned}$$

따라서 $k = 4$ 이다.

Day. **80**

수학1, 수학2

80-1. 84

곡선 $y = x^2 - 4x + 8$ 위의 점 $(2, 4)$ 에서의 접선의 방정식은 $y = 0(x-2) + 4 = 4$ 이다.

직선 $y = 4$ 가 $x = 3$ 에서 함수 $f(x)$ 와 접하므로

$$f(3) = 4, f'(3) = 0 \text{ 이고,}$$

두 식을 연립하여 계산하면 $a = -7, b = 14$ 이다.

따라서 $f(x) = (x-1)(x^2 - 7x + 14), f(7) = 84$ 이다.

80-2. 6

$$\text{방정식 } (\log_a x - 3)(\log_2 x - b) = 0 \text{ 의}$$

두 실근 $x = a^3, x = 2^b$ 가 일치하여야 하므로

$a^3 = 2^b$ 를 만족시키는 순서쌍 (a, b) 를 찾아보면 다음과 같다.

$$(a, b) = (2, 3), (4, 6), (8, 9), (16, 12), (32, 15), (64, 18)$$

따라서 순서쌍 (a, b) 의 개수는 6 이다.

80-3. ②

x 좌표와 y 좌표의 합이 n 인 점은 모두 직선 $y = -x + n$ 위의 점이므로 a_n 은 직선 $y = -x + n$ 과 곡선 $y = -x^2 - 7x - 5$ 의 교점의 개수와 같다.

$$-x^2 - 7x - 5 = -x + n \text{에서}$$

$$x^2 + 6x + 5 + n = 0, \frac{D}{4} = 9 - 5 - n = 4 - n \text{이므로}$$

$$n < 4 \text{일 때, } a_n = 2$$

$$n = 4 \text{일 때, } a_n = 1$$

$$n > 4 \text{일 때, } a_n = 0$$

$$\text{따라서 } \sum_{k=1}^{10} a_k = 7 \text{이다.}$$

80-4. ⑤

조건 (가)에 의하여

$$f(0) + g\left(\frac{\pi}{3}\right) = b + \frac{b}{2} + a = 7 \text{이므로 } 2a + 3b = 14$$

함수 $f(x)$ 의 최댓값은 $a + b$ 이고

함수 $g(x)$ 의 최솟값은 $-b + a$ 이므로

조건 (나)에 의하여

$$(a + b) - (-b + a) = 4 \text{이므로 } b = 2$$

$$\text{따라서 } a = 4, a + b = 4 + 2 = 6 \text{이다.}$$

80-5. ②

두 곡선 $y = \log_a x$ 와 $y = -\log_a (-x)$ 는 원점에 대하여

대칭이므로 점 A 와 점 C 역시 원점에 대하여 대칭이다.

따라서 A $(t, \log_a t)$ 라 두면 C $(-t, -\log_a t)$ 라 둘 수 있다.

점 A 에서 선분 BC 에 내린 수선의 발을 H 라 두면

$\overline{CH} = 2t$ 이고, $\overline{CH} = \overline{BH}$ 이므로 $\overline{BH} = 2t$, 점 B 의 x 좌표는 $3t$ 이다.

B $(3t, \log_a 3t)$ 라 두면 점 B 와 점 C 의 y 좌표는 동일하므로

$$-\log_a t = \log_a 3t, 3t^2 = 1, t = \frac{\sqrt{3}}{3} \text{이다.}$$

이때 $\overline{AH} = \sqrt{3} \times \overline{BH} = 2$ 이므로 $-2\log_a t = 2, a = \sqrt{3}$ 이다.

$$\text{따라서 } S = \frac{\sqrt{3}}{4} \times (4t)^2 = \frac{4\sqrt{3}}{3},$$

$$a \times S = \sqrt{3} \times \frac{4\sqrt{3}}{3} = 4 \text{이다.}$$

80-6. ②

$$f'(x) = 3a(x-1)(x-3) \text{이므로}$$

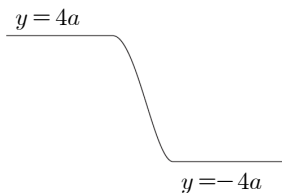
$$x < 1 \text{에서 } g(x) = f(x) - \int_1^x f'(t)dt = f(1) = 4a$$

$$1 \leq x < 3 \text{에서 } g(x) = f(x) + \int_1^x f'(t)dt = 2f(x) - f(1)$$

$x > 3$ 에서

$$\begin{aligned}
 g(x) &= f(x) + \int_1^3 f'(t)dt - \int_3^x f'(t)dt \\
 &= 2f(3) - f(1) = -4a
 \end{aligned}$$

따라서 함수 $g(x)$ 의 그래프의 개형은 다음과 같다.



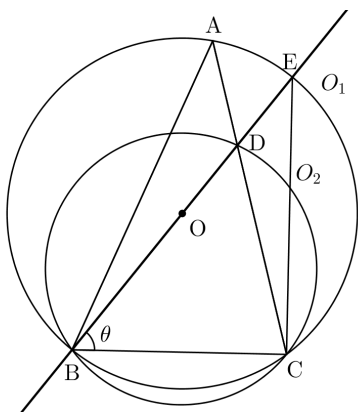
방정식 $g(x) = k$ 가 한 개의 실근을 가지도록 하는 실수 k 의 범위가

$-4a < k < 4a$ 이고,

정수의 최대 개수는 $2(4a-1) + 1 = 8a - 1 = 25$ 이므로

$a = \frac{13}{4}$ 이다.

80-7. ②



$\angle DBC = \theta$ 라 두면 $\angle BOC = \pi - 2\theta$ 이고,

원주각의 성질에 의하여 $\angle BAC = \frac{\pi}{2} - \theta$ 이다.

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \frac{\sqrt{6}}{4} \text{ 이므로 } \sin\theta = \frac{\sqrt{10}}{4},$$

$$\cos\theta = \frac{\sqrt{6}}{4} \text{ 이다.}$$

O_1 의 반지름을 R 이라 두면 삼각형 BAC 에서 사인법칙에 의하여

$$\frac{\overline{BC}}{\sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)} = 2R, \quad R = \frac{2\sqrt{6}}{2 \times \frac{\sqrt{6}}{4}} = 4 \text{ 이다.}$$

삼각형 BDC 에서 사인법칙에 의하여

$$\frac{\overline{CD}}{\sin\theta} = 2 \times \frac{4\sqrt{3}}{\sqrt{5}}, \quad \overline{CD} = 2\sqrt{6} \text{ 이고,}$$

삼각형 BDC 가 이등변삼각형이므로

$$\overline{BD} = \overline{BC} \times \cos\theta \times 2 = 6 \text{ 이다.}$$

직선 BD 가 원 O_1 과 만나는 점 중 B 가 아닌 점을 E 라 하자.

$$\overline{DE} = 2R - \overline{BD} = 2, \quad \overline{CD} = 2\sqrt{6} \text{ 이므로}$$

삼각형 CDE의 넓이는

$$\frac{1}{2} \times 2 \times 2\sqrt{6} \times \frac{\sqrt{10}}{4} = \sqrt{15} \text{ 이다.}$$

이때 삼각형 ADB와 삼각형 EDC가 $6:2\sqrt{6}$ 의 닮음비를 가진 닮음 관계에 있으므로 넓이의 비는 $3:2$ 이고,

따라서 삼각형 ABD의 넓이는 $\frac{3\sqrt{15}}{2}$ 이다.

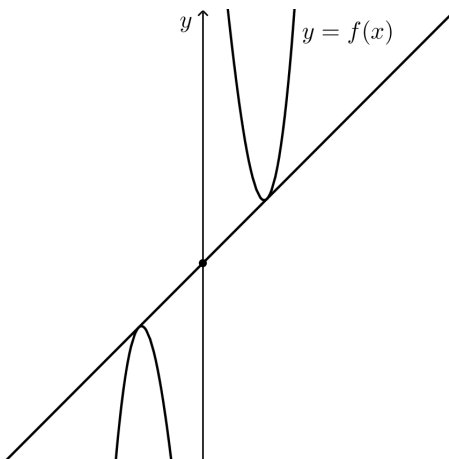
80-8. 20

$$f(x) = \begin{cases} x^3 - 11x + C_1 & (x < 0) \\ x^3 - 11x + C_2 & (x > 0) \end{cases} \text{라 두자.}$$

조건 (다)에 의하여

모든 실수 t 에 대하여 두 점 $(t, f(t))$ 와 $(0, f(0))$ 사이의 기울기가 1 이상이어야 한다.

조건을 만족시키면서 $f(3) - f(-3)$ 의 값이 최소가 되는 경우는 다음과 같이 곡선 $y = f(x)$ 와 기울기가 1인 직선이 $x > 0$ 과 $x < 0$ 일 때 모두 접하는 경우이다.



이때, C_1 과 C_2 의 차는 일정하므로

일반성을 잃지 않고 $C_1 = 0$ 이라 두면

점 $(-2, f(-2))$ 에서의 접선의 기울기가 1인 접선의 방정식은 $y = x + 16$ 이고, $f(0) = 16$ 이다.

$C_2 + C_1 = 2 \times 16 = 32$ 이므로 $C_2 = 32$ 이고,

$f(3) - f(-3) = 20$ 이다.

확률과 통계

80-9. 34

각각의 과일이 9개 이상 있는 경우를 생각하자.

바구니에 담은 사과, 감, 귤의 개수를 각각 a, b, c 라 하면 $a + b + c = 9$ 이고 (단, a, b, c 는 음이 아닌 정수)

순서쌍 (a, b, c) 의 개수는

$${}_3H_9 = {}_{11}C_9 = 55$$

이제 사과가 5개 이상 또는 감이 7개 이상인 경우를 제외하면 된다.

i) 사과가 5개 이상인 경우

$a \geq 5$ 이므로 $a' + 5 = a$ 라 할 때, a' 는 음이 아닌 정수이다.

따라서 $a' + b + c = 4$ 를 만족시키는 순서쌍 (a', b, c) 의 개수는

$${}_3H_4 = {}_6C_4 = 15$$

ii) 감이 7개 이상인 경우

$b \geq 7$ 이므로 $b' + 7 = b$ 라 할 때, b' 는 음이 아닌 정수이다.

따라서 $a + b' + c = 2$ 를 만족시키는 순서쌍 (a, b', c) 의 개수는

$${}_3H_2 = {}_4C_2 = 6$$

사과와 5개 이상이고 감이 7개 이상인 경우는 존재하지 않는다.

따라서 구하는 경우의 수는

$$55 - 15 - 6 = 34$$

80-10. 72

빈자리를 포함하여 어른과 아이를 원형으로 배열하는 경우의 수는

$$(6-1)! = 5! = 120$$

이 중에서 아이끼리 이웃하는 경우의 수는

아이를 한 쌍으로 묶고 묶은 한 쌍과 어른 세 명, 빈 자리를 원형으로 배열하는 경우의 수와 같으므로

$$2! \times (5-1)! = 2! \times 4! = 2 \times 24 = 48$$

따라서 구하는 경우의 수는

$$120 - 48 = 72$$

80-11. 262

두 주머니 A, B에서 뽑는 수를 각각 a, b 라 할 때, 모든 순서쌍 (a, b) 는

$(1, 3), (1, 4), (1, 5)$

$(2, 3), (2, 4), (2, 5)$

$a+b$ 가 4인 경우는 $(1, 3)$

$a+b$ 가 5인 경우는 $(1, 4), (2, 3)$

$a+b$ 가 6인 경우는 $(1, 5), (2, 4)$

$a+b$ 가 7인 경우는 $(2, 5)$

따라서 확률변수 X 의 확률분포는 다음과 같다.

X	4	5	6	7	합계
$P(X=x)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$	1

이때 $E(X) = E(\overline{X}) = \frac{11}{2}$ 이므로 $m = \frac{11}{2}$

이때 $\overline{X} = \frac{11}{2}$ 인 경우는

4번 반복해서 확인한 4개의 수의 합이 22인 경우이다.

이때 합이 22가 되는 4개의 수가

$(4, 5, 6, 7)$ 일 때의 확률은 $4! \times \left(\frac{1}{3}\right)^2 \left(\frac{1}{6}\right)^2$

$(5, 5, 5, 7)$ 일 때의 확률은 $\frac{4!}{3!} \times \left(\frac{1}{3}\right)^3 \left(\frac{1}{6}\right)$

$$(4, 4, 7, 7) \text{ 일 때의 확률은 } \frac{4!}{2!2!} \times \left(\frac{1}{6}\right)^4$$

$$(5, 5, 6, 6) \text{ 일 때의 확률은 } \frac{4!}{2!2!} \times \left(\frac{1}{3}\right)^4$$

$$(4, 6, 6, 6) \text{ 일 때의 확률은 } \frac{4!}{3!} \times \left(\frac{1}{3}\right)^3 \left(\frac{1}{6}\right)$$

따라서 구하는 확률은

$$k = 4! \times \left(\frac{1}{6}\right)^2 \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \frac{4!}{3!} \left(\frac{1}{3}\right)^3 \left(\frac{1}{6}\right) \\ + \frac{4!}{2!2!} \left(\frac{1}{6}\right)^4 + \frac{4!}{2!2!} \left(\frac{1}{3}\right)^4 + \frac{4!}{3!} \left(\frac{1}{3}\right)^3 \left(\frac{1}{6}\right)$$

$$\therefore 6^4 k = 24 \times 4 + 8 \times 4 + 6 + 6 \times 16 + 8 \times 4 = 262$$

80-12. 35

상자 A에 들어 있는 공과 상자 B에 들어 있는 공이 처음으로 다시 같아지는 경우는 상자 A에 들어 있는 공의 개수가 12인 경우이다.

6번 반복한 후 상자 A에 들어 있는 공의 개수가 12가 되는 경우는

앞면이 2번, 뒷면이 4번 나온 경우이다. 이 확률은

$${}_6C_2 \left(\frac{1}{2}\right)^6 = \frac{15}{64}$$

한편, 6번을 하기 전에 상자 A에 들어 있는 공의 개수가 12가 되는 경우는 3번 시행 때 앞면이 1번, 뒷면이 2번 나온 경우이다. 이 확률은

$${}_3C_1 \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{3}{8}$$

이고 이후 앞면이 1번, 뒷면이 2번 나와 6번 반복한 후 상자 A에 들어 있는 공의 개수가 12가 될 확률은

$${}_3C_1 \left(\frac{1}{2}\right)^3 \times {}_3C_1 \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{9}{64}$$

따라서 구하는 확률은

$$\frac{15}{64} - \frac{9}{64} = \frac{6}{64} = \frac{3}{32}$$

$$\therefore p + q = 32 + 3 = 35$$

미적분

80-9. ①

$$V = \int_1^2 \frac{\sqrt{3}}{4} (x+1) \ln x dx + \int_2^9 \frac{\sqrt{3}}{4} \ln(10-x) dx \\ = \frac{\sqrt{3}}{4} \left(28 \ln 2 - \frac{35}{4} \right)$$

80-10. 64

$\overline{AC} = 4\sin 2\theta$, $\angle ADC = 5\theta$ 이므로

삼각형 ADC에 내접하는 정사각형의 한 변의 길이를 a 라 두면

$$a + a \tan 5\theta = 4 \sin 2\theta, a = \frac{4 \sin 2\theta}{\tan 5\theta + 1} \text{이다.}$$

$$\text{따라서 } \lim_{\theta \rightarrow 0+} \frac{S(\theta)}{\theta^2} = \lim_{\theta \rightarrow 0+} \left\{ \frac{4 \sin 2\theta}{\theta(\tan 5\theta + 1)} \right\}^2 = 64 \text{이다.}$$

80-11. ③

조건 (가)에 의하여

$$f(0) = -2 + k > 5, k > 7 \text{이다.}$$

조건 (나)에 의하여

$$\text{모든 실수 } x \text{에 대하여 } f'(x) \leq 9 \text{이다.}$$

$$f'(x) = -4e^{2x} + ke^x, f''(x) = -8e^{2x} + ke^x \text{이므로}$$

$$e^x = \frac{k}{8} \text{에서 } f'(x) \text{는 극대이자 최대를 가지고,}$$

$$f'\left(\ln \frac{k}{8}\right) = \frac{k^2}{16} \leq 9, -12 \leq k \leq 12 \text{이다.}$$

따라서 실수 k 의 범위는 $7 < k \leq 12$ 이고,

$$\text{모든 자연수 } k \text{의 합은 } 8 + 9 + 10 + 11 + 12 = 50 \text{이다.}$$

80-12. 45

$$|x| > 1 \text{에서 } f(x) = a$$

$$|x| < 1 \text{에서 } f(x) = \frac{bx^2 + a + 2}{2}$$

$$x = 1 \text{에서 } f(x) = \frac{2a + b + 2}{3} \text{이고}$$

함수 $f(x)$ 가 실수 전체의 집합에서 연속이므로

$$a = \frac{a + b + 2}{2} = \frac{2a + b + 2}{3}, a - b = 2 \text{이다.}$$

이때 방정식 $f(x) = 0$ 의 서로 다른 실근의 개수가 2 이려면

$|x| < 1$ 에서 서로 다른 두 개의 실근을 가져야만 한다.

$$\text{곡선 } f(x) = \frac{b}{2}x^2 + \frac{b+4}{2} \text{는 직선 } x=0 \text{을 기준으로}$$

대칭이므로

$$f(0) \times f(1) = \frac{b+4}{2} \times \frac{2b+4}{2} < 0 \text{이어야 하고,}$$

$$-4 < b < -2 \text{인 정수 } b \text{는 } b = -3 \text{ 뿐이다.}$$

$$\text{따라서 } f(x) = \begin{cases} -\frac{3}{2}x^2 + \frac{1}{2} & (-1 < x < 1) \\ -1 & (x < -1, x > 1) \\ -1 & (x = 1, x = -1) \end{cases} \text{이고,}$$

직선 $y = t(x+1)$ 이 $(-1, -1)$, $(1, -1)$ 을 지날 때와

$$\text{곡선 } y = -\frac{3}{2}x^2 + \frac{1}{2} \text{에 접할 때에만 직선과 곡선의 교점의}$$

개수가 2 이고, 각각 $t = -\frac{1}{2}$, $t = 0$, $t = 3 - \sqrt{6}$ 일 때이다.

$$\text{따라서 } m = 3, t \text{의 값의 합은 } \frac{5}{2} - \sqrt{6} \text{이므로}$$

$$m \times p \times q = 3 \times \frac{5}{2} \times 6 = 45 \text{이다.}$$

Day. 81

수학1, 수학2

81-1. ③

$f'(t) = 3t^2 - 4t$, $g'(t) = 12t + 12$ 이므로

$3t^2 - 4t = 12t + 12$, $t = 6$ 일 때 두 점 P, Q의 속도가
같아진다.

시각 t 에서의 점 P의 가속도는

$$\frac{d}{dt}\{f'(t)\} = 6t - 4$$

따라서 $t = 6$ 에서 점 P의 가속도는

$$6 \cdot 6 - 4 = 32$$

81-2. 13

$$\sum_{n=1}^{29} a_n = 7(a_1 + a_2 + a_3 + a_4) + 4(2 + 4 + 6 + 8 + 10 + 12) \\ + a_1 + 14 = 297$$

$a_2 + a_3 + a_4 = k$ 라 두면, $7(k + 3) + 185 = 297$, $k = 13$ 이다.

81-3. 13

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + ax + b}{x - 1} \text{ 이 수렴하므로}$$

$$f(1) = a + b + 1 = 0 \text{ 이다.}$$

$$f(x) = (x - 1)(x - b) \text{ 라 두면}$$

$x = 1$ 에서의 접선은 $(1, 0)$ 을 지나므로 직선 $g(x)$ 와 반드시
만나므로 $x = b$ 에서의 접선이 직선 $g(x)$ 가 평행해야만 한다.

$$f'(b) = b - 1 = 1, b = 2 \text{ 이므로 } a = -3 \text{ 이고,}$$

$$a^2 + b^2 = 9 + 4 = 13 \text{ 이다.}$$

81-4. ②

i) 함수 $f(x)$ 가 연속함수일 때

$$2a + 2 = a + 5, a = 3 \text{ 이다.}$$

이때 함수 $f(g(x))$ 는 실수 전체의 집합에서 연속이고,
방정식 $f(x) = 3$ 의 서로 다른 실근의 개수는 3이므로
조건을 만족시킨다.

ii) 함수 $f(x)$ 가 연속함수가 아닐 때

$$\text{함수 } g(x) \text{의 최솟값이 } -a \text{ 이므로 } -a \geq -1,$$

$$a \leq 1 \text{ 이어야 한다.}$$

이때 $x \geq -1$ 에서 방정식 $f(x) = a$ 의 서로 다른 실근의
개수는 반드시 2이므로 $x < -1$ 에서 방정식 $f(x) = a$ 의
실근의 개수는 1이어야 한다.

따라서 $2a + 2 > a$, $a > -2$ 이어야 하고,

$-2 < a \leq 1$ 에서 정수 a 의 값은 $-1, 0, 1$ 뿐이다.

따라서 가능한 모든 정수 a 의 값은
 $a = 3, 1, 0, -1$ 로 4개이다.

81-5. ③

함수 $g(t)$ 는 $t = b - a, t = b, t = b + a$ 에서 불연속이므로
 조건 (가)에 의하여

$$(b - a) + b + (b + a) = 3b = 12, b = 4 \text{ 이다.}$$

따라서 $n < 4$ 일 때, $g(n) < 3$ 이고, $ng(n) < 12$ 이다.

$ng(n)$ 의 값이 최대일 때 n 과 $g(n)$ 은 모두 자연수이므로
 가능한 순서쌍 $(n, g(n))$ 은 $(8, 2)$ 뿐이다.

$n = 8$ 일 때 $g(n) = 2$ 이고 이때의 값이 최댓값이므로

$n = 9$ 일 때 $g(n) = 1$, 즉 $b + a = 9$ 이어야만 한다.

따라서 $a = 5, 4a + b = 20 + 4 = 24$ 이다.

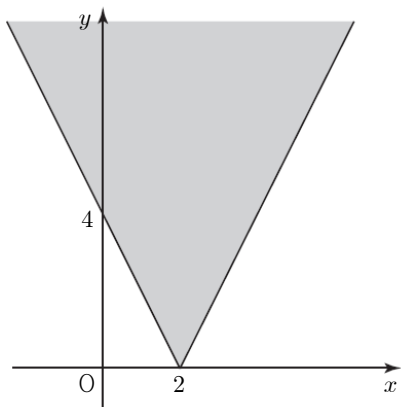
81-6. 19

방정식 $f(x) = 3$ 이 하나의 실근만을 가지므로

$$f(x) = (x - a)^2 + 3 \text{ 이라 둘 수 있다.}$$

이때 조건 (나)에 의하여

함수 $f(x)$ 의 그래프가 존재할 수 있는 영역은 다음과 같다.



이때 $f(x)$ 가 두 그래프와 각각 접할 때 a 의 값이 최소와

최대이므로 두 함수 $g(x) = f(x) - (2x - 4)$

$h(x) = f(x) - (-2x + 4)$ 가 모두 중근을 가지고, 이때의 a 의
 값은 $a = 1, a = 3$ 이므로 $1 \leq a \leq 3$ 이다.

따라서 $f(5) = (a - 5)^2 + 3$ 은 $a = 1$ 일 때 최댓값 19를 가진다.

81-7. 19

n 이 홀수일 때

$$\log_n \frac{3^n}{m} = k \quad (k \text{는 자연수}) \text{라 두면.}$$

$$\frac{3^n}{m} = n^k, m = \frac{3^n}{n^k} \text{ 이므로}$$

m 이 자연수가 되도록 하는 순서쌍 (n, k) 의 개수를 찾으려
 된다.

이때 n 이 3의 거듭제곱이 아니라면 자연수 m 의 값이 존재할
 수

없으므로 $b_5 = b_7 = 0$ 이다.

$n=3$ 일 때 $m=3^{3-k}$ 이 자연수이므로 $k=1, 2, 3$ 이고 $b_3=3$ 이다.

$n=9$ 일 때 $m=3^{9-2k}$ 가 자연수이므로 $k=1, 2, 3, 4$ 이고 $b_9=4$ 이다.

마찬가지로 n 이 짝수일 때에는

$$m = \frac{6^n}{n^k} = \frac{2^n \times 3^n}{n^k} \text{ 이므로 } m \text{ 이 자연수가 되도록 하는}$$

순서쌍 (n, k) 의 개수를 구하면 된다.

이때 n 이 2, 3, 6 의 거듭제곱이 아니라면 자연수 m 의 값이 존재할 수 없으므로 $b_{10}=0$ 이다.

같은 방법으로 $b_2=2, b_4=2, b_6=6, b_8=2$ 이므로

$$\sum_{n=2}^{10} b_n = 2+3+2+0+6+0+2+4+0 = 19 \text{ 이다.}$$

81-8. 50

조건 (가)에 의하여

함수 $f(x)$ 는 점 $(2, 3)$ 에 대하여 대칭이고, 주기가 4 이다.

또한 $f(0)+f(4)=6, f(0)=f(4)$ 에서 $f(0)=f(4)=3$ 이다.

$$\text{이때 } g(x) = \begin{cases} x & (x \geq 0) \\ 0 & (x < 0) \end{cases} \text{ 이므로}$$

$$\begin{aligned} \int_{-2}^2 f(g(x))dx &= \int_{-2}^0 f(0)dx + \int_0^2 f(x)dx = 6 + \int_0^2 f(x)dx \\ &= 20 \text{ 이므로 } \int_0^2 f(x)dx = 14 \text{ 이다.} \end{aligned}$$

함수 $f(x)$ 는 점 $(2, 3)$ 에 대하여 대칭이므로

$$\int_0^4 f(x)dx = 12 \text{ 이고, } \int_2^4 f(x)dx = -2 \text{ 이다.}$$

이때 $\int_0^2 f(x)dx > 6$ 이므로 조건 (나)에 의하여

열린구간 $(0, 2)$ 에서 $f(x) > 0$ 이고, $\int_0^2 |f(x)|dx = 14$ 이다.

한편 $\int_{-2}^2 g(f(x))dx = 15$ 이므로

$$\int_{-2}^2 \{f(x) + |f(x)|\}dx = 30 \text{ 이고,}$$

$\int_{-2}^0 \{f(x) + |f(x)|\}dx = 2$ 이다. 함수 $f(x)$ 의 주기가 4 이므로

$$\int_{-2}^0 \{f(x) + |f(x)|\}dx = \int_2^4 \{f(x) + |f(x)|\}dx = 2 \text{ 이고,}$$

$$\int_2^4 |f(x)|dx = 4 \text{ 이다.}$$

따라서 $\int_0^{10} |f(x)|dx = 14 \times 3 + 4 \times 2 = 50$ 이다.

확률과 통계



81-9. ⑤

연속확률변수의 성질에 의하여 주어진 함수의 그래프와 x 축으로 둘러싸인 부분의 넓이가 1이므로

$$\frac{1}{2} \times 3a \times 1 = 1 \text{ 이므로 } a = \frac{2}{3}$$

따라서

$$P(a \leq X \leq 3a) = \frac{1}{2} \times 2a \times 1 = \frac{2}{3}$$

$$P(0 \leq X \leq 1 \cap a \leq X \leq 3a)$$

$$= P\left(\frac{2}{3} \leq X \leq 1\right) = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{3}{4}\right) \cdot \frac{1}{3} = \frac{7}{24}$$

$$P(0 \leq X \leq 1 | a \leq X \leq 3a)$$

$$= \frac{P(0 \leq X \leq 1 \cap a \leq X \leq 3a)}{P(a \leq X \leq 3a)}$$

$$= \frac{\frac{7}{24}}{\frac{2}{3}} = \frac{7}{16}$$

81-10. 357

$$x + y + z = 7 \text{ 이고 } 1 \leq x \leq y < z \text{ 인}$$

자연수 x, y, z 의 모든 순서쌍 (x, y, z) 는

$$(1, 1, 5), (1, 2, 4), (2, 2, 3)$$

각각의 경우에 세 문자 a, b, c 를 나열하는 경우의 수는

$$\text{i) } x = 1, y = 1, z = 5 \text{ 인 경우 } \frac{7!}{5!} = 42$$

$$\text{ii) } x = 1, y = 2, z = 4 \text{ 인 경우 } \frac{7!}{2!4!} = 105$$

$$\text{iii) } x = 2, y = 2, z = 3 \text{ 인 경우 } \frac{7!}{2!2!3!} = 210$$

i) ~ iii)에 의하여 모든 경우의 수는

$$42 + 105 + 210 = 357$$

81-11. ③

꺼낸 구슬에 적혀 있는 네 개의 수의 합이 10인 경우는 네 개의 수가

$$(1, 1, 3, 5), (1, 1, 4, 4), (1, 2, 3, 4), (1, 2, 2, 5), \\ (2, 2, 3, 3)$$

인 경우이고 각각의 확률을 구하면

$$(1, 1, 3, 5) \text{ 일 확률은 } \frac{{}_2C_2 \times {}_2C_1 \times {}_2C_1}{{}_{10}C_4} = \frac{4}{210}$$

$$(1, 1, 4, 4) \text{ 일 확률은 } \frac{{}_2C_2 \times {}_2C_2}{{}_{10}C_4} = \frac{1}{210}$$

$$(1, 2, 3, 4) \text{ 일 확률은 } \frac{{}_2C_1 \times {}_2C_1 \times {}_2C_1 \times {}_2C_1}{{}_{10}C_4} = \frac{16}{210}$$

$$(1, 2, 2, 5) \text{ 일 확률은 } \frac{{}_2C_1 \times {}_2C_2 \times {}_2C_1}{{}_{10}C_4} = \frac{4}{210}$$

$$(2, 2, 3, 3) \text{ 일 확률은 } \frac{{}_2C_2 \times {}_2C_2}{{}_{10}C_4} = \frac{1}{210}$$

따라서 네 수의 합이 10일 확률은

$$\frac{4}{210} + \frac{1}{210} + \frac{16}{210} + \frac{4}{210} + \frac{1}{210} = \frac{26}{210}$$

네 수의 합이 10이고, 꺼낸 구슬 중 5가 적혀 있는 구슬이 있을 확률은

$$\frac{4}{210} + \frac{4}{210} = \frac{8}{210}$$

따라서 구하는 확률은

$$\frac{\frac{8}{210}}{\frac{26}{210}} = \frac{4}{13}$$

81-12. 144

다섯 개의 원의 내부에 수를 적을 때,

가운데 있는 원에 적는 수를 선택하는 경우의 수는 6

나머지 다섯 개의 수 중 4개를 선택하는 경우의 수는 ${}_5C_4 = 5$

선택한 4개의 수를 나머지 네 원의 내부에 적는 경우의 수는

$$(4-1)! = 3! = 6$$

따라서 다섯 개의 원에 숫자를 적는 경우의 수는

$$6 \times 5 \times 6 = 180$$

한 직선과 만나는 세 수의 합이 14 이상이 되는 경우는

한 직선에 3, 5, 6 또는 4, 5, 6이 배열된 경우이다.

가운데 원에 들어가는 수에 따른 경우의 수를 구하면

i) 가운데 수가 3인 경우

$$\text{한 직선에 5, 6이 배치되는 경우의 수는 } 3 \times 2 = 6$$

ii) 가운데 수가 4인 경우

$$\text{한 직선에 5, 6이 배치되는 경우의 수는 } 3 \times 2 = 6$$

iii) 가운데 수가 5인 경우

$$\text{한 직선에 3, 6 또는 4, 6이 배치되는 경우의 수는}$$

$$2 \times 3 \times 2 = 12$$

iv) 가운데 수가 6인 경우

$$\text{한 직선에 3, 5 또는 4, 5가 배치되는 경우의 수는}$$

$$2 \times 3 \times 2 = 12$$

i)~iv)에 의하여 구하는 경우의 수는

$$180 - 6 - 6 - 12 - 12 = 144$$

미적분

81-9. ③

점 $B_n(m, \sqrt{m-n})$ 이라 두면

곡선 $y = \sqrt{x-n}$ 위의 점 B_n 에서의 접선의 방정식

$y = \frac{1}{2\sqrt{m-n}}(x-m) + \sqrt{m-n}$ 이 점 $(0, 0)$ 을 지난다.

$\frac{m}{2\sqrt{m-n}} = \sqrt{m-n}$, $m = 2n$ 이므로 $B_n(2n, \sqrt{n})$ 이다.

점 B_n 에서 y 축에 내린 수선의 발을 H_n 이라 두자.

$\angle C_n B_n H_n = \alpha_n$, $\angle A_n B_n H_n = \beta_n$ 이라 두면

$\tan \alpha_n = \frac{1}{2\sqrt{n}}$, $\tan \beta_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$ 이고, $\theta_n = \alpha_n + \beta_n$ 이다.

따라서

$$\tan \theta_n = \tan(\alpha_n + \beta_n) = \frac{\frac{1}{2\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{n}}}{1 - \frac{1}{2\sqrt{n}} \times \frac{1}{\sqrt{n}}} = \frac{3\sqrt{n}}{2n-1},$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \times \tan^2 \theta_n = \lim_{n \rightarrow \infty} n \times \frac{9n}{(2n-1)^2} = \frac{9}{4} \text{ 이다.}$$

81-10. 21

등차수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항을 a , 공차를 d 라 하자.

$n \geq 1$ 일 때 $S_{n+2} - S_n = a_{n+2} + a_{n+1}$ 이므로

조건 (가)에 의하여

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S_{n+2} - S_n}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+2} + a_{n+1}}{n} = \frac{2dn + 2a + d}{n} = 2d = 4$$

이므로 $d = 2$ 이다.

조건 (나)에 의하여

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_n a_{n+1}} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{a_n} - \frac{1}{a_{n+1}} \right) \times \frac{1}{2} = \frac{1}{6} \text{ 이고,}$$

$$\frac{1}{2a} = \frac{1}{6} \text{ 이므로 } a = 3 \text{ 이다.}$$

따라서 $a_n = 2(n-1) + 3 = 2n + 1$ 이다.

따라서 $S_n = \sum_{k=1}^n (2k+1) = n^2 + 2n < 500$ 을 만족시키는

자연수 n 의 최댓값은 21 이다.

81-11. ②

함수 $f(x)$ 의 치역이 양의 실수 전체의 집합이므로 $k > 0$ 이고,

함수 $f(x)$ 는 일대일함수이므로 $x > 0$ 에서 $0 < f(x) < 4$ 이다.

따라서 $x > 0$ 에서 함수 $f(x)$ 의 점근선 $y = k^2 = 4$,

$k = 2$ 이다.

양의 실수 t 에 대하여 $f(g(t)) = t$ 이므로

$$g'(t) = \frac{1}{f'(g(t))} \text{ 이다.}$$

$$g'(2) = \frac{1}{f'(g(2))} = \frac{1}{f'(1)} = \frac{1}{2},$$

$$g'(6) = \frac{1}{f'(g(6))} = \frac{1}{f'(-1)} = -\frac{1}{6}$$

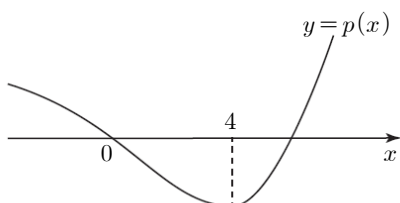
이므로 $g'(2) + g'(6) = \frac{1}{2} + \left(-\frac{1}{6}\right) = \frac{1}{3}$ 이다.

81-12. 20

$g'(x) = e^{(f(x)-4)^3} \times f'(x)$ 에서 $e^{(f(x)-4)^3} > 0$ 이므로
함수 $f(x)$ 는 $x=3$ 에서 극솟값을 갖고,

$\int_0^{f(3)} e^{(t-4)^3} dt = 0$ 에서 $f(3) = 0$ 이다.

$p(x) = \int_0^x (e^{(t-4)^3} - 1) dt$ 라 하면 함수 $p(x)$ 의 그래프의
개형은 다음과 같다.

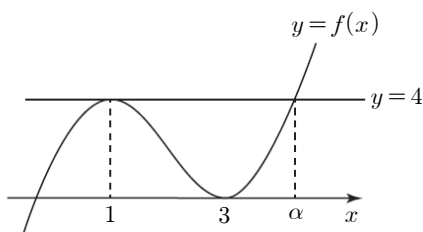


이때 $h(x) = p(f(x))$ 이므로

$f(a)=4$ 인 모든 a 의 값에서 함수 $h(x)$ 는 극소를 갖는다.

$h(x)$ 의 극소점이 두 개이므로 $f(x)=4$ 의 실근 개수는 2개
이하이고 1과 α 중 적어도 하나는 $f(x)=4$ 의 실근이므로
 $p(f(1)) = p(f(\alpha)) = p(4)$ 에서 $f(1) = f(\alpha) = 4$ 이다.

따라서 $f(x)$ 의 그래프 개형은 아래와 같다.



$f(x) = x(x-3)^2$ 에서 $\alpha = 4$ 이므로 $f(\alpha+1) = 20$ 이다.

Day. 82

수학1, 수학2



82-1. 30

함수 $f(x)$ 는 실수 전체의 집합에서 감소하는 삼차함수이고
 $f'(a) = 0$ 이므로 $f'(x) = -3(x-a)^2$ 이어야 한다.
 따라서 $f(a) = 3a$ 이다.

$f(x) = -(x-a)^3 + 3a$ 라 둘 수 있고, $f(0) = 4$ 이므로
 $a = 1$, $f(x) = -(x-1)^3 + 3$, $f(-2) = 30$ 이다.

82-2. 257

$a_1 = 2$ 이므로 $a_3 = -2$, $a_5 = 2$, $a_7 = -2$, $a_9 = 2$, ...
 $a_2 = 3$ 이므로 $a_4 = 5$, $a_6 = 7$, $a_8 = 9$, $a_{10} = 11$, ...
 따라서 모든 자연수 n 에 대하여 $a_{2n} = 2n + 1$ 이다.

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{30} a_n &= \sum_{n=1}^{15} a_{2n-1} + \sum_{n=1}^{15} a_{2n} = 2 + \sum_{n=1}^{15} (2n+1) \\ &= 2 + 2 \times \frac{15 \cdot 16}{2} + 15 = 257 \end{aligned}$$

82-3. ①

㉠. $v_p(4) > 0$, $v_q(4) > 0$ 이므로 $t = 4$ 에서 점 P와 점 Q의
 운동방향은 동일하다.

(참)

㉡. 시각 t 에서의 점 P와 점 Q의 위치를 각각 $x_p(t)$, $x_q(t)$ 라
 하면 $x_p(0) = 0$, $x_q(0) = 0$ 이므로

$$x_p(t) = \int (t^2 - 4t + 3) dt = \frac{1}{3}t^3 - 2t^2 + 3t$$

$$x_q(t) = \int (2t - 4) dt = t^2 - 4t$$

$x_p(t) = x_q(t)$ 에서

$$\frac{1}{3}t^3 - 2t^2 + 3t = t^2 - 4t, \quad \frac{1}{3}t(t^2 - 9t + 21) = 0 \text{ 이고}$$

$t^2 - 9t + 21 > 0$ 이므로 두 점 P, Q가 일치하도록 하는 양수
 t 의 값은 존재하지 않는다.

(거짓)

㉢. $t = 0$ 에서 $t = 4$ 까지 점 P가 움직인 거리는

$$\int_0^4 |t^2 - 4t + 3| dt = 4$$

$t = 0$ 에서 $t = 4$ 까지 점 Q가 움직인 거리는

$$\int_0^4 |2t - 4| dt = 8$$

따라서 점 P가 움직인 거리가 점 Q가 움직인 거리보다 작다.

(거짓)

82-4. ①

$0 < x < \frac{1}{2a}$ 에서 방정식

$3\tan a\pi x = 2\cos a\pi x$ 의 해를 구하면

$$3\sin a\pi x = 2\cos^2 a\pi x = 2 - 2\sin^2 a\pi x$$

$$2\sin^2 a\pi x + 3\sin a\pi x - 2 = 0, \sin a\pi x = \frac{1}{2} \text{ 이므로}$$

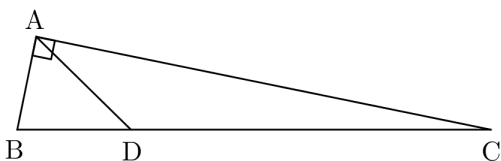
두 점 A, B의 y좌표는 $\sqrt{3}$ 이다.

또한 $\overline{CD} = \frac{1}{a}$ 이고

평행사변형 ABDC의 넓이가 $3\sqrt{3}$ 이므로

$$\frac{1}{a} \times \sqrt{3} = 3\sqrt{3} \text{ 에서 } a = \frac{1}{3} \text{ 이다.}$$

82-5. ②



$\angle B = \theta$, $\angle C = \frac{\pi}{2} - \theta$ 라 하자. $\left(0 < \theta < \frac{\pi}{2}\right)$

삼각형 ABD의 외접원의 반지름의 길이는 $\frac{\overline{AD}}{2\sin\theta}$ 이고

삼각형 ACD의 외접원의 반지름의 길이는

$$\frac{\overline{AD}}{2\sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)} = \frac{\overline{AD}}{2\cos\theta} \text{ 이다.}$$

따라서

$$\frac{1}{\sin\theta} : \frac{1}{\cos\theta} = 1 : 2\sqrt{6} \text{ 에서}$$

$$\frac{2\sqrt{6}}{\sin\theta} = \frac{1}{\cos\theta}$$

$$24\cos^2\theta = \sin^2\theta$$

$$24 - 24\sin^2\theta = \sin^2\theta$$

$$\sin\theta = \frac{2\sqrt{6}}{5}, \cos\theta = \frac{1}{5} \text{ 이다.}$$

이때 $\overline{AB} = k$, $\overline{BD} = k + d$, $\overline{AD} = k + 2d$ ($k > 0$) 라 두면

$$\cos\theta = \frac{k^2 + (k+d)^2 - (k+2d)^2}{2k(k+d)} = \frac{1}{5} \text{ 이므로}$$

$$3(k^2 - 4kd - 5d^2) = 3(k+d)(k-5d), k = 5d \text{ 이고,}$$

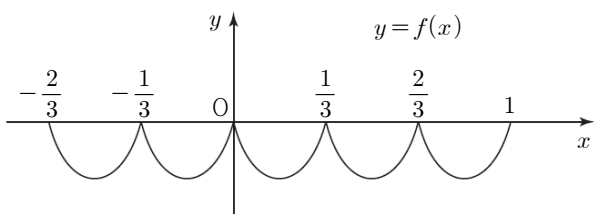
$$\overline{AB} = 5d, \overline{BD} = 6d, \overline{AD} = 7d \text{ 이다.}$$

따라서 $\overline{BC} = 25d$, $\overline{CD} = 19d$ 이고

$$\frac{\overline{AD}}{\overline{CD}} = \frac{7d}{19d} = \frac{7}{19} \text{ 이다.}$$

82-6. ③

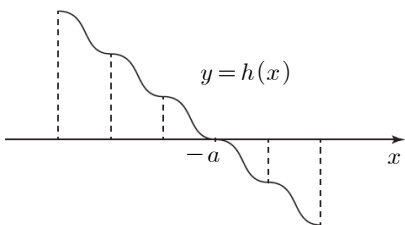
함수 $y = f(x)$ 의 그래프의 개형은 다음과 같다.



$h(x) = \int_{-a}^x f(t)dt$ 라 하면 $h'(x) = f(x) \leq 0$ 이므로

함수 $h(x)$ 는 실수 전체의 집합에서 감소한다.

따라서 함수 $y = h(x)$ 의 그래프의 개형은 다음과 같다.



이때 함수 $g(x) = |h(x)|$ 가 실수 전체의 집합에서 미분가능하고 $h(-a) = 0$ 이므로 $h'(-a) = 0$ 이어야 한다.

따라서 가능한 a 의 값은 $a = \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \dots, \frac{8}{3}$ 뿐이다.

$g(a) = \left| \int_{-a}^a f(t)dt \right|$ 는 a 가 증가할수록 값이 커지므로

$g(a)$ 의 최댓값은 $a = \frac{8}{3}$ 일 때

$$g\left(\frac{8}{3}\right) = \left| \int_{-\frac{8}{3}}^{\frac{8}{3}} f(t)dt \right| = 16 \times \frac{1}{54} = \frac{8}{27} \text{ 이다.}$$

82-7. ⑤

$a_n = f(n)$ 이라 하자.

$\left| x - n \sin \frac{n\pi}{2} \right|$ 의 주기가 4 이므로 경우를 나눠보면 다음과 같다.

$$a_{4k-3} = 8k - 8, \quad a_{4k-2} = 8k - 7,$$

$$a_{4k-1} = 8k - 3, \quad a_{4k} = 8k - 3$$

따라서

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{20} f(n) &= \sum_{k=1}^5 (a_{4k-3} + a_{4k-2} + a_{4k-1} + a_{4k}) \\ &= \sum_{k=1}^5 (32k - 21) = 32 \cdot 15 - 21 \cdot 5 = 375 \text{ 이다.} \end{aligned}$$

82-8. ⑤

조건 (가)에 의하여

$$\frac{f(0)}{g(0)} = -\frac{a}{2} \text{ 이다.}$$

조건 (나)에 의하여

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{1}{2}x^4 - 2x^3 + \frac{1}{2}(a-1)x^2 + 2x - \frac{a}{2} \left(\frac{f(0)}{g(0)} = -\frac{a}{2} \right)$$

$$= \frac{1}{2}(x^2 - 4x + a)(x^2 - 1),$$

$$g(x) = \frac{2f(x)}{(x^2 - 4x + a)(x^2 - 1)} \text{ 이다.}$$

이때 함수 $g(x)$ 는 모든 실수 x 에 대하여 정의되므로

$$f(1) = f(-1) = 0 \text{ 이고}$$

$$f(x) = 2(x^2 - 1), g(x) = \frac{4}{x^2 - 4x + a} \text{ 이다.}$$

따라서 $x^2 - 4x + a > 0$ 이고, $D = 16 - 4a < 0$ 에서

$$a > 4 \text{ 이다,}$$

따라서 $g(4) = \frac{4}{a}$ 의 최댓값은 $a = 5$ 일 때 $\frac{4}{5}$ 이다.

확률과 통계

82-9. ①

각 자리의 수의 합이 5가 되는 경우는 $1+1+1+1+1$,
 $2+1+1+1+0$, $2+2+1+0+0$ 인 경우이다.

i) $1+1+1+1+1$ 인 경우 $1, 1, 1, 1, 1$ 을 일렬로 나열하는
 경우의 수는

$$\frac{5!}{5!} = 1$$

ii) $2+1+1+1+0$ 인 경우, 앞자리가 0인 경우를 제외해야
 하므로 $2, 1, 1, 1, 0$ 을 일렬로 나열하는 경우의 수에서
 $2, 1, 1, 1$ 을 일렬로 나열하는 경우의 수를 빼면

$$\frac{5!}{3!} - \frac{4!}{3!} = 16$$

iii) $2+2+1+0+0$ 인 경우, 앞자리가 0인 경우를 제외해야
 하므로 $2, 2, 1, 0, 0$ 을 일렬로 나열하는 경우의 수에서
 $2, 2, 1, 0$ 을 일렬로 나열하는 경우의 수를 빼면

$$\frac{5!}{2!2!} - \frac{4!}{2!} = 18$$

i) ~ iii)에 의하여 구하는 경우의 수는

$$1 + 16 + 18 = 35$$

[다른 풀이]

각 자리의 수를 각각 a, b, c, d, e 라 하면

$$a + b + c + d + e = 5$$

$$1 \leq a \leq 2, 0 \leq b, c, d, e \leq 2$$

$$a = 1 \text{ 일 때, } {}_4H_4 - {}_4C_1 \times {}_4H_1 = 35 - 16 = 19$$

$$a = 2 \text{ 일 때, } {}_4H_3 - 4 = 16$$

$$19 + 16 = 35$$

82-10. 655

조건 (가)에서 확률변수 X 의 평균이 1이므로

$$\frac{k^2 + k}{2} = 1$$

따라서

$$k^2 + k - 2 = (k-1)(k+2) = 0,$$

$$k = -2 \text{ 또는 } k = 1$$

그런데 조건 (나)에서 $P(X \geq 2k) > 0.5$ 이므로

$k = -2$ 가 되어야 한다. 확률변수 X 의 표준편차를 σ 라 할 때,

$$\begin{aligned} P(X \geq 2k) &= P(X \geq -4) \\ &= P\left(\frac{X-1}{\sigma} \geq \frac{-4-1}{\sigma}\right) \\ &= P\left(Z \geq \frac{-5}{\sigma}\right) = 0.841 \end{aligned}$$

에서 $\sigma = 5$

따라서

$$\begin{aligned} P(X \geq k+1) &= P(X \geq -1) \\ &= P\left(\frac{X-1}{5} \geq \frac{-1-1}{5}\right) \\ &= P(Z \geq -0.4) \\ &= 0.5 + P(0 \leq Z \leq 0.4) \\ &= 0.655 \end{aligned}$$

$$\therefore 1000 \times P(X \geq k+1) = 655$$

82-11. 130

$1 \leq a \leq b \leq c \leq 9$ 인 세 자연수 a, b, c 의 순서쌍 (a, b, c) 의 개수는 9개 중에서 중복을 허용하여 3개를 선택하는 경우의 수이므로

$${}_9H_3 = {}_{11}C_3 = 165$$

$a \times b \times c$ 가 홀수가 되는 경우는 a, b, c 가 모두 홀수인 경우이다.

$1 \leq a \leq b \leq c \leq 9$ 인 세 홀수 a, b, c 의 순서쌍 (a, b, c) 의 순서쌍의 개수는 5개 중에서 중복을 허용하여 3개를 선택하는 경우의 수이므로

$${}_5H_3 = {}_7C_3 = 35$$

따라서 구하는 경우의 수는

$$165 - 35 = 130$$

82-12. ④

시행을 4회 반복한 후 상자 B에 들어 있는 공의 개수가 5개 미만인 경우는 확인한 수가 모두 1 또는 4가 되어야 한다. 따라서 시행을 4회 반복한 후 상자 B에 들어 있는 공의 개수가 5개 미만이 될 확률은

$${}_4C_4 \left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{1}{16}$$

이므로 시행을 4회 반복한 후 상자 B에 들어 있는 공의 개수가 5개 이상이 될 확률은

$$1 - \frac{1}{16} = \frac{15}{16}$$

시행을 4번 반복한 후 상자 B에 들어 있는 공의 개수가 5 이상이고 홀수가 되는 경우는 검은 공의 개수가 3 또는 5 또는 7이다.

카드에 적힌 수가 1인 경우를 x , 2 또는 3인 경우를 y , 4인 경우를 z 로 나타낼 때

i) 검은 공의 개수가 3이 되는 경우

카드에 적힌 수가 x, x, y, z 로 나와야 되고 이때의 확률은

$$\frac{4!}{2!} \left(\frac{1}{4}\right)^2 \left(\frac{1}{2}\right) \left(\frac{1}{4}\right) = \frac{3}{32}$$

ii) 검은 공의 개수가 5가 되는 경우

카드에 적힌 수가 x, y, y, z 또는 y, z, z, z 로 나와야 되고 이때의 확률은

$$\frac{4!}{2!} \left(\frac{1}{4}\right) \left(\frac{1}{2}\right)^2 \left(\frac{1}{4}\right) + \frac{4!}{3!} \left(\frac{1}{2}\right) \left(\frac{1}{4}\right)^3 = \frac{7}{32}$$

iii) 검은 공의 개수가 7이 되는 경우

카드에 적힌 수가 y, y, y, z 로 나와야 되고 이때의 확률은

$$\frac{4!}{3!} \left(\frac{1}{2}\right)^3 \left(\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{8}$$

i)~iii)에서 시행을 4번 반복한 후 상자 B에 들어 있는 공의 개수가 5 이상이고 홀수가 될 확률은

$$\frac{3}{32} + \frac{7}{32} + \frac{1}{8} = \frac{14}{32}$$

따라서 구하는 확률은

$$\frac{\frac{14}{32}}{\frac{15}{16}} = \frac{7}{15}$$

미적분

82-9. 8

$$A\left(\frac{\ln(t+1)}{k}, t\right), B\left(\frac{\ln(2t+1)}{k}, 2t\right) \\ C\left(-\frac{\ln(2t+1)}{2k}, 2t\right), D\left(-\frac{\ln(t+1)}{2k}, t\right) \text{이므로}$$

$$S(t) = \frac{1}{2} \times t \times \left(\frac{3\ln(2t+1)}{2k} + \frac{3\ln(t+1)}{2k} \right) \\ = \frac{3t}{4k} \ln(2t+1)(t+1) \text{이다.}$$

$$\lim_{t \rightarrow 0+} \frac{S(t)}{t^2} = \lim_{t \rightarrow 0+} \frac{3}{4k} \times \frac{\ln(2t^2+3t+1)}{t} = \frac{9}{4k} = 3 \text{이므로}$$

$$k = \frac{3}{4} \text{이다.}$$

따라서

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(e^{kx} - 1)\ln(1+3x)}{\sec(kx) - 1} \\ = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{kx} - 1}{kx} \times \frac{\ln(1+3x)}{3x} \times \frac{3kx^2}{\sec(kx) - 1} = \frac{6}{k} = 8 \text{이다.}$$

82-10. ②

$$y' = \frac{1}{2}x^2e^x \text{이므로 곡선 } y = \frac{1}{2}(x^2 - 2x + 2)e^x \text{ 위의 한 점}$$

$\left(t, \frac{1}{2}(t^2 - 2x + 2)e^t\right)$ 에서의 접선의 방정식은

$$y = \frac{1}{2}t^2e^t(x-t) + \frac{1}{2}(t^2 - 2t + 2)e^t \text{ 이다.}$$

접선의 방정식이 점 $(0, k)$ 를 지날 때 k 와 t 의 관계식은

$$k = -\frac{1}{2}(t^3 - t^2 + 2t - 2)e^t \text{ 이고, 이를 만족시키는 가장 큰}$$

실수 t 의 값이 $f(k)$ 이므로

$$k = -\frac{1}{2}\{f(k)^3 - f(k)^2 + 2f(k) - 2\} \text{ 이다.}$$

이를 미분하면

$$1 = -\frac{1}{2}f'(k)e^{f(k)}\{f(k)^3 + 2f(k)^2\} \text{ 이고}$$

$$f(1) = 0, f(0) = 1, f'(0) = -\frac{2}{3e} \text{ 이므로}$$

$$\lim_{k \rightarrow f(1)-} f'(k) = \lim_{k \rightarrow 0-} f'(k) = -\frac{2}{3e} \text{ 이다.}$$

82-11. 19

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = m$ (m 은 0이 아닌 정수)이라 두면

조건 (나)에 의하여

$$m^2 - m < 12, (m+3)(m-4) < 0 \text{ 이므로}$$

가능한 m 의 값은 $m = -2, -1, 1, 2, 3$ 뿐이다.

수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항을 a , 공비를 r 이라 하면

$$\frac{a}{1-r} = m \text{ 이고}$$

조건 (다)에 의하여

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_{2n} = \frac{ar}{1-r^2} = \frac{a}{1-r} \times \frac{r}{1+r} = m \times \frac{r}{1+r} = \frac{5}{2} \text{ 이다.}$$

$$m = -2 \text{ 일 때, } r = -\frac{5}{9}, a = -\frac{28}{9}$$

$$m = -1 \text{ 일 때, } r = -\frac{5}{7}, a = -\frac{12}{7}$$

$m = 1, 2, 3$ 일 때, $|r| > 1$ 이므로 수열 $\{a_n\}$ 은 수렴하지 않는다.

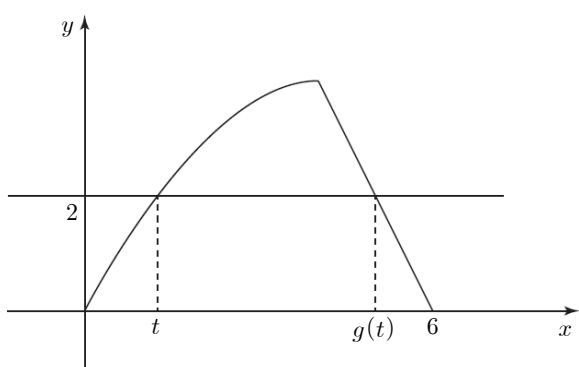
$$\text{따라서 } a_1 = -\frac{28}{9} \text{ 또는 } a_1 = -\frac{12}{7} \text{ 이므로}$$

모든 a_1 의 값의 곱은

$$\left(-\frac{28}{9}\right) \times \left(-\frac{12}{7}\right) = \frac{16}{3} \text{ 이고, } p+q = 3+16 = 19 \text{ 이다.}$$

82-12. 32

함수 $f(x)$ 는 실수 전체의 집합에서 연속이므로 $a = \sqrt{e}$ 이고,
함수 $f(x)$ 의 그래프의 개형은 다음과 같다.



$0 < t < 4$ 에서

$f(t) = -2g(t) + 12$, $g(t) = -\frac{1}{2}f(t) + 6$ 이므로

$$\int_0^4 g(t) dt = \int_0^4 \left(-\frac{1}{2}f(t) + 6 \right) dt = -\frac{1}{2} \int_0^4 f(t) dt + \int_0^4 6 dt$$

이고,

$$\begin{aligned} \int_0^4 f(x) dx &= \int_0^4 x e^{\frac{1}{2} - \frac{1}{32}x^2} dx \\ &= \left[-16e^{\frac{1}{2} - \frac{1}{32}x^2} \right]_0^4 = 16(\sqrt{e} - 1) \end{aligned}$$

이므로 $\int_0^4 g(t) dt = 32 - 8\sqrt{e}$ 이다.

$4 < t < 6$ 에서

$f(g(t)) = -2t + 12$, $g(t) = f^{-1}(-2t + 12)$ 이므로

$$\int_4^6 g(t) dt = \int_4^6 f^{-1}(-2t + 12) dt \text{ 에서}$$

$-2t + 12 = s$ 로 치환하면

$$\int_4^6 g(t) dt = \int_4^0 f^{-1}(s) \times \left(-\frac{1}{2} \right) ds = \frac{1}{2} \times \int_0^4 f^{-1}(s) ds$$

$$\int_0^4 f(x) dx = 16\sqrt{e} - 16 \text{ 이므로}$$

$$\int_0^4 f^{-1}(s) ds = 16 - (16\sqrt{e} - 16) = 16(2 - \sqrt{e}) \text{ 이고,}$$

$$\int_4^6 g(t) dt = 8(2 - \sqrt{e}) \text{ 이다.}$$

따라서

$$\int_0^6 g(t) dt = \int_0^4 g(t) dt + \int_4^6 g(t) dt = 48 - 16\sqrt{e} \text{ 이고,}$$

$$p + q = 48 + (-16) = 32 \text{ 이다.}$$