

백일대장

수능 역전을 위한 백일 전략서

11

정답 및 해설

Day. 71

수학1, 수학2



71-1. ④

방정식 $f(x) = k$ 의 세 실근이 $-1, 1, 2$ 이므로
 $f(x) - k = a(x+1)(x-1)(x-2)$ 라 놓을 수 있다.
 $f'(2) = 27$ 이므로 $f'(2) = 3a = 27$ 에서 $a = 9$
 $f(3) = 52$ 이므로 $f(3) = 8a + k = 72 + k = 52$ 에서
 $k = -20$

71-2. ①

사각형 ABDC의 넓이는 $\frac{a}{2}(2^a + 2^{2a})$
 사각형 ABFE의 넓이는 $\frac{3a}{2}(2^{2a} - 2^a)$
 사각형 ABDC와 사각형 ABFE의 넓이의 비가 $5:3$ 이므로
 $\frac{a}{2}(2^a + 2^{2a}) = \frac{5}{3} \cdot \frac{3a}{2}(2^{2a} - 2^a)$ 이고 정리하면
 $2^a = \frac{3}{2}, a = \log_2 3 - 1$

71-3. ⑤

$$\int_a^b (-x^2 + 4x - 3)dx = - \int_a^b (x-1)(x-3)dx$$

i) $a \leq -1$ 일 때

$$\int_{-1}^3 (-x^2 + 4x - 3)dx < 0 \text{이므로}$$

$$a \text{보다 큰 정수 } b \text{에 대하여 } \int_a^b (-x^2 + 4x - 3)dx < 0$$

ii) $a = 0$ 일 때

$$\int_0^1 (-x^2 + 4x - 3)dx < 0,$$

$$\int_0^2 (-x^2 + 4x - 3)dx = -\frac{2}{3},$$

$$\int_0^3 (-x^2 + 4x - 3)dx = 0$$

$$b \geq 4 \text{일 때, } \int_0^b (-x^2 + 4x - 3)dx < 0$$

$$b = 1 \text{ 또는 } b \geq 4 \text{일 때, } \int_0^b (-x^2 + 4x - 3)dx < 0$$

따라서 $b = 3$ 일 때에만 조건을 만족시킨다.

iii) $a = 1$ 일 때

$$\int_1^2 (-x^2 + 4x - 3)dx > 0$$

$$\int_1^3 (-x^2 + 4x - 3) dx > 0$$

$$\int_1^4 (-x^2 + 4x - 3) dx = 0$$

$$b \geq 5 \text{ 일 때, } \int_1^b (-x^2 + 4x - 3) dx < 0$$

따라서 $b = 2, 3, 4$ 일 때 조건을 만족시킨다.

iv) $a = 2$ 일 때

$$\int_2^3 (-x^2 + 4x - 3) dx > 0$$

$$b \geq 4 \text{ 일 때, } \int_2^b (-x^2 + 4x - 3) dx < 0$$

따라서 $b = 3$ 일 때에만 조건을 만족시킨다.

i) ~ iv)에 의하여 구하는 순서쌍 (a, b) 는

$(0, 3), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 3)$

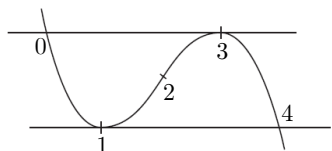
이므로 순서쌍의 개수는 5이다.

$$* a > 2 \text{ 이면 } \int_a^b (-x^2 + 4x - 3) dx < 0$$

[다른 풀이]

$$f(x) = \int_0^x (-x^2 + 4x - 3) dx \text{ 라고 하고}$$

그래프의 개형을 이용하면



$f(b) \geq f(a)$ 를 만족하는 $a < b$ 인 정수 (a, b) 는

$(0, 3), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 3)$

이므로 순서쌍의 개수는 5

71-4. ⑤

$$a_1 = 2 \text{ 이므로 } a_3 = -2, a_5 = 2, a_7 = -2, a_9 = 2, \dots$$

$$a_2 = 3 \text{ 이므로 } a_4 = 5, a_6 = 7, a_8 = 9, a_{10} = 11, \dots$$

따라서 모든 자연수 n 에 대하여 $a_{2n} = 2n + 1$

$$\sum_{n=1}^{30} a_n = \sum_{n=1}^{15} a_{2n-1} + \sum_{n=1}^{15} a_{2n} = 2 + \sum_{n=1}^{15} (2n + 1)$$

$$= 2 + 2 \times \frac{15 \cdot 16}{2} + 15 = 257$$

71-5. 110

(가) 조건에 의하면 $a_{m+1} = 0$ 이므로, $a = -md$ 이고

$$\sum_{k=1}^{2m+1} |a_k| = -2 \sum_{k=1}^m a_k$$

$$= 2(d + 2d + 3d + \dots + md) = m(m+1)d$$

$$m(m+1)d = 144 = 2^4 \times 3^2 \text{ 에서}$$

$m = 1, 2, 3, 8$ 가 가능하고,

대응되는 d 의 값은 각각 72, 24, 12, 2
따라서 모든 d 의 값의 합은 110

71-6. 6

조건을 만족시키는 함수 $f(x)$ 는 $x=1$ 에서 극대,

$x=m$ ($m>2$)에서 극소가 되어야 하고

$f(2)=f(m)+10$ 이 되어야 한다.

$f'(x)=3(x-1)(x-m)=3x^2-3(1+m)x+3m$ 에서

$f(x)=x^3-\frac{3}{2}(1+m)x^2+3mx+C$ 라 놓을 수 있고

$f(2)=f(m)+10$ 에서 $m=4$ 임을 알 수 있다.

따라서 $f(x)=x^3-\frac{15}{2}x^2+12x+C$

$f'(x)=3x^2-15x+12$ 에서

$f'(2)=12-30+12=-6$ 이므로 $|f'(2)|=6$

71-7. ③

$\angle BAC=\theta'$ 이라 할 때, $\overline{BC}=2\sin\theta'$

$\angle BOC=\pi-\theta$ 이고, $\angle ABC=\frac{\pi}{2}-\theta'$ 이므로

삼각형 OBC에서 사인법칙에 의하여

$$\frac{\overline{BC}}{\sin(\pi-\theta)} = \frac{\overline{OC}}{\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta'\right)}$$

$$\frac{2\sin\theta'}{\sin\theta} = \frac{1}{\cos\theta'}$$

$$2\sin\theta'\cos\theta' = \sin\theta = \frac{4\sqrt{2}}{9}$$

양변을 제곱하면

$$4\sin^2\theta'\cos^2\theta' = \frac{32}{81}$$

$$\sin\theta' = \frac{2\sqrt{2}}{3}, \cos\theta' = \frac{1}{3}$$

삼각형 BCD에 외접하는 원의 반지름의 길이를 R 이라 하면

$$\frac{\overline{BC}}{\sin\theta} = \frac{2\sin\theta'}{\sin\theta} = 2R \text{ 이므로}$$

$$\overline{O'C} = \overline{BO'} = \frac{3}{2}$$

선분 BC의 중점을 E라 하면, $\cos\theta = \frac{7}{9}$ 에서

$$\overline{O'E} = \overline{O'C}\cos\theta = \frac{7}{6} \text{ 이고}$$

$$\overline{BC} = \frac{4\sqrt{2}}{3} \text{ 이므로 삼각형 O'BC의 넓이는}$$

$$\frac{1}{2} \times \frac{7}{6} \times \frac{4\sqrt{2}}{3} = \frac{7}{9}\sqrt{2}$$

[다른 풀이]

$\angle BAC=\theta'$ 이라 하고 선분 BC의 중점을 E라 하자.

$$\overline{BC} = 2\sin\theta', \quad \overline{BE} = \overline{CE} = \sin\theta'$$

$$\frac{2\sin\theta'}{\sin\theta} = 2R \text{ 이므로}$$

$$\overline{O'B} = \overline{O'C} = \frac{\sin\theta'}{\sin\theta} = \frac{\sin\theta'}{\sin 2\theta'} = \frac{1}{2\cos\theta'}$$

(사각형 DCOB에서 $\angle COB = 2\theta'$ 이므로 $\theta + 2\theta' = \pi$)

$\angle BO'E = \theta$ 이므로

$$\sin\theta = \frac{\sin\theta'}{1} = 2\sin\theta' \cos\theta' = \frac{4\sqrt{2}}{9}$$

$$\sin\theta' = \frac{2\sqrt{2}}{3}, \quad \cos\theta' = \frac{1}{3}$$

71-8. 114

(나)에서 함수 $g(x)$ 는 $x=4$ 에서 극소를 가지므로 $a_2 = 4$

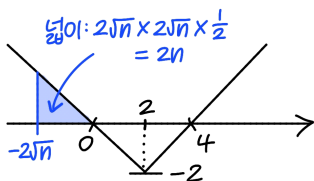
(가)에 따라 $a_1 = 2$ 이므로 $g(a_1) = -2$, $g(a_2) = -4$ 이다.

따라서 수열 $\{g(a_n)\}$ 은 일반항이 $-2n$ 인 등차수열이어야 한다.

이를 만족시키는 수열 $\{a_n\}$ 은 $a_1 = 2$, $a_2 = 4$,

$$a_n = -2\sqrt{n} \quad (n \geq 3)$$

* $a_n = -2\sqrt{n} \ (n \geq 3)$ 인 이유



$$g(a_n) = \int_0^{a_n} f(t) dt = -2n \quad (n \geq 3)$$

$\sum_{i=1}^{10} (a_i)^2 = 228$ 이므로 $g(x) - g(a_k)$ 의 극댓값 m 은 228이고

$-g(a_k) = 228$ 을 만족하는 k 를 구하면 된다.

$$k \geq 3 \text{ 일 때, } g(a_k) = -2k = -228 \text{ 이므로 } k = 114$$

확률과 통계

71-9. ①

$$(x-a)^3 = x^3 - 3ax^2 + 3a^2x - a^3 \text{ 이고}$$

$\left(x^2 + \frac{1}{x}\right)^5$ 의 전개식에서 일반항은

$${}_5C_r x^{2r} \left(\frac{1}{x}\right)^{5-r} = {}_5C_r x^{3r-5} \quad (r=0, 1, \dots, 5)$$

이므로 주어진 식의 전개식에서 x^7 이 되는 경우는

$$r=3 \text{ 일 때, } 1 \times {}_5C_3 = 10$$

$$r=4 \text{ 일 때, } -a^3 \times {}_5C_4 = -5a^3$$

$$10 - 5a^3 = 50 \text{ 에서 } a^3 = -8$$

$$\therefore a = -2$$

71-10. ④

$f(1)+f(2)+f(3)+f(4)$ 의 값은 최대 20이므로
 $f(1)+f(2)+f(3)+f(4)$ 의 값이 9의 배수가 되는 경우는
 합이 9 또는 18이 되는 경우 뿐이다.

i) $f(1)+f(2)+f(3)+f(4)=9$ 일 때

$f(1)=a, f(2)=b, f(3)=c, f(4)=d$ 라 하자.

$$a-1=a', b-1=b', c-1=c', d-1=d'$$

a', b', c', d' 은 음이 아닌 정수

$$a+b+c+d=9 \text{ 이므로}$$

$a'+b'+c'+d'=5$ 를 만족시키는 순서쌍

$$(a', b', c', d') \text{의 개수는 } {}_4H_5 = {}_8C_5 = 56$$

이때 a, b, c, d 의 값은 최대 5 이므로

56개 중 a, b, c, d 의 값이 6이 나오는 네 가지 경우를
 제외해 주어야 한다.

$$\therefore 56-4=52$$

ii) $f(1)+f(2)+f(3)+f(4)=18$ 일 때

$$5+5+4+4=18 \text{인 경우 : } \frac{4!}{2! \times 2!} = 6$$

$$5+5+5+3=18 \text{인 경우 : } \frac{4!}{3!} = 4$$

$$\therefore 6+4=10$$

따라서 전체 개수는 $52+10=62$

71-11. 8

주머니에서 꺼낸 공에 적혀 있는 수를 확률변수 X 라 하면

X 가 갖는 값은 1, 2, 3, 4이고,

확률변수 X 의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	1	2	3	4	합계
$P(X=x)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	1

$$E(X) = 1 \times \frac{1}{2} + 2 \times \frac{1}{6} + 3 \times \frac{1}{6} + 4 \times \frac{1}{6} = 2$$

$$E(X^2) = 1^2 \times \frac{1}{2} + 2^2 \times \frac{1}{6} + 3^2 \times \frac{1}{6} + 4^2 \times \frac{1}{6} = \frac{16}{3}$$

$$V(X) = E(X^2) - \{E(X)\}^2 = \frac{16}{3} - 2^2 = \frac{4}{3}$$

이때 크기가 n 인 표본의 표본평균 $\bar{X}$ 에 대하여

$$V(\bar{X}) = \frac{1}{n} V(X) = \frac{4}{3n} \text{ 이고 } Y = n\bar{X} \text{ 이므로}$$

$$E(Y) = E(n\bar{X}) = nE(\bar{X}) = nE(X) = 2n$$

$$\frac{E(Y)}{V(\bar{X})} = \frac{2n}{\frac{4}{3n}} = \frac{3}{2}n^2 = 96,$$

$$\therefore n=8$$

71-12. ①

시행이 모두 끝난 후 남은 검은색 카드의 개수는 1 또는 3이다.

i) 검은색 카드의 개수가 1인 경우

앞면에 놓여진 검은색 카드가 1 또는 2 또는 4가 되어야 한다.

각각의 확률은 $\frac{16}{6^3}$ 이므로

앞면에 놓여진 검은색 카드의 개수가 1이고 적혀 있는 수가

$$8 \text{의 약수일 확률은 } \frac{16}{6^3} \times 3 = \frac{2}{9}$$

ii) 검은색 카드의 개수가 3인 경우

앞면에 놓여진 검은색 카드가 1, 2, 5 또는 1, 3, 4가 되어야 한다.

각각의 확률은 $\frac{6}{6^3}$ 이므로

앞면에 놓여진 검은색 카드의 개수가 3이고 적혀 있는 수가

$$8 \text{의 약수일 확률은 } \frac{6}{6^3} \times 2 = \frac{1}{18}$$

i) ~ ii)에 의하여 구하는 확률은

$$\frac{2}{9} + \frac{1}{18} = \frac{5}{18}$$

미적분

71-9. ②

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{k+n}{n^2} f' \left(\frac{k}{n} \right) = \int_0^1 (x+1) f'(x) dx$$

$$= 2f(1) - f(0) - \int_0^1 f(x) dx = 14$$

$f(1) = 1$ 이고, $f(0) = 0$ 이므로

$$\int_0^1 f(x) dx = -12$$

이때, 조건 (가)에 따라

모든 실수 x 에 대하여 $f(-x) = -f(x)$ 이므로

$$\int_{-1}^0 f(x) dx = 12$$

71-10. 21

접점의 x 좌표를 t 라 하면 접선의 기울기는

$$\frac{(t-n)^2 + 3n}{t} = 2(t-n) \text{ 이고 정리하면 } t = \sqrt{n^2 + 3n}$$

$$\text{따라서 } a_n = 2(\sqrt{n^2 + 3n} - n)$$

$\lim_{n \rightarrow \infty} \{n \times (c - a_n)\}$ 가 수렴하려면

$$c = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{6n}{\sqrt{n^2 + 3n} + n} = 3 \text{ 이어야 하고}$$

$c = 3$ 을 대입하면

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \{n \times (c - a_n)\} = \lim_{n \rightarrow \infty} n \times (2n + 3 - \sqrt{4n^2 + 12n})$$

$$\text{에서 } \alpha = \frac{9}{4} \quad \therefore 4 \times (c + \alpha) = 21$$

71-11. ④

$$\overline{AB} = x \text{라 하자. } \overline{BE} = x \sin \theta$$

$$\overline{EC} = \overline{AC} - \overline{AE} = x(1 - \cos \theta)$$

$$\angle ADB = \frac{\pi}{2} \text{이므로 점 D는 } \overline{BC} \text{의 중점}$$

$$\text{따라서 } \angle DAE = \frac{\theta}{2} \text{가 되고 } \overline{DE} = x \sin \frac{\theta}{2}$$

$$\text{따라서 } \lim_{\theta \rightarrow 0^+} \frac{\overline{DE} \times \overline{EC}}{\theta^2 \times \overline{BE}} = \frac{x}{4} = 4 \text{ 이므로 } x = 16$$

71-12. 40

(가)에 의해 구간 $[0, 1]$ 에서 $g(t)$ 는 상수이므로

$\angle APO$ 는 상수이고

따라서 곡선 $y = f(x)$ ($0 \leq x \leq 1$)는

$B = (0, f(0)) = (0, 4)$ 라 할 때,

삼각형 ABO 의 외접원의 일부이다.

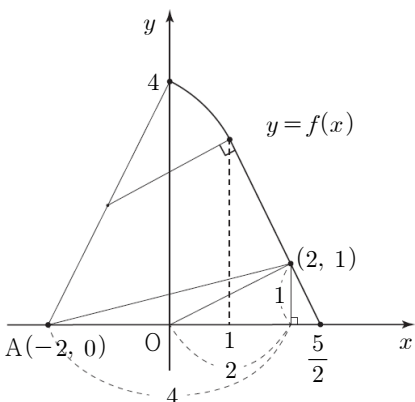
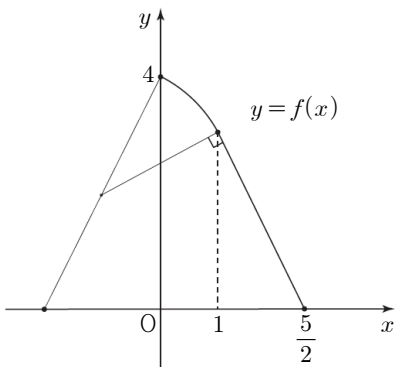
이 원은 중심이 $(-1, 2)$ 이고 반지름의 길이가 $\sqrt{5}$ 이므로

$$f(1) = 3 \text{이고 } f'(1) = -2$$

따라서 구간 $\left[1, \frac{5}{2}\right]$ 에서 $f'(x) \leq -2$ 인데

구간 $\left[1, \frac{5}{2}\right]$ 에서 $f(x)$ 의 평균변화율이 -2 이므로

$$f(x) = -2x + 5 \left(1 \leq x \leq \frac{5}{2}\right)$$



$$\text{따라서 } f(2) = 1 \text{이고 } g(2) = \frac{4-2}{1+4 \times 2} = \frac{2}{9}$$

Day. 72

수학1, 수학2



72-1. 18

$$\sum_{k=1}^9 (a_k + b_{k+1}) = \sum_{k=1}^{10} (a_k + b_k) - a_{10} - b_1 = 12$$

$$\sum_{k=1}^9 (a_{k+1} - b_k) = \sum_{k=1}^{10} (a_k - b_k) - a_1 + b_{10} = 20$$

이고 두 식을 더하면

$$2 \sum_{k=1}^{10} a_k - (a_1 + b_1) = 32$$

이때, $a_1 + b_1 = 4$ 이므로

$$\sum_{k=1}^{10} a_k = 18$$

72-2. 7

$f(x) = -2x^4 + 8x^2$ 이라 할 때,

$$f'(x) = -8x^3 + 16x = -8x(x - \sqrt{2})(x + \sqrt{2})$$

함수 $f(x)$ 의 극댓값은 8, 극솟값은 0

따라서, 방정식 $f(x) = k$ 의 실근의 개수가 4이 되도록 하는

정수 k 는 1부터 7까지의 모든 자연수이고, 그 개수는 7

72-3. ③

$$\int_{-1}^1 (t+1)dt = 2 \text{ 이므로 } \int_{-1}^1 f(t)dt = 0$$

$$F(x) = \int_{-1}^x (t+1)dt \int_{-1}^x f(t)dt \text{ 라 하면 } F(1) = 0$$

$$F'(x) = (x+1) \int_{-1}^x f(t)dt + f(x) \int_{-1}^x (t+1)dt$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x^2 - 1} \left\{ \int_{-1}^x (t+1)dt \int_{-1}^x f(t)dt \right\}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{F(x) - F(1)}{x^2 - 1}$$

$$= \frac{1}{2} \times F'(1) = \frac{1}{2} \times 2 \times f(1) = f(1) = 2$$

$f(x) = x^2 + ax + b$ 라 할 때,

$$\int_{-1}^1 f(t)dt = 0, f(1) = 2 \text{ 에서 } a = \frac{4}{3}, b = -\frac{1}{3}$$

$$\therefore f(4) = 21$$

72-4. ②

$$\int_0^1 |v(t)|dt = \frac{1}{6}, \int_1^2 |v(t)|dt = \frac{1}{3}, \int_2^3 |v(t)|dt = \frac{1}{2}$$

조건 (나)에 따라

$0 < t < 1$ 에서의 속도가 양수, $1 < t < 2$ 에서의 속도가 음수,
 $2 < t < 3$ 에서의 속도가 양수이거나

$0 < t < 1$ 에서의 속도가 음수, $1 < t < 2$ 에서의 속도가 양수,
 $2 < t < 3$ 에서의 속도가 음수인 경우이다.

이때, 조건 (다)를 만족시키는 경우는

$0 < t < 1$ 에서의 속도가 음수, $1 < t < 2$ 에서의 속도가 양수,
 $2 < t < 3$ 에서의 속도가 음수인 경우이다.

따라서 $t = 1$ 에서 $t = 3$ 까지의 위치의 변화량은

$$\int_1^2 v(t)dt + \int_2^3 v(t)dt = \frac{1}{3} - \frac{1}{2} = -\frac{1}{6}$$

72-5. ④

점 C에서 선분AB에 내린 수선의 발을 E라 하고
 선분CD의 중점을 F, 선분AB의 중점을 G라 하자.

삼각형CAE에서 $\overline{AE} = n - \frac{a_n}{2}$ 이므로

$$\overline{CE} = (\sqrt{2})^2 - \left(n - \frac{a_n}{2}\right)^2$$

삼각형CFG에서 $\overline{CF} = \frac{a_n}{2}$, $\overline{CG} = n$ 이므로

$$\overline{FG} = n^2 - \left(\frac{a_n}{2}\right)^2$$

이때, $\overline{CE} = \overline{FG}$ 이므로

$$(\sqrt{2})^2 - \left(n - \frac{a_n}{2}\right)^2 = n^2 - \left(\frac{a_n}{2}\right)^2 \text{ 이고}$$

$$\text{정리하면 } a_n = 2\left(n - \frac{1}{n}\right)$$

$$\frac{1}{n \times a_n} = \frac{1}{4} \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n+1} \right)$$

$$\sum_{n=2}^{10} \frac{1}{n \times a_n} = \frac{1}{4} \left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2} - \frac{1}{10} - \frac{1}{11} \right) = \frac{18}{55}$$

72-6. ②

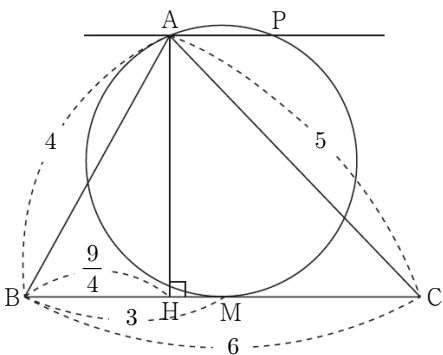
코사인법칙에 의해 $\overline{BC} = 6$

$$\cos(\angle ABC) = \frac{9}{16} \text{ 이므로}$$

A에서 BC에 내린 수선의 발을 H라 하면

$$\overline{BH} = \frac{9}{4} \text{ 이고 따라서 } \overline{HM} = \frac{3}{4}$$

$$\text{대칭성에 의해 } \overline{AP} = 2 \times \overline{HM} = \frac{3}{2}$$



72-7. ㉓

두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$ 의 그래프의 교점 A, B는 직선 $y=x$ 위에 있고 $\overline{AB}=2\sqrt{2}$ 이므로

점 A의 좌표를 $A(t, t)$ 라 하면

점 B의 좌표는 $B(t+2, t+2)$ 라 놓을 수 있다.

$$\log_2(t+a)=t \text{ 에서 } 2^t=t+a \quad \cdots \textcircled{㉑}$$

$$\log_2(t+2+a)=t+2 \text{ 에서}$$

$$2^{t+2}=t+2+a$$

$$4t+4a=t+2+a \text{ 이므로}$$

$$a=-t+\frac{2}{3} \quad \cdots \textcircled{㉒}$$

$$\textcircled{㉑}, \textcircled{㉒} \text{ 에서 } t=\log_2\frac{2}{3}, a=-\log_2\frac{2}{3}+\frac{2}{3}$$

따라서 $f(x)=\log_2\left(x-\log_2\frac{2}{3}+\frac{2}{3}\right)$ 이고

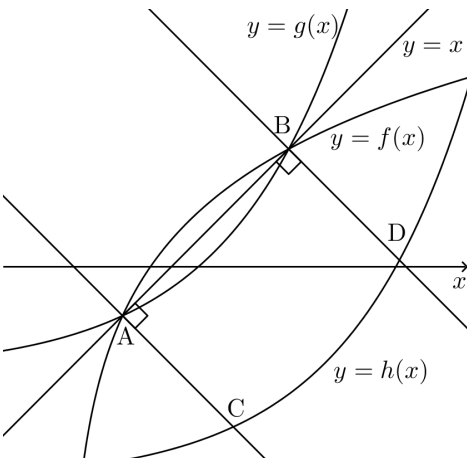
$$g(x)=2^x+\log_2\frac{2}{3}-\frac{2}{3}$$

함수 $y=h(x)$ 의 그래프는

함수 $y=g(x)$ 의 그래프를 x 축 방향으로 $\frac{4}{3}$,

y 축 방향으로 $-\frac{4}{3}$ 만큼 평행이동시킨 그래프이므로

$$h(x)=g\left(x-\frac{4}{3}\right)-\frac{4}{3}$$



$$\text{따라서 } \overline{AC} = \overline{BD} = \sqrt{\frac{16}{9} + \frac{16}{9}} = \frac{4\sqrt{2}}{3} \text{ 이고}$$

$$\text{사각형 ABDC의 넓이는 } \frac{4\sqrt{2}}{3} \times 2\sqrt{2} = \frac{16}{3}$$

72-8. 6

$h(x) = f(x) - g(x)$ 라 하자.

조건 (가)에 따라 $x = 5$ 에서 함수 $h(x)$ 의 부호가 바뀌므로 $h(5) = 0$

조건 (나)에서 $h(a) = 0$ 이고 $x = a$ 에서 부호가 바뀌지

않으므로 $h'(a) = 0$ 이고 따라서 $h(x) = (x-5)(x-a)^2$,

$$g(x) = (x-5)(x-a) + C$$

조건 (다)에서 $f'(a) = -2$ 이므로

$$h'(a) = f'(a) - g'(a) = 0 \text{에서 } g'(a) = -2$$

$$g'(a) = a - 5 = -2 \text{이므로 } a = 3$$

$$f(x) = (x-5)(x-3)^2 + (x-5)(x-3) + C$$

$$f'(5) = (5-3)^2 + (5-3) = 6$$

확률과 통계**72-9. ③**

$(x+y+z+w)^8$ 의 전개식의 항 $x^a y^b z^c w^d$ 에 대하여
구하는 항의 개수는

$a+b+c+d=8$ 이고 $a \geq 1, b \geq 0, c \geq 0, d=0$ 을

만족시키는 네 정수 a, b, c, d 의 순서쌍 (a, b, c, d) 의 개수인
 ${}_3H_7$ 와 같다.

$$\therefore {}_3H_7 = {}_9C_7 = {}_9C_2 = 36$$

72-10. 32

확률변수 $\overline{X}$ 는 정규분포 $N\left(m, \left(\frac{\sigma}{7}\right)^2\right)$ 을 따르고,

확률변수 $\overline{Y}$ 는 정규분포 $N\left(\frac{m}{3}, \left(\frac{\sigma}{7}\right)^2\right)$ 을 따른다.

$$P(\overline{X} \geq 20) = P(\overline{Y} \leq 20) \text{ 이므로}$$

$$P\left(Z \geq \frac{7}{\sigma}(20-m)\right) = P\left(Z \leq \frac{7}{\sigma}\left(20-\frac{m}{3}\right)\right) \text{에서}$$

$$20-m = -\left(20-\frac{m}{3}\right), m = 30$$

$$P(\overline{X} \geq m+\sigma) = P(\overline{Y} \leq 12) \text{이므로}$$

$$P(Z \leq 7) = P\left(Z \leq \frac{7}{\sigma}\left(12-\frac{30}{3}\right)\right) \text{에서 } \sigma = 2$$

$$\therefore m + \sigma = 32$$

72-11. ③

주사위를 던져 3의 배수가 나오고

이때 주머니 A에서 꺼낸 두 개의 공이 모두 검은 공일 확률은

$$\frac{1}{3} \times \frac{2}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{9}$$

주사위를 던져 3의 배수가 아닌 수가 나오고

이때 주머니 B에서 꺼낸 두 개의 공이 모두 검은 공일 확률은

$$\frac{2}{3} \times \frac{2}{4} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{9}$$

따라서 구하는 확률은 $\frac{1}{9} + \frac{1}{9} = \frac{2}{9}$

72-12. 164

조건 (나)에서 ab 와 cd 가 모두 4의 배수이므로

- i) a 와 b 가 모두 짝수인 경우 c 와 d 도 모두 짝수
- ii) a, b 중에서 하나만 짝수인 경우 c, d 중에서 하나만 짝수
- i) a 와 b 가 모두 짝수인 경우

a, b, c, d 가 모두 짝수이고 $a+b+c+d=20$ 이므로
가능한 경우의 수는 ${}_4H_6 = {}_9C_3 = 84$

- ii) a, b 중에서 하나만 짝수인 경우

a, b 중에서 하나가 짝수(4의 배수), 하나가 홀수이고,
 c, d 중에서도 하나가 짝수(4의 배수)

$a+b+c+d=20$ 에서 20은 4의 배수이므로
홀수 두 개 중 하나는 4로 나눈 나머지가 1이고,
하나는 4로 나눈 나머지가 3

홀수와 짝수를 정하는 경우의 수 : $2 \times 2 = 4$

$(4k+1), (4k+3)$ 꼴을 정하는 경우의 수 : 2

이때, a, c 가 4의 배수, b 가 4로 나눈 나머지가 1,
 d 가 4로 나눈 나머지가 3이라 하면

$$(4a' + 4) + (4b' + 1) + (4c' + 4) + (4d' + 3) = 20$$

$(a', b', c', d'$ 은 음이 아닌 정수)

$a' + b' + c' + d' = 2$ 를 만족시키는 순서쌍의 개수 :

$${}_4H_2 = 10$$

따라서 $4 \times 2 \times 10 = 80$

$$\therefore 84 + 80 = 164$$

미적분

72-9. ⑤

조건 (나)에서 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n b_n = 2$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_n}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n b_n}{n a_n} = \frac{2}{\frac{1}{4}} = 8$$

72-10. ⑤

근과 계수의 관계를 이용하면

원점에서의 접선과 삼차함수의 교점의 x 좌표의 합은 3이므로

점 A의 좌표는 A(3, 6)

$f'(3) = 11$ 이고 $f'(0) = 2$ 이므로

$\tan \alpha = 11, \tan \beta = 2$ 라 하면

$$\tan \theta = \tan(\alpha - \beta) = \frac{11-2}{1+11 \times 2} = \frac{9}{23}$$

72-11. ④

$$g(1-x) = f(4\sin^2\pi(1-x)) = f(4\sin^2\pi x) = g(x)$$

이므로 함수 $y = g(x)$ 의 그래프는 직선 $x = \frac{1}{2}$ 에 대하여 대칭

또한, $g'(x) = f'(4\sin^2\pi x) \times 8\sin\pi x \times \pi\cos\pi x$ 에서

$0 < x < 1$ 일 때, $\cos\pi x = 0$ 에서 $x = \frac{1}{2}$ 이므로

함수 $g(x)$ 는 $x = \frac{1}{2}$ 에서 극값을 가져야 한다.

조건 (가)를 만족시키려면

이차함수 $f(x)$ 의 최고차항의 계수가 -1 이므로

함수 $g(x)$ 는 $x = \frac{1}{2}$ 에서 최솟값을 가지고,

이차함수 $f(x)$ 를 $f(x) = -(x-a)^2 + b$ 라고 할 때,

b 가 함수 $g(x)$ 의 최댓값이 되어야 한다.

조건 (나)에 따라 $f(4) = -2$ 이고 $b = 7$

따라서 $a = 1$ 또는 $a = 7$

이때, $f(0) > 0$ 이므로 $a = 1$

따라서, $f(x) = -(x-1)^2 + 7$

$$\begin{aligned} g'\left(\frac{1}{3}\right) &= f'\left(4\sin^2\frac{1}{3}\pi\right) \times 8\sin\frac{1}{3}\pi \times \pi\cos\frac{1}{3}\pi \\ &= f'(3) \times 2\sqrt{3}\pi = -8\sqrt{3}\pi \end{aligned}$$

72-12. ⑤

조건 (나)에서 $\left|f(t) - \frac{3}{4}t^2\right| \geq 0$ 이므로

$$x \geq 0 \text{일 때, } \int_0^x \left|f(t) - \frac{3}{4}t^2\right| dt \geq 0$$

따라서 $\int_0^x \left|f(t) - \frac{3}{4}t^2\right| dt = 0$ 이고

$$f(x) = \frac{3}{4}x^2 \quad (x \geq 0)$$

$f(x)$ 가 미분가능하려면 $f(0) = 0$, $f'(0) = 0$ 이므로

$$f(x) = x^2 e^{-x} \quad (x \leq 0)$$

$$\text{따라서 } f(x) = \begin{cases} x^2 e^{-x} & (x \leq 0) \\ \frac{3}{4}x^2 & (x > 0) \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \int_{-2}^2 f(x) dx &= \int_{-2}^0 x^2 e^{-x} dx + \int_0^2 \frac{3}{4}x^2 dx \\ &= (-2 + 2e^2) + 2 = 2e^2 \end{aligned}$$

Day. 73

수학1, 수학2



73-1. 23

$(\log_2 x - 2) \left(4\sin^2 \frac{\pi x}{2} - 1 \right) > 0$ 을 만족시키는 경우는

$\log_2 x - 2 > 0$, $4\sin^2 \frac{\pi x}{2} - 1 > 0$ 인 경우

$\log_2 x - 2 < 0$, $4\sin^2 \frac{\pi x}{2} - 1 < 0$ 인 경우이다.

i) $\log_2 x - 2 > 0$, $4\sin^2 \frac{\pi x}{2} - 1 > 0$ 인 경우

$\log_2 x - 2 > 0$ 에서 $x > 4$,

$4\sin^2 \frac{\pi x}{2} - 1 > 0$ 에서 $\sin \frac{\pi x}{2} > \frac{1}{2}$ 또는 $\sin \frac{\pi x}{2} < -\frac{1}{2}$

이때, x 가 홀수이면, $\sin \frac{\pi x}{2} = -1$ 또는 $\sin \frac{\pi x}{2} = 1$

x 가 짝수이면, $\sin \frac{\pi x}{2} = 0$ 이므로

조건을 만족시키는 x 는 5, 7, 9

ii) $\log_2 x - 2 < 0$, $4\sin^2 \frac{\pi x}{2} - 1 < 0$ 인 경우

$\log_2 x - 2 < 0$ 에서 $0 < x < 4$,

$4\sin^2 \frac{\pi x}{2} - 1 < 0$ 에서 $-\frac{1}{2} < \sin \frac{\pi x}{2} < \frac{1}{2}$ 이므로

조건을 만족시키는 x 는 2

i), ii)에 의하여 모든 정수 x 의 값의 합은

$$2 + 5 + 7 + 9 = 23$$

73-2. 4

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} |f(x) + g(x)| = |3 + g(1)|$$

$$|f(1) + g(1)| = |1 + g(1)|$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} |f(x) + g(x)| = |1 + g(1)|$$

이고 $x = 1$ 에서 $|f(x) + g(x)|$ 가 연속이므로

$$|3 + g(1)| = |1 + g(1)|$$

$$\therefore g(1) = -2 \quad \dots \textcircled{㉠}$$

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} |f(x) + g(x)| = |1 + g(3)|$$

$$|f(3) + g(3)| = |-1 + g(3)|$$

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} |f(x) + g(x)| = |-1 + g(3)|$$

이고 $x = 3$ 에서 $|f(x) + g(x)|$ 가 연속이므로

$$|1 + g(3)| = |-1 + g(3)|$$

$$\therefore g(3) = 0 \quad \dots \textcircled{㉡}$$

$$\textcircled{㉠}, \textcircled{㉡} \text{에 의하여 } g(x) = x^2 - 3x$$

$$\therefore g(4) = 16 - 12 = 4$$

73-3. 8

$$f(x) + g(x) = x^2 - x + C_1 \quad (C_1 \text{은 적분상수})$$

에서 양변에 0을 대입하면 $C_1 = -1$

$$\text{따라서 } f(x) + g(x) = x^2 - x - 1 \quad \dots \textcircled{㉠}$$

$$f(x)g(x) = x^3 - 7x + C_2 \quad (C_2 \text{는 적분상수})$$

에서 양변에 0을 대입하면 $C_2 = -6$

$$f(x)g(x) = x^3 - 7x - 6 = (x+1)(x+2)(x-3) \quad \dots \textcircled{㉡}$$

$\textcircled{㉠}, \textcircled{㉡}$ 에서 $f(x), g(x)$

둘 중 하나는 일차함수이고 하나는 이차함수이므로

$$f(x) = x + 2, g(x) = x^2 - 2x - 3 \text{ 또는}$$

$$f(x) = x^2 + 3x + 2, g(x) = x - 3$$

이때, $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$ 이므로

$$f(x) = x + 2, g(x) = x^2 - 2x - 3$$

$$\text{따라서 } f(-4) = -2, g(1) = -4$$

$$\therefore f(-4) \times g(1) = 8$$

73-4. 45

$a_n = a_1 + d_1(n-1), b_n = b_1 + d_2(n-1)$ 라 하자.

조건 (나)에서 $b_m - a_m = a_{m+1} - b_{m+1} = 1$ 이므로

$$b_1 - a_1 + (d_2 - d_1)(m-1) = 1 \quad \dots \textcircled{㉠} \text{이고}$$

$$a_1 - b_1 + (d_1 - d_2)m = 1 \quad \dots \textcircled{㉡}$$

$\textcircled{㉠}$ 에서 $a_1 - b_1 = (d_2 - d_1)(m-1) - 1$ 이므로

이를 $\textcircled{㉡}$ 에 대입하면 $d_1 - d_2 = 2$

조건 (가)에서 $10 \leq b_1 - a_1 = 2m - 1 \leq 18$ 이고

m 은 자연수 이므로 가능한 m 의 값은 6, 7, 8, 9

$$\sum_{n=1}^m a_n = \frac{m(2a_1 + d_1(m-1))}{2} = 20 \text{ 이고}$$

$$\sum_{n=1}^m b_n = \frac{m(2b_1 + d_2(m-1))}{2} = \frac{m(2a_1 + d_1(m-1) + 2m)}{2}$$

$$\text{이므로 } \sum_{n=1}^m b_n = 20 + m^2$$

$$\text{따라서 } \alpha = 20 + 9^2 = 101, \beta = 20 + 6^2 = 56 \text{이고}$$

$$\alpha - \beta = 45$$

73-5. 225

점 B의 좌표를 $B(b, 8)$ 이라 하자. ($b > a$)

직선 AB가 원점을 지나므로 $\frac{4}{a} = \frac{8}{b}$ 에서 $b = 2a$

한편 함수 $f(x) = \log_2(x - a + 1) + 4$ 의 그래프가

점 $(2a, 8)$ 을 지나므로 $\log_2(a + 1) + 4 = 8$

$$\log_2(a + 1) = 4 \text{에서 } a + 1 = 16, a = 15$$

$$f(x) = \log_2(x - 14) + 4$$

함수 $y = f(x)$ 의 그래프와 x 축이 만나는 점을 $(k, 0)$ 이라 하면
 $\log_2(k-14) + 4 = 0, \log_2(k-14) = -4$

$$k-14 = 2^{-4}, k = 14 + 2^{-4}$$

$$\therefore 16k = 224 + 1 = 225$$

73-6. ④

주어진 방정식을 만족시키려면

$4^x - 2^{x+1} - 3 = 0, 4^x - a = 0$ 을 동시에 만족시켜야 한다.

$$4^x - 2^{x+1} - 3 = (2^x - 3)(2^x + 1) = 0$$

에서 x 가 실수이므로 방정식의 해를 α 라 하면 $2^\alpha = 3$

이때 $4^\alpha - a = (2^\alpha)^2 - a = 0$ 이 되어야 하므로

$$9 - a = 0, a = 9$$

73-7. ①

$g(x) = |f(x) - f(0)|$ 에서 $g(0) = 0$ 이고

$x = 0$ 에서 미분가능하므로 $f'(0) = 0$

(가)에서 $g(x)$ 는 $x = a$ 에서 미분가능 하지 않으므로 $g(a) = 0$

따라서 $f(x) = x^2(x-a) + f(0)$

$g(x) = 4$ 가 서로 다른 네 실근을 갖기 위해서는

$f(x)$ 의 극댓값과 극솟값의 차가 4보다 커야 한다.

$f(x)$ 는 $x = \frac{2}{3}a$ 에서 극솟값을 가지고

$$f\left(\frac{2}{3}a\right) < f(0) - 4 \text{ 이려면 } a > 3$$

$f'(4) = 48 - 8a$ 이고 자연수 a 의 최솟값이 4이므로

$f'(4)$ 의 최댓값은 16

73-8. 25

$g(x) = f(x) \int_0^x f(t) dt - x$ 에서

$$g'(x) = \{f(x)\}^2 + f'(x) \int_0^x f(t) dt - 1$$

$f(x) = ax + b$ 라 하자.

$g'(0) = \{f(0)\}^2 - 1 = 0$ 이고 $f(0) > 0$ 이므로

$$f(0) = 1 = b$$

$$f(x) = ax + 1$$

조건 (나)에 의하여 $g'(1) = 0$ 이고,

$$g'(x) = (ax+1)^2 + a\left(\frac{a}{2}x^2 + x\right) - 1 = \frac{3}{2}a^2x^2 + 3ax \text{ 이므로}$$

$$g'(1) = \frac{3}{2}a^2 + 3a = 0, \therefore a = -2$$

따라서 $f(x) = -2x + 1$ 이고

$$\{f(3)\}^2 = (-5)^2 = 25$$

확률과 통계



73-9. 8

$${}_nC_r x^{3r-(n-r)} = {}_nC_r x^{4r-n} \text{에서}$$

상수항이 존재하므로 $n = 4k$ (단, k 는 자연수)

$$\alpha : r = k + 1, {}_{4k}C_{k+1} = \alpha$$

$$\beta : r = k, {}_{4k}C_k = \beta$$

$${}_{4k}C_{k+1} = 2 \cdot {}_{4k}C_k \text{에서 } k = 2$$

$$\therefore n = 8$$

73-10. ③

조건 (나)에서 $f(a) = f(b)$ 이고 확률밀도함수 $y = f(x)$ 의 그래프는 직선 $x = 4$ 에 대하여 대칭이므로

$$\frac{a+b}{2} = 4 \quad \dots \text{㉠}$$

조건 (가)에서 세 수 a, b, c 가 이 순서대로

공차가 4인 등차수열을 이루므로

$$\text{㉠에 의하여 } a = 2, b = 6, c = 10$$

따라서 표준정규분포를 $N(0, 1)$ 을 따르는 확률변수를 Z 라 하면

$$P(a \leq X \leq c)$$

$$= P(2 \leq X \leq 10)$$

$$= P\left(\frac{2-4}{2} \leq \frac{X-4}{2} \leq \frac{10-4}{2}\right)$$

$$= P(-1 \leq Z \leq 3)$$

$$= 0.8400$$

73-11. 544

네 개의 상자에 들어갈 수 있는 공의 개수를 나열해보면

$$4, 1, 1, 0 : \frac{4!}{2!} \times {}_3H_2 = 72$$

$$4, 2, 0, 0 : 72$$

$$3, 3, 0, 0 : 48$$

$$3, 2, 1, 0 : 4! \times ({}_4H_2 - 1) = 216$$

$$3, 1, 1, 1 : 4 \times ({}_4H_2 - 1) = 36$$

$$2, 2, 0, 0 : 40$$

$$2, 2, 1, 1 : \frac{4!}{2!2!} \times {}_4H_2 = 60$$

$$\therefore 72 + 72 + 48 + 216 + 36 + 40 + 60 = 544$$

73-12. ⑤

흰 공이 2개, 검은 공이 n 개 들어 있는 주머니에서

임의로 2개의 공을 동시에 꺼낼 때,

모두 검은 공이 나올 확률이 $\frac{2}{5}$ 이므로

$$\frac{{}_nC_2}{{}_{n+2}C_2} = \frac{n(n-1)}{(n+2)(n+1)} = \frac{2}{5}$$

$$5n^2 - 5n = 2n^2 + 6n + 4$$

$$3n^2 - 11n - 4 = 0, (n-4)(3n+1) = 0$$

n 은 자연수이므로 $n = 4$

흰 공이 2개, 검은 공이 4개 들어 있는 주머니에서
임의로 3개의 공을 동시에 꺼낼 때,

모두 검은 공이 나올 확률은 $\frac{{}_4C_3}{{}_6C_3} = \frac{4}{20} = \frac{1}{5}$ 이므로

적어도 하나는 흰 공이 나올 확률은 $1 - \frac{1}{5} = \frac{4}{5}$

미적분

73-9. ③

임의의 실수 t 에 대하여 교점이 3개이려면

직전 주기의 극댓값이 다음 주기의 극솟값과 같아야 한다.

$f(x) = \cos x + (\sin a)x$ 라 하자.

$$f'(x) = -\sin x + \sin a$$

방정식 $f'(x) = 0$ 을 만족시키는 x 값은

$$x = a + 2n\pi \text{ 또는 } x = \pi - a + 2n\pi$$

따라서 $\cos a + a \sin a = \cos(3\pi - a) + (3\pi - a) \sin a$

$$\text{정리하면 } \cot a + a = \frac{3}{2}\pi$$

73-10. 54

$$g(x) = 2 \int_1^x f(t) dt - xf(x) \quad \cdots \textcircled{1} \text{에서}$$

$$g'(x) = f(x) - xf'(x)$$

$$\begin{aligned} \int_1^3 \frac{g(x)}{x^3} dx &= \left[-\frac{g(x)}{2x^2} \right]_1^3 + \int_1^3 \frac{g'(x)}{2x^2} dx \\ &= -\frac{g(3)}{18} + \frac{g(1)}{2} - \frac{1}{2} \int_1^3 \frac{xf'(x) - f(x)}{x^2} dx \\ &= -\frac{g(3)}{18} + \frac{g(1)}{2} - \frac{1}{2} \left[\frac{f(x)}{x} \right]_1^3 \\ &= -\frac{g(3)}{18} + \frac{g(1)}{2} - \frac{f(3)}{6} + \frac{f(1)}{2} \end{aligned}$$

$\textcircled{1}$ 에 $x = 1$ 을 대입하면 $g(1) = -f(1)$ 이므로

$$\frac{g(1)}{2} + \frac{f(1)}{2} = 0$$

$$\text{따라서 } \int_1^3 \frac{g(x)}{x^3} dx = -\frac{1}{18} \{g(3) + 3f(3)\}$$

$\textcircled{1}$ 에 $x = 3$ 을 대입하면 $g(3) = 2 \int_1^3 f(t) dt - 3f(3)$ 이므로

$$g(3) + 3f(3) = 2 \int_1^3 f(t) dt$$

$$\text{따라서 } \int_1^3 \frac{g(x)}{x^3} dx = -\frac{1}{9} \int_1^3 f(t) dt = -6 \text{ 이고}$$

$$\int_1^3 f(t) dt = 54$$

$$\therefore \{f(1) + g(1)\} + \int_1^3 f(t)dt = 54$$

73-11. 6

$|p| > 1$ 일 때, $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ 이 발산하므로

두 번째 식의 극한값이 존재하지 않는다.

$|p| < 1$ 일 때, $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ 이므로

두 번째 식의 극한값이 존재하지 않는다. (진동)

$p = 1$ 일 때, $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ 라 하면

$-(a^2 + 3a - 4) = a^2 + 3a - 4$ 이고 $a = 1$ 또는 $a = -4$

$p = -1$ 일 때, $\lim_{n \rightarrow \infty} a_{2n-1} = a$, $\lim_{n \rightarrow \infty} a_{2n} = -a$ 라 하면

$-a^2 - 3a + 4 = a^2 - 3a - 4$ 에서 $a = \pm 2$

따라서 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_{2n-1}$ 이 될 수 있는 값은 $-4, -2, 1, 2$

$$\therefore M - m = 6$$

73-12. ①

$\lim_{x \rightarrow k} \frac{g(x) - g(k)}{|x - k|}$ 의 값이 존재하는 k 는 $g'(k) = 0$

즉, $f'(k) = 0$ 이거나 $g(k) = 0$

즉, $f(k) = t$ 을 만족하는 경우이다.

조건 (가), (나)에 따라 $h(t)$ 는 $t = 0, 4$ 에서 불연속

$f(x)$ 의 개형을 그려가면서 조건 (가), (나)를 검증해보자.

① a 가 음수인 경우 : (가) 또는 (나) 조건을 만족하지 않는다.

② $f(x)$ 가 극값을 갖지 않는 경우

: (가), (나) 조건을 만족하지 않는다.

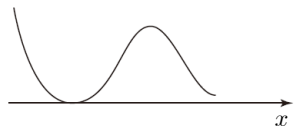
③ $f(x) > 0$ 이고 극값 2개를 갖는 경우

: (나) 조건을 만족하지 않는다.

④ $f(x)$ 가 x 축과 서로 다른 두 점에서 만나고 극값을 2개 갖는 경우

: (나) 조건을 만족하지 않는다.

⑤ $f(x)$ 가 x 축과 한 점에서 접하고 극값 2개를 갖는 경우



$\lim_{t \rightarrow 0+} h(t) = 5$, $h(0) = 2$, $\lim_{t \rightarrow 0-} h(t) = 2$ 이므로 (나)를

만족하고, $f(x)$ 의 극댓값이 4인 경우 (가)를 만족한다.

따라서 $f(x) = \frac{a(x - \alpha)^2}{e^x}$ 라 놓을 수 있고,

$f'(x) = 0$ 인 x 를 구하면 $x = \alpha, \alpha + 2$ 이다.

$f'(2) = 0$ 이고 $f'(1) > 0$ 이므로 $\alpha = 0$

이때, $f(2) = 4$ 이므로 $f(x) = x^2 e^{2-x}$

$$h(3) = 5, f(h(3)) = f(5) = \frac{25}{e^3}$$

Day. 74

수학1, 수학2

74-1. ①

$$\sum_{k=1}^a (k+b) = \frac{a(a+1)}{2} + ab = \frac{a(a+2b+1)}{2} = 40$$

$a(a+2b+1) = 80$ 에서

$a = 2$ 일 때, $a+2b+1 = 40$ 이고, b 는 자연수가 아니다.

$a = 4$ 일 때, $a+2b+1 = 20$ 이고, b 는 자연수가 아니다.

$a = 5$ 일 때, $a+2b+1 = 16$ 이고, $b = 5$

$a = 8$ 일 때, $a+2b+1 = 10$ 이고 b 는 자연수가 아니다.

$a \geq 10$ 일 때, $a+2b+1 \leq 8$ 이므로 b 는 자연수가 아니다.

따라서 $a = 5$, $b = 5$ 이고 $a+b = 10$

74-2. ⑤

$$f(x) = 3x^4 - 4x^3 - a$$

$$f'(x) = 12x^3 - 12x^2 = 12x^2(x-1)$$

따라서 함수 $f(x)$ 는 $x = 1$ 에서 극소이고 최소

즉, 함수 $f(x)$ 는 최솟값은 $f(1) = -a - 1$

$-a - 1 \geq 0$ 이어야 하므로 $a \leq -1$

따라서 실수 a 의 최댓값은 -1

74-3. ③

$$2f(x) + f(4-x) = x+1 \quad \dots \textcircled{1}$$

이 식에 x 대신 $4-x$ 를 대입하면,

$$2f(4-x) + f(x) = -x+5 \quad \dots \textcircled{2}$$

① $\times 2 -$ ② 를 계산하면,

$$f(x) = \frac{3x-3}{3} = x-1$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{g(x)}{f(x)} = -1 \text{ 에서 } \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} (x-1) = 0 \text{ 이므로}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} g(x) = \lim_{x \rightarrow 1} (ax^2 + bx + c) = a + b + c = 0 \quad \dots \textcircled{3}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{g(x)}{f(x)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{g(x) - g(1)}{x-1} = g'(1) = -1 \text{ 이므로}$$

$$g'(x) = 2ax + b \text{ 에서 } g'(1) = 2a + b = -1 \quad \dots \textcircled{4}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{g(x)}{f(x)} = 1 \text{ 에서 } \lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} (x-1) = 1 \text{ 이므로}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} g(x) = \lim_{x \rightarrow 2} (ax^2 + bx + c) = 4a + 2b + c = 1 \quad \dots \textcircled{5}$$

③, ④, ⑤ 세 식을 연립하면 $a = 2$, $b = -5$, $c = 3$

따라서 $g(x) = 2x^2 - 5x + 3$ 이고

$$g(3) = 18 - 15 + 3 = 6$$

74-4. 43

$f(x) = a(x-1)(x-7)$ 이라 하자.

$y = g(x)$ 의 그래프는 두 점 $(1, 0)$ 과 $(9, f(9)) = (9, 16a)$ 를 지나므로 $g(x) = 2a(x-1)$

$2^{f(x)\{f(x)+g(x)\}} \leq 2^{2\{g(x)\}^2}$ 에서

$f(x)\{f(x)+g(x)\} \leq 2\{g(x)\}^2$ 이고

$\{f(x)-g(x)\}\{f(x)+2g(x)\} \leq 0$

$y = f(x)$ 와 $y = -2g(x)$ 의 그래프는 $x = 1, x = 3$ 일 때 만난다.

주어진 부등식을 만족하기 위해서는 $f(x)$ 의 값이 $g(x)$ 와 $-2g(x)$ 의 값 사이에 있어야 하므로

$x = 1$ 또는 $3 \leq x \leq 9$

$\therefore 1+3+4+5+6+7+8+9 = 43$

74-5. ⑤

점 P의 x 좌표를 k 라 하면,

점 Q의 x 좌표는 $2\pi - k$, 점 R의 x 좌표는 $k - \pi$

따라서 $\overline{PQ} = 2k - 2\pi$, $\overline{QR} = 3\pi - 2k$

$\overline{PQ} = 2\overline{QR}$ 에서

$2k - 2\pi = 6\pi - 4k$ 이고 따라서 $k = \frac{4}{3}\pi$

$a \cos \frac{4}{3}\pi = \tan \frac{4}{3}\pi$ 에서 $a = -2\sqrt{3}$

74-6. 55

i) $x = -1$ 에서 극댓값을 가질 때,

$f(x) = (x+1)^2(x-k)$ ($k > -1$)

$f'(x) = (x+1)(3x-2k+1)$

(나)에서 $f'(1) = f(1)$ 인데

$f(1) = 4(1-k)$, $f'(1) = 2(2-k)$ 이므로 모순

ii) $x = k$ 에서 극댓값을 가질 때,

$f(x) = (x+1)(x-k)^2$ ($k < -1$)

$f'(x) = (x-k)(3x-k+2)$

마찬가지로 $f'(1) = f(1)$ 이므로

$f(1) = 2(1-k)^2$, $f'(1) = (1-k)(5-k)$

$k = -3$ ($\because k < -1$)

따라서 $f'(x) = (x+3)(3x+5)$, $f'(2) = 55$

74-7. ④

곡선 $y = f(x)$ 와 직선 $x = 1$ 과 선분 QR로 둘러싸인 부분의 넓이를 $B_1(t)$, 곡선 $y = f(x)$ 와 직선 $x = 1$ 과 선분 PQ로 둘러싸인 부분의 넓이를 $B_2(t)$ 라 하자.

$$A(t) - B_1(t) = \int_0^1 (f(x) - xf(t))dx$$

$$B_2(t) = \int_1^t (f(t) - f(x))dx$$

$$A'(t) - B_1'(t) = -f'(t) \int_0^1 x dx = -\frac{1}{2}f'(t)$$

$$B_2'(t) = f'(t)(t-1) + f(t) - f(t) = f'(t)(t-1)$$

$$A'(t) - B'(t) = A'(t) - B_1'(t) - B_2'(t) = -f'(t)\left(t - \frac{1}{2}\right)$$

$$\text{따라서 } g(t) = -f'(t)\left(t - \frac{1}{2}\right)$$

$$f'(x) = 2(x-1)(x+1) + (x-1)^2 \text{ 에서 } f'(3) = 20$$

$$\therefore g'(3) = -f'(3)\left(3 - \frac{1}{2}\right) = -50$$

74-8. ⑤

$f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ 라 하자.

조건 (가)에서 $1 + a + b + c = -3$ 이고 $3 + 2a + b = -2$

조건 (나)를 만족시키려면

$x < 1$ 에서 $g(x) \leq h(x)$ 여야 하고

$h(x) = f'(1)(x-1) + f(1) = -2x - 1$ 이므로

$x < 1$ 에서 $g'(x) \geq -2$ 가 되어야 한다.

따라서 $a \leq -3$ 이고

$g'(-2) = 7 - 6a$ 이므로

$g'(-2)$ 는 $a = -3$ 일 때, 최솟값 25를 갖는다.

확률과 통계

74-9. ④

$\{E(X)\}^2 = E(3X+10) = 3E(X) + 10$ 에서

$E(X) = 5$ 또는 -2

$P(X \geq 2) = 0.7734$ 이므로 $E(X) = 5$

$$P(X \geq 2) = P\left(\frac{X-5}{\sigma} \geq \frac{2-5}{\sigma}\right)$$

$$= P\left(Z \geq \frac{-3}{\sigma}\right) = 0.7734$$

이때, $P(Z \geq 0.75) = 0.2266$ 이므로

$$\frac{-3}{\sigma} = -0.75 \text{ 이고 } \sigma = 4$$

$$P(1 \leq X \leq 3) = P\left(\frac{1-5}{4} \leq X \leq \frac{3-5}{4}\right)$$

$$= P(-1 \leq X \leq -0.5) = P(0.5 \leq X \leq 1)$$

$$= 0.3413 - 0.1915 = 0.1498$$

74-10. ②

주어진 10장의 카드에서 한 장 이상의 카드를 뽑는 경우의 수는

$${}_{10}C_1 + {}_{10}C_2 + {}_{10}C_3 + \dots + {}_{10}C_{10} = 2^{10} - 1$$

뽑은 카드에 적힌 모든 수의 합이 32보다 작은 경우를 생각하자.

뽑은 카드에 적힌 모든 수의 합이 32보다 작으려면 2^5 이상의 수가 적힌 카드를 뽑지 않아야 한다.

한편, 2^5 보다 작은 수 1, 2, 2^2 , 2^3 , 2^4 의 합은

$$1 + 2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 = 31 \text{ 이므로}$$

1, 2, 2^2 , 2^3 , 2^4 의 5장의 카드에서 1장 이상의 카드를 뽑으면
뽑은 카드에 적힌 모든 수의 합은 항상 32보다 작다.

그러므로 뽑은 카드에 적힌 모든 수의 합이 32보다 작도록
카드를 뽑는 경우의 수는

$${}_5C_1 + {}_5C_2 + {}_5C_3 + {}_5C_4 + {}_5C_5 = 2^5 - 1$$

따라서 구하는 경우의 수는

$$(2^{10} - 1) - (2^5 - 1) = 992$$

74-11. 49

$x + y + z = 12$ 을 만족시키는 세 자연수의 순서쌍 (x, y, z) 의
개수는 $x = 1 + a$, $y = 1 + b$, $z = 1 + c$ 로 놓으면

방정식 $a + b + c = 9$ 의 음이 아닌 정수해의 개수와 같으므로

$x + y + z = 12$ 을 만족시키는

세 자연수의 순서쌍 (x, y, z) 의 개수는 ${}_3H_9 = 55$

$x = 8$ 일 때, 조건 (가)를 만족시키는 순서쌍 (x, y, z) 의
개수는

$(8, 1, 3)$, $(8, 2, 2)$, $(8, 3, 1)$ 로 총 3개

$x = 9$ 일 때, 조건 (가)를 만족시키는 순서쌍 (x, y, z) 의
개수는

$(9, 1, 2)$, $(9, 2, 1)$ 로 총 2개

$x = 10$ 일 때, 조건 (가)를 만족시키는 순서쌍 (x, y, z) 의
개수는 $(10, 1, 1)$ 로 총 1개

따라서 구하는 순서쌍의 개수는 $55 - (3 + 2 + 1) = 49$

74-12. ④

1) 첫 번째 과일이 사과일 때

$$\text{사과} \rightarrow \text{배} \rightarrow \text{사과} : \frac{2}{8} \times \frac{2}{7} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{84}$$

$$\text{사과} \rightarrow \text{배} \rightarrow \text{배} : \frac{2}{8} \times \frac{2}{7} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{84}$$

$$\text{사과} \rightarrow \text{자두} \rightarrow \text{사과} : \frac{2}{8} \times \frac{4}{7} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{42}$$

$$\text{사과} \rightarrow \text{자두} \rightarrow \text{자두} : \frac{2}{8} \times \frac{4}{7} \times \frac{3}{6} = \frac{1}{14}$$

$$\therefore \frac{1}{84} + \frac{1}{84} + \frac{1}{42} + \frac{1}{14} = \frac{5}{42}$$

2) 첫 번째 과일이 배일 때

첫 번째 과일이 사과일 때와 계산과정 동일

$$\therefore \frac{1}{84} + \frac{1}{84} + \frac{1}{42} + \frac{1}{14} = \frac{5}{42}$$

3) 첫 번째 과일이 자두일 때

$$\text{자두} \rightarrow \text{사과} \rightarrow \text{자두} : \frac{4}{8} \times \frac{2}{7} \times \frac{3}{6} = \frac{1}{14}$$

$$\text{자두} \rightarrow \text{사과} \rightarrow \text{사과} : \frac{4}{8} \times \frac{2}{7} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{42}$$

$$\text{자두} \rightarrow \text{배} \rightarrow \text{자두} : \frac{4}{8} \times \frac{2}{7} \times \frac{3}{6} = \frac{1}{14}$$

$$\text{자두} \rightarrow \text{배} \rightarrow \text{배} : \frac{4}{8} \times \frac{2}{7} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{42}$$

$$\therefore \frac{1}{14} + \frac{1}{42} + \frac{1}{14} + \frac{1}{42} = \frac{8}{42}$$

$$\text{따라서 구하고자 하는 확률은 } \frac{\frac{8}{42}}{\frac{5}{42} + \frac{5}{42} + \frac{8}{42}} = \frac{4}{9}$$

미적분

74-9. 4

$$f(1) = \frac{3}{2} \text{ 이므로 } f(-1) = \frac{1}{2}$$

$$f'(x) + f'(-x) = 1 \text{ 이고 } f'(1) = \frac{3}{4} \text{ 이므로 } f'(-1) = \frac{1}{4}$$

$$\text{따라서 } g'\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{f'(-1)} = 4$$

74-10. ⑤

$$\text{두 점 } P, Q \text{의 좌표는 각각 } P\left(\frac{\ln(t+1)}{2}, t\right), Q(0, t)$$

$$\text{따라서 } S(t) = \frac{t}{4} \times \ln(t+1)$$

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{S(t)}{\{f(t)\}^2} = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{t \ln(t+1)}{4(e^{2t} - 1)^2} = \frac{1}{16}$$

74-11. 20

$$\text{조건 (가)에서 } f(0) = 2 \text{ 이면 } f'(0) = \frac{3}{2} \text{ 이므로 } b = 2, a = \frac{3}{2}$$

$$f(0) = -2 \text{ 이면 } f'(0) = -\frac{3}{2} \text{ 이므로 } b = -2, a = -\frac{3}{2}$$

$$\text{조건 (나)에 따라 } a = \frac{3}{2}, b = 2 \text{ 이고}$$

$$\text{따라서 } f'(5) = \frac{3}{17}$$

$$\therefore p + q = 20$$

74-12. 27

주어진 조건에 따라

$$a_{2n-1} = a_1 \times r^{n-1}, a_{2n} = a_2 \times s^{n-1}$$

두 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} a_{2n-1}, \sum_{n=1}^{\infty} a_{2n}$ 이 모두 수렴하므로

$$-1 < r < 1, -1 < s < 1$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_{2n-1} \times a_{2n}) = \sum_{n=1}^{\infty} (a_1 a_2 \times (rs)^{n-1}) = \frac{2}{1-rs} = \frac{12}{5}$$

$$\text{에서 } rs = \frac{1}{6} \dots \textcircled{7}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_{2n-1} \times \sum_{n=1}^{\infty} a_{2n}$$

$$= \frac{a_1}{1-r} \times \frac{a_2}{1-s} = \frac{2}{(1-r)(1-s)} = 6$$

에서 $1 - (r+s) + rs = \frac{1}{3}$ 이므로 $r+s = \frac{5}{6} \cdots \textcircled{L}$

이때, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{r^{n+1} + s^n}{r^n + s^{n+1}} > 1$ 이므로 $r < s$ 이고

$\textcircled{L}$ 과 $\textcircled{L}$ 을 연립하면 $r = \frac{1}{3}, s = \frac{1}{2}$

따라서 $\frac{1}{a_4 \times a_7} = \frac{1}{a_1 \times a_2 \times sr^3} = 27$

Day. **75**

수학1, 수학2

75-1. ⑤

$\cos(\pi - \theta) > 0$ 이므로 $\cos \theta < 0$

이때 $3\cos \theta + \sin \theta = 0$ 이므로 $\sin \theta > 0$

$\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$ 를 이용해 $\sin \theta$ 값을 계산해보면

$$\sin \theta = \frac{3\sqrt{10}}{10}$$

75-2. ③

$$\int f(x) dx = \int (6x^2 + k) dx - f(x) \text{의}$$

양변을 미분하면 $f(x) = 6x^2 + k - f'(x)$

$f(x)$ 가 다항함수이므로

$$f(x) = 6x^2 - 12x + 12 + k$$

$$f(1) = 6 + k = 4, k = -2$$

75-3. ⑤

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h) - f(-1)}{h} = f'(2) \text{에서}$$

$f(1) = f(-1)$ 이고 $f'(1) = f'(2)$

$f(1) = f(-1) = k$ 라 하면

$$f(x) - k = 3(x+1)(x-1)$$

$f'(1) = f'(2)$ 을 이용하여 k 값을 구하면 $k = -3$

$$\therefore f(3) = 21$$

75-4. 6

직선OA와 직선OB의 기울기의 곱이 -1 이므로

$$(-a^{-1}) \times \frac{a^3}{3} = -1, a^2 = 3, a = \sqrt{3}$$

점 C는 두 점 A, B를 $1:3$ 으로 내분하는 점이므로

$$\overline{OC} = \frac{3a^{-1} + a^3}{4} \text{ 이고 } \overline{OC}^2 = \left(\frac{\sqrt{3} + 3\sqrt{3}}{4} \right)^2 = 3$$

$$\therefore a^2 + \overline{OC}^2 = 3 + 3 = 6$$

75-5. 52

$$a_{n+3} + a_n = k \quad \cdots \textcircled{㉠}$$

$$a_{n+6} + a_{n+3} = k \quad \cdots \textcircled{㉡}$$

이므로 $\textcircled{㉠} - \textcircled{㉡}$ 을 하면 $a_{n+6} = a_n$

$$\begin{aligned} \text{따라서 } \sum_{n=1}^{12} a_n &= 2(a_1 + a_2 + \cdots + a_5 + a_6) \\ &= 2 \cdot 3k = 6k = 24 \text{ 이고 } k = 4 \end{aligned}$$

$$\sum_{n=1}^{15} a_n = \sum_{n=1}^{12} a_n + a_{13} + a_{14} + a_{15} = 28$$

$$\text{이므로 } a_{13} + a_{14} + a_{15} = 4$$

$$\text{이때 } a_{13} + a_{14} + a_{15} = a_{25} + a_{26} + a_{27}$$

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{27} a_n &= \sum_{n=1}^{24} a_n + a_{25} + a_{26} + a_{27} \\ &= 4 \sum_{n=1}^6 a_n + a_{25} + a_{26} + a_{27} \\ &= 4 \cdot 3k + 4 = 52 \end{aligned}$$

75-6. 38

함수 $g(x)$ 가 오직 $x=5$ 에서만 미분가능하지 않으므로 $x=1$ 에서는 미분가능해야 한다.

함수 $g(x)$ 가 $x=1$ 에서 미분가능하려면

함수 $f(x)$ 가 $y=-2$ 와 $x=1$ 에서 접해야 한다.

따라서 $f(x) = a(x-1)^2(x-b) - 2$ 라고 놓을 수 있다.

이때 $g'(3) = 0$ 이므로 $b=4$

또한 함수 $g(x)$ 가 $x=5$ 에서 미분가능하지 않으므로

$$f(5) = 0 \text{ 이고 따라서 } a = \frac{1}{8}$$

$$\therefore g(9) = \left| \frac{1}{8} \times 8^2 \times 5 - 2 \right| = 38$$

75-7. 353

각의 이등분선 정리에 의해 $\overline{AN} = 2t$, $\overline{NC} = 3t$ 라 하면

$$\overline{CN} \times \overline{CA} = \overline{CM} \times \overline{CB} \text{ 이므로 } 15t^2 = 18 \text{에서}$$

$$t = \sqrt{\frac{6}{5}} \text{ 이고 따라서 } \overline{AC} = \sqrt{30}$$

삼각형 ABC에서 중선 AM에 대한 중선정리에 의해

$$2 \times ((\overline{AM})^2 + (\overline{BM})^2) = (\overline{AB})^2 + (\overline{AC})^2 \text{에서 } \overline{AM} = \sqrt{14}$$

삼각형 ABC에서 코사인 법칙에 의해

$$\cos B = \frac{16 + 36 - 30}{2 \times 4 \times 6} = \frac{11}{24} \text{ 이고 따라서 } \sin B = \frac{\sqrt{13 \times 35}}{24}$$

원 O의 반지름의 길이를 r 이라 하면 사인법칙에 의해

$$2r = \frac{\frac{\sqrt{14}}{\sqrt{13 \times 35}}}{24} = \frac{24\sqrt{2}}{\sqrt{65}}$$

따라서 구하려는 넓이는 $\frac{288}{65}\pi$

$$\therefore p + q = 353$$

75-8. 14

조건 (나)에서

$$\lim_{x \rightarrow t} \frac{g(x) \times f(x)}{|f(x)|} = \begin{cases} g(x) & (f(x) \geq 0) \\ -g(x) & (f(x) < 0) \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow t} \frac{|g(x) - f(x)|}{g(x)} = \begin{cases} -1 + \lim_{x \rightarrow t} \frac{f(x)}{g(x)} & (f(x) \geq g(x)) \\ 1 - \lim_{x \rightarrow t} \frac{f(x)}{g(x)} & (f(x) < g(x)) \end{cases}$$

모든 실수 t 에 대하여 $\lim_{x \rightarrow t} \frac{g(x) \times f(x)}{|f(x)|}$ 의 값이 존재하려면

함수 $f(x)$ 의 부호가 바뀔 때 $g(x) = 0$ 이 되어야 하고 ... ㉠

모든 실수 t 에 대하여 $\lim_{x \rightarrow t} \frac{|g(x) - f(x)|}{g(x)}$ 의 값이

존재하려면 $g(x) - f(x)$ 의 부호가 바뀔 때

$\lim_{x \rightarrow t} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$ 이 되어야 하고 $\lim_{x \rightarrow t} \frac{f(x)}{g(x)}$ 의 값은

항상 존재해야 한다. ... ㉡

i) $f(x) = x(x-1)^2$ 일 때

㉠에 따라 $g(0) = 0$ 이고 ㉡에 따라 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$ 이므로

$g(x) = x(x^2 + ax + b)$ 에서 $b = 1$ 이고

㉡에 따라 $x^2 + ax + 1 = 0$ 이 실근을 갖지 않아야 하므로
 $-2 < a < 2$

따라서 $g(2) = 4a + 10$ 에서 최댓값 14

ii) $f(x) = x^2(x-1)$ 일 때

㉠에 따라 $g(1) = 0$ 이고 ㉡에 따라 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$ 이므로

$g(x) = (x-1)(x^2 + ax + b)$ 에서 $a + b = 0$ 이고

㉡에 따라 $x^2 + ax - a = 0$ 이 실근을 갖지 않아야 하므로
 $-4 < a < 0$

따라서 $g(2) = a + 4$ 에서 최댓값 3

따라서 $g(2)$ 의 최댓값은 14

확률과 통계



75-9. ⑤

세 자리 자연수가 짝수가 되려면
 일의 자리 수가 2 또는 4가 되어야 한다.
 일의 자리 수가 2일 때 : $5 \times 5 = 25$
 일의 자리 수가 4일 때 : $5 \times 5 = 25$
 $\therefore 25 + 25 = 50$

75-10. ④

세 명의 학생이 받는 음료수의 개수를 각각 x_1, x_2, x_3 라 하자.
 $x_1 + x_2 + x_3 = 4$ 를 만족시키는 음이 아닌 정수 해의 개수를
 구해보면 ${}_3H_4 = {}_6C_4 = 15$
 세 명의 학생이 받는 빵의 개수를 각각 y_1, y_2, y_3 라 하자.
 $y_1 + y_2 + y_3 = 3$ 을 만족시키는 음이 아닌 정수 해의 개수를
 구해보면 ${}_3H_3 = {}_5C_3 = 10$
 따라서 가능한 총 경우의 수는 $15 \times 10 = 150$
 다음으로, 어느 한 학생이라도 아무것도 받지 못하는
 경우의 수를 계산해보자.
 먼저, 아무것도 받지 못한 학생이 한 명인 경우는
 ${}_3C_1 \times ({}_2H_4 \times {}_2H_3 - 2) = 54$
 아무것도 받지 못한 학생이 두 명인 경우는
 ${}_3C_2 \times {}_1H_4 \times {}_1H_3 = 3$ 이고
 세 명 모두 못 받는 경우는 0
 따라서 어느 한 학생이라도 아무것도 받지 못하는
 경우의 수는 $54 + 3 = 57$
 따라서 각 학생이 받은 음료수와 빵의 개수의 합이 모두
 1 이상이 되도록 나누어 주는 경우의 수는
 $150 - 57 = 93$

75-11. 19

전체 경우의 수는 $6 \times 6 \times 6 = 216$
 꺼낸 모든 공에 적힌 숫자의 종류가 1가지일 경우
 : (세 번 모두 숫자 1이 나오는 경우) +
 (세 번 모두 숫자 2가 나오는 경우) +
 (세 번 모두 숫자 3이 나오는 경우)
 $= 4 \times 4 \times 4 + 1 \times 1 \times 1 + 1 \times 1 \times 1 = 66$
 꺼낸 모든 공에 적힌 숫자의 종류가 3가지일 경우
 : (세 번의 시행에서 숫자 1, 2, 3이 각각 한 번씩 나오는 경우)
 $= 4 \times 1 \times 1 \times 3! = 24$
 따라서 꺼낸 모든 공에 적힌 숫자의 종류가 2가지인 경우의 수는
 $216 - 66 - 24 = 126$ 이고
 따라서 구하고자 하는 확률은 $\frac{126}{216} = \frac{7}{12}$
 $\therefore p + q = 19$

75-12. ③

$$2 \leq X \leq 6$$

$$P(X=2) = \frac{{}_5C_1 \times {}_1C_1}{{}_7C_3} = \frac{5}{35}$$

$$P(X=3) = \frac{{}_2C_1 \times {}_4C_1}{{}_7C_3} = \frac{8}{35}$$

$$P(X=4) = \frac{{}_3C_1 \times {}_3C_1}{{}_7C_3} = \frac{9}{35}$$

$$P(X=5) = \frac{{}_4C_1 \times {}_2C_1}{{}_7C_3} = \frac{8}{35}$$

$$P(X=6) = \frac{{}_5C_1 \times {}_1C_1}{{}_7C_3} = \frac{5}{35}$$

$$E(X) = \frac{2 \times 5 + 3 \times 8 + 4 \times 9 + 5 \times 8 + 6 \times 5}{35} = 4$$

$$E(X^2)$$

$$= \frac{2^2 \times 5 + 3^2 \times 8 + 4^2 \times 9 + 5^2 \times 8 + 6^2 \times 5}{35} = \frac{616}{35}$$

$$V(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = \frac{616}{35} - 4^2 = \frac{8}{5}$$

미적분

75-9. 24

$\sin \frac{\pi}{4}x$ 는 주기가 8인 함수이므로 a_n 도 주기수열

$-1 < \sin \frac{\pi}{4}x < 1$ 일 때 수렴하므로

$x = 8k+1, 8k+3, 8k+4, 8k+5, 8k+7, 8k$ 꼴일 때 수렴
(k 는 음이 아닌 정수)

따라서 $a_2 = 30$ 이고 $a_{6n} = 8n$

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_2 \times a_{6n}}{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3 \times 8n}{n+1} = 24$$

75-10. ⑤

$$g(x) = \int_0^x t f'(x-t) dt \text{에서 } x-t=u \text{라 하면 } dt = -du$$

$$g(x) = - \int_x^0 (x-u) f'(u) du$$

$$= \int_0^x (x-u) f'(u) du$$

$$= x \int_0^x f'(u) du - \int_0^x u f'(u) du$$

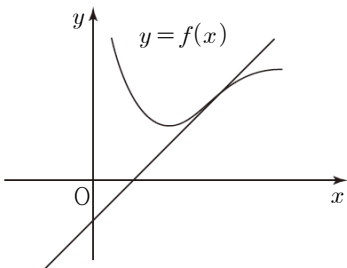
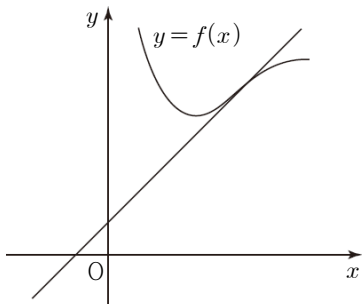
$$g'(x) = \int_0^x f'(u) du = f(x) - f(0)$$

$$\therefore \int_0^{2\pi} \{f(x) - g'(x)\} dx = \int_0^{2\pi} f(0) dx = \int_0^{2\pi} 1 dx = 2\pi$$

75-11. 8

아래 그림들에서 $g(t)$ 가 오직 하나의 불연속점을 갖는 경우는 변곡점선이 원점을 지날 때 임을 알 수 있다.

(아래 그림들에서는 직선의 x 절편과 원점에서 함수 $g(t)$ 가 불연속이 됨)



$$f'(x) = \frac{2\ln x - 2}{x}, f''(x) = \frac{2(2 - \ln x)}{x^2} \text{에서}$$

변곡점은 (e^2, c) 이고

변곡점선의 방정식은 $y = \frac{2}{e^2}(x - e^2) + c$ 인데

원점을 지나므로 $c = 2$

따라서 $\alpha = 0$ 이고 $g(\alpha) = 1, \lim_{t \rightarrow \alpha^-} g(t) = 2, \lim_{t \rightarrow \alpha^+} g(t) = 1$

$$\therefore c \times \left\{ \lim_{t \rightarrow \alpha^-} g(t) + g(\alpha) + \lim_{t \rightarrow \alpha^+} g(t) \right\} = 8$$

75-12. 39

조건 (가), (나)에 따라 함수 $f(x)$ 는

$x = 1, 5, 9, \dots$ 에서 극대가 된다.

$\alpha_3 = 2$ 로 짝수인 자연수이므로 $g(x)$ 는

$x = \alpha_3$ 에서 극대를 갖는다.

$f(g(x))$ 는 $x = \alpha_3$ 에서 세 번째 극대이고 $f(x)$ 는

$x = g(\alpha_3)$ 에서 증가상태이며 $f(g(\alpha_3)) = 0$ 이므로 $g(\alpha_3) = 8$

따라서 $g'(2) = 0$ 이고 $g(2) = 8$ 이므로 $a = 2, b = 32$

한편 $g(x) = 1, g(x) = 5$ 는 각각 서로 다른 두 양의 실근을 갖고 $g(x)$ 가 $x = 2$ 에서 극댓값을 가지므로 $n = 5$

$$\therefore n + a + b = 39$$