

백일대장

수능 역전을 위한 백일 전략서

10

정답 및 해설

Day. 64

수학1, 수학2



64-1. ⑤

$a(t) = v'(t) = 3t^2 - 6t$ 이므로 $t = 2$ 에서 가속도가 0 이다.

점 P 의 시각 t 에서의 위치를 $x(t)$ 라 할 때,

$$x(t) = \int v(t) dt = \frac{t^4}{4} - t^3 + kt$$

$$x(2) = 4 - 8 + 2k = 0$$

$$\therefore k = 2$$

64-2. ③

함수 $g(x)$ 가 실수 전체의 집합에서 연속이라는 조건에서

$f(a) = 12 - f(a)$, $f(a) = 6$ 임을 알 수 있다.

즉, $f(a) = a^3 - 3a + k = 6$ 의 서로 다른 실근 a 의 개수가 3 이므로

$$f(-1) < a < f(1)$$

$$k - 2 < 6 < k + 2$$

$$4 < k < 8$$

따라서 모든 자연수 k 는 5, 6, 7 이다.

$$\therefore 18$$

64-3. ③

P(0, 0), Q(2, 2) 에서 원 C 는 원점을 중심으로 하고 반지름의 길이가 $2\sqrt{2}$ 인 원이고,

점 Q 가 $y = x$ 위의 점이므로 점 Q 에서의 접선의 기울기는 -1 이다.

곡선 $y = 3^{\frac{x+k}{2}} + k - 1$ 은 곡선 $y = 3^{\frac{x}{2}} - 1$ 을 x 축의 방향으로 $-k$ 만큼, y 축의 방향으로 k 만큼 평행이동시킨 것이므로 점 R 역시 점 Q 를 x 축의 방향으로 $-k$ 만큼, y 축의 방향으로 k 만큼 평행이동시킨 것이다.

따라서 R(2-k, 2+k) 이므로

$$\overline{PR} = \sqrt{(2-k)^2 + (2+k)^2} = \sqrt{2k^2 + 8} = 2\sqrt{6}$$

$$\therefore k = 2\sqrt{2}$$

64-4. ④

직선 AB 의 기울기는 $\frac{\cos a - \sin a}{\sin a + \cos a}$ 이다.

$0 < a < \frac{\pi}{4}$ 에서 $\cos a > \sin a$ 이므로

직선 AB 의 기울기는 양수, 이에 수직인 직선의 기울기는 음수이다.

이때, 직선 AB 와 수직인 직선이 y 축과 이루는 예각의 크기가

θ 이므로

$\tan \theta = \frac{2}{3}$ 에서 이 직선의 기울기는

$$-\tan\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=-\frac{3}{2} \text{ 이다.}$$

따라서 직선 AB의 기울기는 $\frac{2}{3}$ 이다.

$$\frac{\cos a - \sin a}{\sin a + \cos a} = \frac{2}{3}$$

$$3\cos a - 3\sin a = 2\sin a + 2\cos a$$

$$5\sin a = \cos a$$

$$\therefore \tan a = \frac{1}{5}$$

64-5. ⑤

$$(a_{n+1})^2 = \sum_{k=1}^{n+1} (a_k)^2 - \sum_{k=1}^n (a_k)^2 = 2n+2$$

$$\text{에서 } (a_n)^2 = 2n$$

$$(b_{n+1})^2 = \sum_{k=1}^{n+1} (b_k)^2 - \sum_{k=1}^n (b_k)^2 = 2$$

$$\text{에서 } (b_n)^2 = 2$$

$$(a_n b_n)^2 = 4n, a_n b_n = 2\sqrt{n} \text{ 또는 } -2\sqrt{n}$$

이때, 두 수열의 모든 항이 양수이므로 자연수 m 에 대하여

$$a_m b_m = 2\sqrt{m} = 16$$

$$\therefore m = 64$$

64-6. ④

조건 (가)을 식을 정리해보면

$$f(-a) - f(2) = f(2) - f(a+4)$$

$$f(-a) + f(a+4) = 2f(2) \text{ 에서}$$

삼차함수 $f(x)$ 가 점 $(2, f(2))$ 에 대해 점대칭,

즉, 변곡점의 x 좌표가 2임을 알 수 있다.

조건 (나)에서 함수 $g(t)$ 가 $t=p$ 와 $t=p+16$ 에서만

불연속이므로 곡선 $f(x)$ 의 극댓값과 극솟값이 각각 $p+16$, p 이다.

이때, 극값의 x 좌표를 각각 $2-k$, $2+k$ 라고 하면 두 극값의

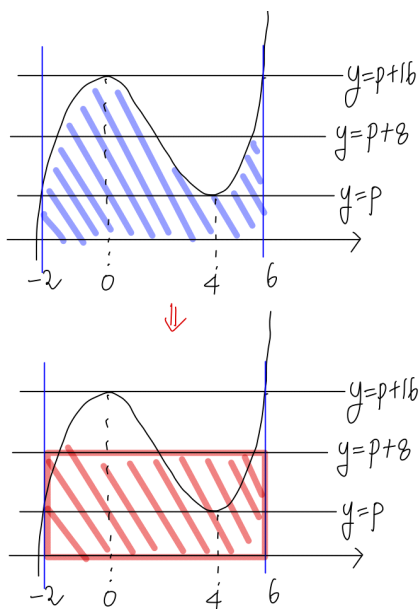
$$\text{차이는 } \frac{1}{2} \times (2k)^3 = 4k^3 = 16, \text{ 즉 } k=2 \text{ 가 된다.}$$

$$\text{따라서 } f(x) = \frac{1}{2}(x+2)(x-4)^2 + p \text{ 에서}$$

$$\int_{-2}^6 f(x)dx = 8 \times (p+8) = 72 \text{ 에서 } p=1 \text{ 이다. (*참고)}$$

$$\therefore (p+1) \times f(p) = 2f(1) = 29$$

$$* \int_{-2}^6 f(x)dx = 8 \times (p+8)$$



64-7. ④

$\angle ECB = \theta$ 하자.

삼각형 BEC에서 코사인법칙을 이용하면 $\cos \theta = \frac{11}{16}$ 이다.

$\overline{AB} = \overline{AE} = k$ 라 하자.

삼각형 ABC에서 코사인법칙을 이용하면 $k = 6$ 이고

원의 성질에 따라 $\overline{AE} \times \overline{EC} = \overline{BE} \times \overline{ED}$ 에서 $\overline{ED} = 4$ 이다.

$\triangle BEC : \triangle DEC = \overline{BE} : \overline{DE} = 3 : 4$,

$\triangle BEC : \triangle ABE = \overline{CE} : \overline{AE} = 2 : 6 = 1 : 3$ 이고

삼각형 BEC와 삼각형 AED는 1:2 닮음이므로

$\triangle BEC : \triangle AED = 1^2 : 2^2 = 1 : 4$ 에서

사각형 ABCD의 넓이는 삼각형 BEC의 넓이의 $\frac{28}{3}$ 배임을 알 수 있다.

이때 삼각형 BEC의 넓이가

$$\frac{1}{2} \times 2 \times 4 \times \sin \theta = \frac{3\sqrt{15}}{4} \text{ 이므로}$$

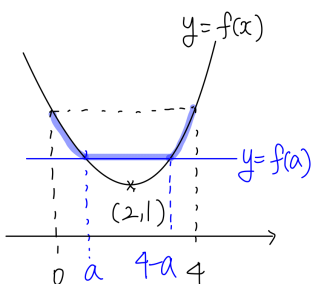
사각형 ABCD의 넓이는 $\frac{3\sqrt{15}}{4} \times \frac{28}{3} = 7\sqrt{15}$ 이다.

$$\therefore 7\sqrt{15}$$

64-8. ①

$g(x) = f(x)$ 또는 $g(x) = f(a)$ 에서 $0 < a < 2$ 인 실수 a 에 대해

$\int_0^4 g(x) dx$ 가 최대이려면 다음과 같아야 한다.



즉, $x < a$ 에서 $g(x) = f(x)$

$a \leq x < 4-a$ 에서 $g(x) = f(a)$

$x \geq 4-a$ 에서 $g(x) = f(x)$ 일 때 $\int_0^4 g(x) dx$ 가 최대이므로

$$h(a) = 2 \int_0^a f(x) dx + 2(2-a)f(a) \text{ 이다.}$$

양변을 미분하면

$$\begin{aligned} h'(a) &= 2f(a) - 2f(a) + 2(2-a)f'(a) \\ &= (4-2a)f'(a) \end{aligned}$$

$$\frac{h'(k)}{f'(k)} = 4 - 2k = \frac{10}{3}$$

$$\therefore k = \frac{1}{3}$$

확률과 통계

64-9. ④

주어진 집합에서 임의로 4개의 원소를 선택하는 경우의 수는

$${}_{11}C_4 = 330$$

네 개의 원소가 모두 연속하지 않은 자연수인 경우의 수를 구해 보자.

주어진 집합의 원소 중에서 선택한 네 개의 수를 ○라 할 때, 모든 11개의 수를 작은 수로 차례로 나열하면

$$A \circ B \circ C \circ D \circ E$$

끼로 놓을 수 있고 A, E 자리에는 0개 이상의 수가,

B, C, D 자리에는 1개 이상의 수를 놓을 수 있다.

A, B, C, D, E 자리에 놓이는 수의 개수를 각각

a, b, c, d, e 라 할 때

$$a + b + c + d + e = 7$$

이때 $b = b' + 1, c = c' + 1, d = d' + 1$ 이라 하면

$$a + b' + c' + d' + e = 4$$

(단, a, b', c', d', e 는 음이 아닌 정수)

순서쌍 (a, b', c', d', e) 의 개수는

$${}_5H_4 = {}_8C_4 = 70$$

따라서 주어진 집합에서 임의로 선택한 4개의 원소 중에서 적어도 2개의 원소가 연속인 자연수인 경우의 수는

$$330 - 70 = 260$$

$$\text{구하는 확률은 } \frac{260}{330} = \frac{26}{33}$$

64-10. 32

$$P(X \geq 80) = P\left(\frac{X-m}{\sigma} \geq \frac{80-m}{\sigma}\right) \\ = P\left(Z \geq \frac{80-m}{\sigma}\right)$$

$$P(40 \leq X \leq m) = P\left(\frac{40-m}{\sigma} \leq \frac{X-m}{\sigma} \leq \frac{m-m}{\sigma}\right) \\ = P\left(\frac{40-m}{\sigma} \leq Z \leq 0\right)$$

조건 (가)에서

$$P(X \geq 80) + P(40 \leq X \leq m) \\ = P\left(Z \geq \frac{80-m}{\sigma}\right) + P\left(\frac{40-m}{\sigma} \leq Z \leq 0\right) \\ = P\left(Z \leq \frac{m-80}{\sigma}\right) + P\left(\frac{40-m}{\sigma} \leq Z \leq 0\right) = \frac{1}{2}$$

에서 $\frac{m-80}{\sigma} = \frac{40-m}{\sigma}$

가 되어야 한다. $\therefore m = 60$

조건 (나)에서

$$V\left(\frac{1}{2}X + 1\right) = \frac{1}{4}V(X) = 4$$

$$\therefore V(X) = 16, \sigma = 4$$

$$P(52 \leq X \leq 53.6) = P\left(\frac{52-60}{4} \leq \frac{X-60}{4} \leq \frac{53.6-60}{4}\right) \\ = P(-2 \leq Z \leq -1.6) \\ = P(1.6 \leq Z \leq 2) \\ = P(0 \leq Z \leq 2) - P(0 \leq Z \leq 1.6) \\ = 0.4772 - 0.4452 = 0.032$$

$$\therefore p = 0.032, 1000p = 32$$

64-11. ①

$a+b$ 가 홀수인 경우에서 $a+b$ 가 홀수이고 $b \times c \times d$ 가 홀수인 경우를 제외하면 된다.

$a+b$ 가 홀수인 경우 $c+d$ 가 짝수이다. 따라서 가능한 경우는

a 가 홀수, b 가 짝수, c 가 홀수, d 가 홀수

a 가 홀수, b 가 짝수, c 가 짝수, d 가 짝수

a 가 짝수, b 가 홀수, c 가 짝수, d 가 짝수

인 경우이다.

i) a 가 홀수, b 가 짝수, c 가 홀수, d 가 홀수일 때,

$$a = 2a' + 1, b = 2b' + 2, c = 2c' + 1, d = 2d' + 1 \text{로}$$

놓으면 (단, a', b', c', d' 는 음이 아닌 정수)

$$a + b + c + d = 13 \text{에서}$$

$$2a' + 2b' + 2c' + 2d' = 8$$

$$a' + b' + c' + d' = 4$$

$${}_4H_4 = {}_7C_4 = 35$$

ii) a 가 홀수, b 가 짝수, c 가 짝수, d 가 짝수일 때,

$$a = 2a' + 1, b = 2b' + 2, c = 2c' + 2, d = 2d' + 2 \text{로}$$

놓으면 (단, a', b', c', d' 는 음이 아닌 정수)

$$a + b + c + d = 13 \text{에서}$$

$$2a' + 2b' + 2c' + 2d' = 6$$

$$a' + b' + c' + d' = 3$$

$${}_4H_3 = {}_6C_3 = 20$$

iii) a 가 짝수, b 가 홀수, c 가 짝수, d 가 짝수일 때,

$$a = 2a' + 2, b = 2b' + 1, c = 2c' + 2, d = 2d' + 2 \text{로}$$

놓으면 (단, a', b', c', d' 는 음이 아닌 정수)

$$a + b + c + d = 13 \text{에서}$$

$$2a' + 2b' + 2c' + 2d' = 6$$

$$a' + b' + c' + d' = 3$$

$${}_4H_3 = {}_6C_3 = 20$$

i)~iii)에 의하여 구하는 모든 순서쌍 (a, b, c, d) 의 개수는

$$35 + 20 + 20 = 75$$

64-12. ④

동전을 6번 던지므로 모든 경우의 수는 $2^6 = 64$ 가지

방에 불이 꺼져있기 위해서는 마지막 6번째에 B가 방에 들어가야 하고, 다음과 같은 경우가 가능하다.

i)

				A	B
--	--	--	--	---	---

1, 2, 3, 4번째에는 동전의 어떤 면이 나와도 되므로 경우의 수는 $2^4 = 16$

ii)

		A	B	B	B
--	--	---	---	---	---

1, 2번째에는 동전의 어떤 면이 나와도 되므로 경우의 수는 $2^2 = 4$

iii)

	B	B	B	B	B
--	---	---	---	---	---

1번째에는 동전의 어떤 면이 나와도 되므로 경우의 수는 $2^1 = 2$

i)~iii)에 의하여 동전을 6번 던져 시행을 완료한 후, 방에 불이 꺼지는 경우의 수가 $16 + 4 + 2 = 22$ 이므로

동전을 6번 던져 시행을 완료한 후 방에 불이 켜지는 경우의 수는 $64 - 22 = 42$

따라서 구하는 확률은

$$\frac{42}{64} = \frac{21}{32}$$

미적분

64-9. ④

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{2t}{3t^2 + a} = \frac{2}{3t + \frac{a}{t}} \leq \frac{2}{2\sqrt{3a}} \text{ 이므로}$$

$3t = \frac{a}{t}$ 일 때 최댓값 $\frac{1}{\sqrt{3a}}$ 을 갖는다.

$$\frac{1}{\sqrt{3a}} = \frac{1}{6}$$

$$\therefore a = 12$$

64-10. 3

점 A_n 과 점 B_n 의 x 좌표를 각각 α_n, β_n 이라고 할 때

$$x^2 = nx + 1, x^2 - nx - 1 = 0 \text{에서}$$

$$\alpha_n + \beta_n = n, \alpha_n \beta_n = -1 \text{이므로}$$

$$\begin{aligned} \overline{A_n B_n} &= \sqrt{n^2 + 1} \times |\beta_n - \alpha_n| = \sqrt{n^2 + 1} \times \sqrt{n^2 + 4} \\ &= \sqrt{n^4 + 5n^2 + 4} \text{ 이다.} \end{aligned}$$

점 A_n 과 점 B_n 의 중점을 점 M_n 이라고 할 때

$$M_n \left(\frac{n}{2}, \frac{n^2}{2} + 1 \right) \text{이므로}$$

두 점 A_n, B_n 을 지나는 원의 중심 C_n 은 직선

$$y = -\frac{1}{n} \left(x - \frac{n}{2} \right) + \frac{n^2}{2} + 1 \text{의 } x \text{ 절편,}$$

$$\text{즉, } a_n = \frac{n^3 + 3n}{2} \text{ 이다.}$$

$$\begin{aligned} &\lim_{n \rightarrow \infty} (\overline{A_n B_n} - \sqrt{pn \times a_n}) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sqrt{n^4 + 5n^2 + 4} - \sqrt{\frac{1}{2}p(n^4 + 3n^2)} \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left(1 - \frac{1}{2}p\right)n^4 + \left(5 - \frac{3}{2}p\right)n^2 + 4}{\sqrt{n^4 + 5n^2 + 4} + \sqrt{\frac{1}{2}p(n^4 + 3n^2)}} \end{aligned}$$

이때 분모와 분자의 최고차수가 같아야 하므로

$$1 - \frac{1}{2}p = 0, p = 2 \text{ 이다.}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^2 + 4}{\sqrt{n^4 + 5n^2 + 4} + \sqrt{n^4 + 3n^2}} = 1 = \alpha$$

$$\therefore p + \alpha = 3$$

64-11. ③

조건 (가)에서 $f(1) = 4, g(4) = 1$ 이므로

조건 (나)의 식에서

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{g(x+3)\{f(x)-4\}}{x-1} = g(4) \times f'(1) = f'(1) = \frac{1}{4},$$

$$\text{따라서 } g'(4) = \frac{1}{f'(1)} = 4 \text{ 이다.}$$

$f(a) = 7$ 이라고 하자.

$$f(a) + f(2-a) = 8, f(2-a) = 1 \text{에서}$$

$$g(7) = a, g(1) = 2-a \text{이고}$$

$$g'(7) = \frac{1}{f'(a)}, g'(1) = \frac{1}{f'(2-a)} \text{ 이다.}$$

조건 (가)의 식을 미분하면 $f'(x) - f'(2-x) = 0$,

즉, $f'(a) = f'(2-a)$ 이므로 $g'(7) = g'(1)$ 이다.

$$\frac{g'(4)}{g'(7)} = \frac{g'(4)}{g'(1)} = \frac{4}{g'(1)} = 32$$

$$\therefore g'(1) = \frac{1}{8}$$

(*별해)

 $f(x) = y$ 라 하면 역함수 $g(x)$ 에 대해 $g(y) = x$ 이고 $f(2-x) = 8-y$ 에서 $g(8-y) = 2-x$ 이다.따라서 $g(y) + g(8-y) = (2-x) + x = 2$ 임을 알 수 있다.양변을 미분하면 $g'(y) - g'(8-y) = 0$ 에서 $g'(7) = g'(1)$ 이므로 $f'(1) = \frac{1}{4}$, $g'(4) = 4$ 에서 $g'(7) = \frac{1}{8} = g'(1)$ 이다.

64-12. ①

조건 (가)의 식을 t 에 대하여 미분하면 $h(t+\alpha) + h(-t+\alpha) = 4$ 이므로함수 $h(x)$ 는 점 $(\alpha, 2)$ 에 대하여 대칭이고 $h(\alpha) = 2$ 이다.함수 $h(x)$ 는 함수 $g(x)$ 의 역함수이므로 $g(x)$ 의 그래프는 점 $(2, \alpha)$ 에 대하여 대칭이고 $g(2) = \alpha$ 이다.조건 (나)에서 $g(x)$ 가 점대칭임을 이용하면 $\int_0^4 g(x) dx = 4\alpha = 12$ 에서 $\alpha = 3$ 이다. $g(x) = \int_0^x f(t) dt$ 에서 $g'(x) = f(x)$ 이고 $f(x)$ 가 이차함수이므로 $g(x)$ 는 변곡점이 $(2, 3)$ 인

삼차함수이다.

따라서 함수 $f(x)$ 의 대칭축은 $x = 2$ 이므로 $f(x) = x^2 - 4x + k$ 라 하면 $g(2) = \int_0^2 f(t) dt = 3$ 이다. $\int_0^2 (x^2 - 4x + k) dx = 3$ 에서 $k = \frac{25}{6}$ 이므로 $f(2) = \frac{1}{6}$ 이다. $\therefore \alpha \times f(2) = 3 \times \frac{1}{6} = \frac{1}{2}$

Day. 65

수학1, 수학2

65-1. 14

조건 (가)에서 양변에 상용로그를 취하면

 $\log ab = 8$, $\log a + \log b = 8$... ㉠조건 (나)에서 $\log_b a = \frac{\log a}{\log b} = 3$ $\log a = 3 \log b$... ㉡

㉡을 ㉠에 대입하면

 $\log a = 6$, $\log b = 2$ 임을 알 수 있다. $\therefore 2 \log a + \log b = 12 + 2 = 14$

65-2. ①

$$\lim_{x \rightarrow 0+} \frac{g(x)}{f(x)} = \frac{g(0)}{1} = 2 \text{ 에서 } g(0) = 2 \text{ 이고}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1-} f(2-x)g(x) = g(1) \times \lim_{x \rightarrow 1+} f(x) = 2g(1) = 8 \text{ 에서}$$

$$g(1) = 4 \text{ 이므로}$$

$$g(x) = x^2 + x + 2 \text{ 이다.}$$

$$\therefore g(3) = 14$$

65-3. ④

$f(x) - (-x) = 0$ 은 중근 $x = a$ 와 $x = b$ 를 실근으로 갖는다.

$f(x) + x = x^3 + (k+1)x - 2 = 0$ 에서 근과 계수의 관계를 이용하면

$$\text{모든 실근의 합은 } 2a + b = 0,$$

$$\text{모든 실근의 곱은 } a^2b = 2 \text{ 이므로}$$

$$\text{두 식을 연립하면 } a = -1, b = 2 \text{ 이다.}$$

$$\text{또한 } f(-1) = 1 \text{ 에서 } -1 - k - 2 = 1, k = -4 \text{ 이다.}$$

$$\therefore f(a-b) = f(-3) = -17$$

65-4. 58

$$S_n = \sum_{k=1}^n a_k$$

$$= a_1 + \sum_{k=2}^n a_k$$

$$= p + \sum_{k=2}^n a_k$$

$$= p + \sum_{k=2}^n (2k - 2^k)$$

$$= p + \sum_{k=1}^n (2k - 2^k) \quad (\because 2 - 2^1 = 0)$$

$$= p + 2 \times \frac{n(n+1)}{2} - 2 \times \frac{2^n - 1}{2 - 1}$$

$$= p + n(n+1) - 2^{n+1} + 2$$

$$S_5 = p + 30 - 64 + 2 = p - 32$$

$$S_6 = p + 42 - 128 + 2 = p - 84$$

$$\text{이때 } |S_5| = |S_6| \text{ 에서 } S_5 \neq S_6 \text{ 이므로 } S_5 = -S_6$$

$$\text{즉, } p - 32 = -(p - 84) \text{ 에서}$$

$$2p = 116$$

$$\therefore p = 58$$

65-5. ②

두 점 B, C 의 y 좌표를 k 라고 하면

$$f(x) = k \text{ 에서 } x \text{ 좌표는 각각 } x = 2^{a+k}, x = 2^{a-k} \text{ 이다.}$$

평행사변형 OABC 에서 $\overline{OA} = \overline{BC}$ 이므로

$$2^a = 2^{a+k} - 2^{a-k}, 1 = 2^k - 2^{-k}$$

$$\text{즉, } 2^k = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \text{ 이다.}$$

점 B의 x 좌표는

$$2^{a+k} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \cdot 2^a = \sqrt{2}(1+\sqrt{5}) \text{ 이므로}$$

$$2^a = 2\sqrt{2} \text{ 이다.}$$

$$\therefore \overline{OA} = 2^{\frac{3}{2}}$$

65-6. 14

삼차함수에서 두 극값의 중점은 변곡점과 같다.

따라서 점 (1, 7) 은 곡선 $f(x)$ 의 변곡점이고,

직선 AB가 이 점을 지나므로 직선의 방정식은

$$y = -\frac{1}{3}(x-1)+7 \text{ 이다.}$$

$$f(x) - \left\{ -\frac{1}{3}(x-1)+7 \right\} = (x-1)(x-\alpha)(x-\beta) \text{ 에서}$$

$$\alpha = 1-k, \beta = 1+k \text{ 라고 하면}$$

$$f(x) + \frac{1}{3}(x-1)-7 = (x-1)(x-1+k)(x-1-k) \text{ 이고}$$

이때 $f'(1+k) = 0$ 임을 이용하면

$$f'(1+k) + \frac{1}{3} = k \times 2k = 2k^2, k^2 = \frac{1}{6} \text{ 이다.}$$

$$f(3) + \frac{2}{3} - 7 = 2(2-k)(2+k) = 2(4-k^2) = 2 \times \frac{23}{6} = \frac{23}{3}$$

$$\therefore f(3) = 14$$

65-7. 8

$$\overline{BD} = 1, \overline{DE} = \frac{3}{2} \text{ 이고}$$

이등변삼각형 EDF에서 점 E에서 선분 DF에 내린 수선의 발을 점 M이라고 하면

$$\angle EDM = \frac{\pi}{2} - \theta \text{ 이므로}$$

$$\begin{aligned} \overline{DF} &= 2\overline{DM} = 2 \times \overline{DE} \times \cos \angle EDM \\ &= 3 \sin \theta \text{ 이다.} \end{aligned}$$

$$\text{직각삼각형 DBF에서 } \overline{DF} = \frac{1}{\cos \theta} \text{ 이므로}$$

$$3 \sin \theta = \frac{1}{\cos \theta}$$

$$\sin \theta \cos \theta = \frac{1}{3} \text{ 이다.}$$

$$(\sin \theta + \cos \theta)^2 = 1 + 2 \sin \theta \cos \theta = \frac{5}{3}$$

$$\therefore p+q=8$$

65-8. 392

조건 (가), (나)에서 삼차함수 $f(x)$ 가 $y=0$, $y=-8$ 과 각각 접하고 있음을 알 수 있다.

조건 (가)에서 $f(x)=0$ 의 서로 다른 두 실근의 차가 3 이므로 삼차함수의 비율관계에 의하여

$$f(x) = p(x-k+3)(x-k)^2 \text{ 라고 둘 수 있고,}$$

이때 극값의 차이가 8 임을 이용하면

$$\frac{3|p|}{6} \times 2^3 = -4p = 8 \text{ 에서 } p = -2 \text{ 이다.}$$

함수 $g(t)$ 는 함수 $f(x)$ 위의 두 점 $(t, f(t))$, $f(a, f(a))$ 사이의 평균변화율을 의미한다.

따라서 $t > a$ 에서 함수 $g(t)$ 가 감소하도록 하려면

$t > a$ 에서 함수 $f'(t)$ 가 감소해야 한다.

$f(x) = -2(x-k+3)(x-k)^2$ 에서 $f'(x)$ 는 기울기가 음수이고 $x = k-1$ 을 축으로 갖는 이차함수이므로 함수 $f'(t)$ 는 $t > k-1$ 에서 감소한다.

즉, $a \geq k-1$ 임을 알 수 있다.

$a = k-1$ 일 때 a 가 최소이므로 $k = 5$ 이고

$$f(x) = -2(x-2)(x-5)^2 \text{ 이다.}$$

$$\therefore f(-2) = 392$$

확률과 통계

65-9. ③

12명의 학생 중 3명의 학생을 선택하는 경우의 수는

$${}_{12}C_3 = 220$$

i) 1학년 학생 3명을 선택할 확률은

$$\frac{{}_5C_3}{220} = \frac{1}{22}$$

ii) 2학년 학생 3명을 선택할 확률은

$$\frac{{}_7C_3}{220} = \frac{7}{44}$$

i)~ii)에서 선택한 3명의 학생이 모두 같은 학년일 확률은

$$\frac{1}{22} + \frac{7}{44} = \frac{9}{44}$$

$$\text{따라서 구하는 확률은 } \frac{\frac{7}{44}}{\frac{9}{44}} = \frac{7}{9}$$

65-10. ③

두 주사위를 던졌을 때의 경우의 수는 $4 \times 4 = 16$

두 주사위의 밑면에 각각 적힌 수에 대하여

i) 작지 않은 값이 1인 경우

두 주사위의 밑면의 적힌 수가

(1, 1)

인 경우이므로 경우의 수는 1이고 그 확률은 $\frac{1}{16}$

ii) 작지 않은 값이 2인 경우

두 주사위의 밑면의 적힌 수가

(1, 2), (2, 2), (2, 1)

인 경우이므로 경우의 수는 3이고 그 확률은 $\frac{3}{16}$

iii) 작지 않은 값이 3인 경우

두 주사위의 밑면의 적힌 수가

$(1, 3), (2, 3), (3, 3), (3, 2), (3, 1)$

인 경우이므로 경우의 수는 5이고 그 확률은 $\frac{5}{16}$

iv) 작지 않은 값이 4인 경우

두 주사위의 밑면의 적힌 수가

$(1, 4), (2, 4), (3, 4), (4, 4), (4, 3), (4, 2), (4, 1)$

인 경우이므로 경우의 수는 7이고 그 확률은 $\frac{7}{16}$

i)~iv)에 의하여 확률변수 X 의 확률분포표는 다음과 같다.

X	1	2	3	4	합계
$P(X=x)$	$\frac{1}{16}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{5}{16}$	$\frac{7}{16}$	1

$$E(X) = 1 \times \frac{1}{16} + 2 \times \frac{3}{16} + 3 \times \frac{5}{16} + 4 \times \frac{7}{16} = \frac{25}{8}$$

$$\therefore E(16X+4) = 16E(X) + 4 = 50 + 4 = 54$$

65-11. ④

서로 다른 세 접시에 담는 사탕의 개수를 각각 a, b, c 라 하자.

$a+b+c=10$ 에서

빈 접시가 없이 사탕 10개를 담는 경우의 수는

$$a'+1=a, b'+1=b, c'+1=c$$

(단, a', b', c' 는 음이 아닌 정수)

이라 할 때,

$$a'+b'+c'=7$$

이므로 경우의 수는

$${}_3H_7 = {}_9C_7 = 36$$

빈 접시가 없고 각 접시에 담긴 사탕의 개수가 같은 것이 있는 경우를 생각할 때,

세 접시에 담긴 사탕의 개수가 모두 같은 경우는 없고,

두 접시에 담긴 사탕의 개수가 같은 경우는 그 개수가 1, 2, 3, 4인 경우이다.

두 접시에 담긴 사탕의 개수가 1인 경우의 수는 ${}_3C_2 = 3$

마찬가지로 두 접시에 담긴 사탕의 개수가 2, 3, 4인 경우의 수는 각각 ${}_3C_2 = 3$ 이다.

따라서 구하는 경우의 수는

$$36 - 3 \times 4 = 24$$

65-12. ⑤

사과를 받는 학생의 수는 0 또는 1 또는 2

각각의 경우에 적어도 한 명의 학생이 귤을 받는 경우의 수를 구하면

i) 사과를 받는 학생의 수가 0인 경우

네 학생이 각각 귤, 배, 바나나 중 두 개를 선택하는 경우의 수에서

네 학생이 배, 바나나만을 받는 경우의 수를 빼면 되므로

$$({}_3C_2)^4 - 1 = 80$$

ii) 사과를 받는 학생의 수가 1인 경우

사과를 받는 한 학생을 선택하고

사과를 받는 학생이 귤, 배, 바나나 중 하나를,

나머지 세 학생이 각각 귤, 배, 바나나 중 두 개를 선택하는
경우의 수에서

사과를 받는 학생이 배, 바나나 중 하나를,

나머지 세 학생이 배, 바나나만을 받는 경우의 수를

빼면 되므로

$${}_4C_1 \times \{3 \times ({}_3C_2)^3 - 2 \times 1\} = 316$$

iii) 사과를 받는 학생의 수가 2인 경우

사과를 받는 두 학생을 선택하고

사과를 받는 두 학생이 각각 귤, 배, 바나나 중 하나를,

나머지 두 학생이 각각 귤, 배, 바나나 중 두 개를 선택하는
경우의 수에서

사과를 받는 두 학생이 각각 배, 바나나 중 하나를,

나머지 두 학생이 배, 바나나만을 받는 경우의 수를

빼면 되므로

$${}_4C_2 \times \{3 \times 3 \times ({}_3C_2)^2 - 2 \times 2 \times 1\} = 462$$

i)~iii)에 의하여 구하는 경우의 수는

$$80 + 316 + 462 = 858$$

미적분

65-9. ⑤

$\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = g(0)$ 에서

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{\ln(1+x^2)} = f'(1)$ 이고

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{\ln(1+x^2)} \times \frac{f(x)}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x^2}$ 이 수렴하므로

$f(x) = x^2(x-k)$ 로 두면

$f'(x) = 2x(x-k) + x^2$ 에서 $f'(1) = 3 - 2k$ 이다.

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2(x-k)}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} (x-k) = -k = 3 - 2k$ 이므로

$$k = 3$$

$$f(x) = x^2(x-3)$$

$$\therefore f(5) = 50$$

65-10. ④

접점 (k, e^k) 에 대하여

$\frac{e^k}{k} = e^k$ 에서 $k = 1$ 이고 접선의 방정식은 $y = ex$ 이다.

$x = t$ 에서 단면의 넓이를 $S(t)$ 라고 할 때

정사각형의 한변의 길이가 $e^t - et$ 이므로

$S(t) = (e^t - et)^2$ 이다.

따라서 이 입체도형의 부피는

$$\begin{aligned}
& \int_0^1 S(t) dt \\
&= \int_0^1 (e^{2t} - 2e \cdot te^t + e^2 t^2) dt \\
&= \left[\frac{1}{2} e^{2t} - 2e(t-1)e^t + \frac{1}{3} e^2 t^3 \right]_0^1 \\
&= \frac{5}{6} e^2 - 2e - \frac{1}{2} \text{ 이다.} \\
&a = \frac{5}{6}, \quad b = -2, \quad c = -\frac{1}{2} \\
&\therefore abc = \frac{5}{6}
\end{aligned}$$

65-11. ⑤

조건 (가)에서 곡선 $y = f(x)$ 위의 점 $(0, 0)$ 에서 그은 접선의 방정식을 $y = nx$ 라 하면

$$f(x) = x^2(x-6) + nx \text{ 이다.}$$

이때 조건 (나)에서 $y = f(x)$ 가 $y = mx$ 와 원점이 아닌 점 (k, mk) 에서 접한다고 하면

근과 계수의 관계에 의해 $2k = 6$, $k = 3$ 이고

$$f(x) = x(x-3)^2 + mx \text{ 으로 나타낼 수 있다.}$$

$$f'(x) = 3(x-1)(x-3) + m \text{ 이므로}$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{1}{x-3} \int_3^x f(t) f'(t) dt = f(3) f'(3) = 3m^2 = 12 \text{ 에서}$$

$$m = 2 \quad (\because m > 0 \text{ 이므로})$$

$$f(x) = x(x-3)^2 + 2x, \quad f'(x) = 3(x-1)(x-3) + 2 \text{ 이다.}$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{1}{x^2-9} \int_3^x f'(2t) dt$$

$$= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\int_3^x f'(2t) dt}{x-3} \times \frac{1}{x+3} = \frac{1}{6} f'(6)$$

$$f'(6) = 47$$

$$\therefore \frac{47}{6}$$

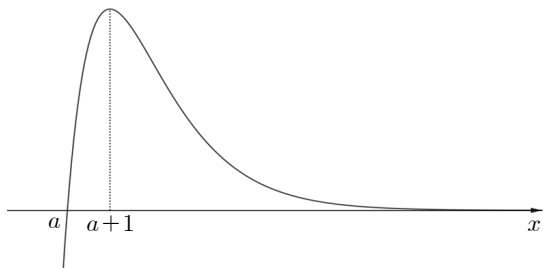
65-12. ②

$f'(x) = -(x-a-1)e^{-x+b}$ 에서 곡선 $f(x)$ 는 $x = a+1$ 에서 극댓값을 갖는다.

조건 (가)에서 $f'(b) = a-b+1 = a$, $b = 1$ 이므로

$$f(x) = (x-a)e^{-x+1} \text{ 이고}$$

곡선 $f(x)$ 의 개형은 다음과 같다.



열린구간 (a, ∞) 에서 $0 < f(x) \leq f(a+1)$,

$0 < f(x) \leq e^{-a}$ 이므로

합성함수 $h(x) = g(f(x))$ 에서 함수 g 에 들어가는 $f(x)$ 의 값의 범위가 $0 < x \leq e^{-a}$ 이다.

곡선 $g(x)$ 는 $x = 2k - 1$ (k 는 자연수)에서 극대이므로

곡선 $y = f(x)$ 와 직선 $y = 2k - 1$ 의 교점의 x 좌표에서 함수 $h(x)$ 가 극대가 된다.

따라서 함수 $h(x)$ 가 극대가 되는 x 의 개수가 5이기 위해서는 곡선 $y = f(x)$ 가 $y = 1$, $y = 3$ 과 각각 두 점에서 만나고 $y = 5$ 와 한 점에서 만나야 한다.

$$e^{-a} = 5, e^a = \frac{1}{5}$$

$$\therefore e^a + b = \frac{6}{5}$$

Day. **66**

수학1, 수학2

66-1. ②

$f'(x) = 3x^2 - 3x - 6 = 3(x+1)(x-2) = 0$ 에서
함수 $f(x)$ 는 $x = -1$ 에서 극대이고 $x = 2$ 에서 극소이다.

$$f(-1) = -1 - \frac{3}{2} + 6 + 2k = 2k + \frac{7}{2}$$

$$f(2) = 8 - 6 - 12 + 2k = 2k - 10$$

두 점 $A\left(-1, 2k + \frac{7}{2}\right)$, $B(2, 2k - 10)$ 을 지나는 직선이
원점을 지나려면

원점 O 에 대하여 두 점 O , A 를 지나는 직선의 기울기와 두 점
 O , B 를 지나는 직선의 기울기가 서로 같아야 한다.

$$\frac{2k + \frac{7}{2}}{-1} = \frac{2k - 10}{2}$$

$$2\left(2k + \frac{7}{2}\right) = -(2k - 10), 4k + 7 = -2k + 10$$

$$\therefore k = \frac{1}{2}$$

66-2. 26

$12\sin^2 x - 25\sin x \cos x + 12\cos^2 x = 0$ 에서

$$(3\sin x - 4\cos x)(4\sin x - 3\cos x) = 0$$

$$3\sin x = 4\cos x \text{ 또는 } 4\sin x = 3\cos x$$

$$\text{즉, } \tan x = \frac{4}{3} \text{ 또는 } \tan x = \frac{3}{4} \text{ 이다.}$$

이때 $\pi < x < \frac{5\pi}{4}$ 에서 $0 < \tan x < 1$ 이므로

$\tan x = \frac{3}{4}$ 이고 $\sin x < 0$, $\cos x < 0$ 이다.

$$4 \sin x = 3 \cos x$$

$$16 \sin^2 x = 16 - 16 \cos^2 x = 9 \cos^2 x$$

$$25 \cos^2 x = 16 \text{ 에서 } \cos x = -\frac{4}{5}$$

따라서 구하는 값은 $(1 + \cos \alpha)^2 = \frac{1}{25}$ 이다.

$$\therefore p + q = 26$$

66-3. 32

$x = -1$ 을 대입하면

$$0 = -1 + a + 9 - 5 \text{ 에서 } a = -3 \text{ 이다.}$$

양변을 미분하면 $f'(x) = 3x^2 - 6x - 9$ 이므로

$$f(x) = 3(x-3)(x+1) = 0 \text{ 에서}$$

곡선 $y = f(x)$ 와 x 축으로 둘러싸인 부분의 넓이는

$$\frac{3}{6} \times (3+1)^3 = 32 \text{ 이다.}$$

$$\therefore 32$$

66-4. ②

점 B의 x 좌표를 k 라고 하면

$$\overline{AB'} = \overline{B'C'} = k+3 \text{ 에서 점 C의 } x \text{ 좌표는 } 2k+3 \text{ 이 된다.}$$

$$2\overline{B'B} = \overline{C'C} \text{ 이므로 } 2\log_a k = \log_a (2k+3) \text{ 에서}$$

$$k^2 = 2k+3, k^2 - 2k - 3 = (k-3)(k+1) = 0$$

$$k = 3 (\because k > 0) \text{ 임을 알 수 있다.}$$

$$\text{따라서 } \overline{B'C'} = k+3 = 6 \text{ 이므로}$$

사다리꼴 $BB'C'C$ 이 넓이가 18 이 되려면

$$\overline{B'B} + \overline{C'C} = 6 \text{ 이어야 한다.}$$

$$\overline{B'B} + \overline{C'C} = 3\overline{B'B} = 3\log_a k = 6$$

$$3\log_a 3 = 6, \log_a 3 = 2$$

$$\therefore a = \sqrt{3}$$

66-5. 225

$$a_4 = 6$$

$$a_5 = 0$$

$$a_6 = 3$$

$$a_7 = -3$$

$$a_8 = 9$$

$$a_9 = 3$$

$\vdots$

수열 $\{a_n\}$ 은 $n \geq 6$ 에서 3, -3, 9 가 반복됨을 알 수 있다.

$$\sum_{n=1}^{50} a_n = (a_1 + a_2 + a_3) + (6+0) + (3-3+9) \times 15$$

$$= (a_1 + a_2 + a_3) + 141 \text{ 에서}$$

k 가 150 이하의 자연수이므로 $a_1 + a_2 + a_3$ 는 9 이하의

정수이다.

$a_4 = 6$ 에서 $a_3 = 12$ 또는 $a_3 = -\frac{3}{2}$ 인데,

이때 $a_3 = -\frac{3}{2}$ 이면 $a_1 + a_2 + a_3$ 가 정수가 될 수 없으므로
 $a_3 = 12$ 이다.

$a_2 = 18$ 또는 $a_2 = -\frac{9}{2}$ 에서

$a_2 = 18$ 이면 $a_1 + a_2 + a_3$ 가 9 보다 커지므로 조건을 만족시키지 않는다.

따라서 $a_2 = -\frac{9}{2}$ 에서 조건을 만족시키는 첫째항은

$a_1 = \frac{3}{2}$ 이고,

$a_1 + a_2 + a_3 = \frac{3}{2} + \left(-\frac{9}{2}\right) + 12 = 9$ 이므로

$k = 9 + 141 = 150$ 이다.

$\therefore a_1 \times k = 225$

66-6. 40

조건 (나)에서 $\lim_{x \rightarrow t} \frac{f(x) - 4t}{x - t} = 4$ 를 만족시키는 양수 t 에 대해

$f(t) = 4t$ 이고 $f'(t) = 4$ 가 성립한다.

즉, 곡선 $y = f(x)$ 와 직선 $y = 4x$ 가 $x = t$ 에서 접해야 한다.

한편 조건 (가)에 의해 $f(0) = 0$, $f'(0) = 13$ 이다.

이때, 곡선 $f(x)$ 가 원점을 지나므로 직선 $y = 4x$ 와 $x = 0$,
 $x = t$ 에서 교점을 갖게 된다.

따라서 $f(x) - 4x = x(x - t)^2$ 에서

$f'(0) - 4 = t^2$, $9 = t^2$ 이므로 $t = 3$ ($\because t > 0$) 이다.

$\therefore f(t + 2) = f(5) = 40$

66-7. ④

조건 (가)에서 x_1 과 x_2 가 이차함수 $f'(x)$ 의 축에 대하여
 대칭이고 조건 (나)에서 $x_1 + x_2 = 4$ 이므로 $f'(x)$ 의 축이
 $x = 2$ 임을 알 수 있다.

이차함수 $f'(x)$ 의 꼭짓점의 x 좌표는 삼차함수 $f(x)$ 의
 변곡점의 x 좌표와 같으므로

$f(x) = x(x - 1)(x - a) = 0$ 에서 세 근의 합인 $a + 1$ 은
 변곡점의 x 좌표의 세 배인 6 과 같음을 이용할 수 있다.

즉, $a = 5$, $f(x) = x(x - 1)(x - 5)$ 이고

$f'(x) = 3x^2 - 12x + 5$ 이다.

조건 (가)와 (다)를 만족시키려면 $f'(x) - k = 0$ 이 1 보다 큰
 서로 다른 두 실근이 가져야 하므로

$f'(1) - k > 0$ 에서 $-4 > k$,

$f'(2) - k < 0$ 에서 $-7 < k$ 이다.

따라서 $-7 < k < -4$ 를 만족시키는 정수 k 의 값은
 -6 , -5 이다.

$\therefore -11$

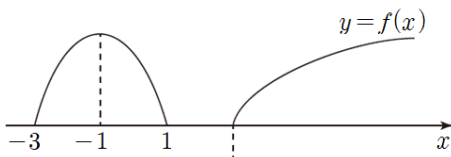
66-8. 124

$x > 1$ 에서 $f(x) = |\log_2(ax-a)| + \log_2(ax-a)$ 는

$1 < x < 1 + \frac{1}{a}$ 에서 $f(x) = 0$ 이고

$x \geq 1 + \frac{1}{a}$ 에서 $f(x) = 2\log_2(ax-a)$ 이므로

$y = f(x)$ 의 그래프의 개형은 아래와 같다.



$f(-1) > f(2)$ 일 때

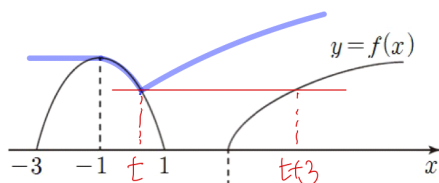
$-3 \leq t < -1$ 에서 $g(t) = f(-1) = 4$ 이고,

$t \geq -1$ 에서 $f(k) = f(k+3)$ 를 만족하는 실수 k 에 대해

$-1 \leq t < k$ 에서 $g(t) = f(t)$ 이고

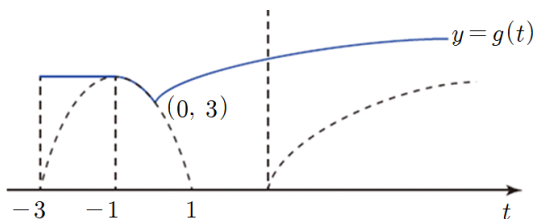
$t \geq k$ 에서 $g(t) = f(t+3)$ 이다.

이때 $y = g(t)$ 의 그래프의 개형은 아래와 같다.



(* $f(-1) \leq f(2)$ 이면 $g(t)$ 의 최솟값이 $f(-1) = 4$ 이상이 되어 조건을 만족시키지 않는다.)

즉, $g(t)$ 의 최솟값이 3이 되려면 $f(k) = f(k+3) = 3$ 이어야 한다.



따라서 $k = 0$ 이고 $f(3) = 3$ 에서 $2\log_2(2a) = 3$,

$a = \sqrt{2}$ 이다.

$x \geq 1 + \frac{\sqrt{2}}{2}$ 에서 $f(x) = 2\log_2(x-1) + 1$ 이고

$t \geq 0$ 에서 $g(t) = f(t+3) = 2\log_2(t+2) + 1$ 이므로

$g(\alpha) = 13 \Leftrightarrow 2\log_2(\alpha+2) + 1 = 13$ 이다.

$\therefore \alpha = 62$

확률과 통계



66-9. ②

중국인 2명을 이웃한 한 쌍으로 묶고 앉는 순서를 정하는 방법의 수는

$$2! = 2$$

한국인 2명, 중국인 한 쌍이 원 모양의 탁자에 앉는 경우의 수는 $(3-1)! = 2! = 2$

한국인 2명, 중국인 한 쌍 사이의 세 자리에

일본인 2명이 앉는 경우의 수는

$${}_3P_2 = 6$$

따라서 구하는 경우의 수는

$$2 \times 2 \times 6 = 24$$

66-10. ②

$f(1) = 1$ 인 경우는 존재하지 않는다.

$f(1) = 3$ 인 경우, $f(3)$, $f(5)$ 는 1이 될 수 있으므로 경우의 수는 $1^2 = 1$

$f(1) = 5$ 인 경우, $f(3)$, $f(5)$ 는 1 또는 3이 될 수 있으므로 경우의 수는 $2^2 = 4$

$f(1) = 7$ 인 경우, $f(3)$, $f(5)$ 는 1 또는 3 또는 5가 될 수 있으므로 경우의 수는 $3^2 = 9$

따라서

$f(1)$, $f(2)$, $f(3)$ 의 값을 정하는 경우의 수는

$$1 + 4 + 9 = 14$$

$f(4)$, $f(5)$, $f(6)$ 을 정하는 경우의 수는

2, 4, 6 중에서 세 개의 수를 중복하여 선택하는 경우의 수이므로

$${}_3H_3 = {}_5C_3 = 10$$

따라서 구하는 함수 f 의 개수는

$$14 \times 10 = 140$$

66-11. ⑤

$f(40) = g(40)$ 에서

$$P(X \leq 40) = P(Y \geq 40)$$

$$P\left(\frac{X-m}{2} \leq \frac{40-m}{2}\right) = P\left(\frac{Y-(m+5)}{3} \geq \frac{40-(m+5)}{3}\right)$$

$$P\left(Z \leq \frac{40-m}{2}\right) = P\left(Z \geq \frac{40-m-5}{3}\right)$$

$$\frac{40-m}{2} = -\frac{40-m-5}{3} \text{ 이므로 } m = 38$$

$$f(35) + g(40)$$

$$= P(X \leq 35) + P(Y \geq 40)$$

$$= P\left(\frac{X-38}{2} \leq \frac{35-38}{2}\right) + P\left(\frac{Y-45}{3} \geq \frac{40-43}{3}\right)$$

$$= P(Z \leq -1.5) + P(Z \geq -1)$$

$$= 0.5 - P(-1.5 \leq Z \leq 0) + 0.5 + P(-1 \leq Z \leq 0)$$

$$= 0.0668 + 0.8413 = 0.9081$$

66-12. 31

선택한 세 카드에 적혀 있는 세 자연수의 합이 8이 되는 경우는

i) 세 자연수가 모두 다른 경우

이 세 자연수는 (1, 2, 5) 또는 (1, 3, 4)이고

각각의 수가 적혀 있는 카드가 흰 색 또는 검은 색이므로 세 자연수의 합이 8이 되는 경우의 수는

$$2 \times 2^3 = 16$$

또한 세 자연수의 합이 8이고 흰 색 카드의 개수가 2인 경우의 수는

$$2 \times {}_3C_2 = 6$$

ii) 세 자연수 중 두 자연수가 같은 경우

이 세 자연수는 (1, 1, 6) 또는 (2, 2, 4) 또는 (3, 3, 2)이고

같은 수가 적혀 있는 카드는 흰 색 카드와 검은 색 카드를 모두 선택하고, 나머지 수가 적혀 있는 카드는 흰 색 또는 검은 색이다.

세 자연수의 합이 8이 되는 경우의 수는

$$3 \times 2 = 6$$

또한 세 자연수의 합이 8이고 흰 색 카드의 개수가 2인 경우의 수는

$$3 \times 1 = 3$$

i), ii)에서 선택한 세 자연수의 합이 8일 확률은

$$\frac{16+6}{{}_{12}C_3} = \frac{1}{10}$$

세 자연수의 합이 8이고 흰 색 카드의 개수가 2일 확률은

$$\frac{6+3}{{}_{12}C_3} = \frac{9}{220}$$

따라서 세 자연수의 합이 8일 때, 흰 색 카드의 개수가 2일

$$\text{확률은 } \frac{\frac{9}{220}}{\frac{1}{10}} = \frac{9}{22}$$

$$\therefore p+q = 22+9 = 31$$

미적분

66-9. ②

$$f'(x) = \frac{3x^2+1}{\ln 2(x^3+x+a)} > 0 \text{ 에서 } f(x) \text{ 는 증가함수이다.}$$

$$f(x) = \log_2(x^3+x+a) = \log_2(a+10) \text{ 에서 } x=2 \text{ 이므로 } g(\log_2(a+10)) = 2 \text{ 이다.}$$

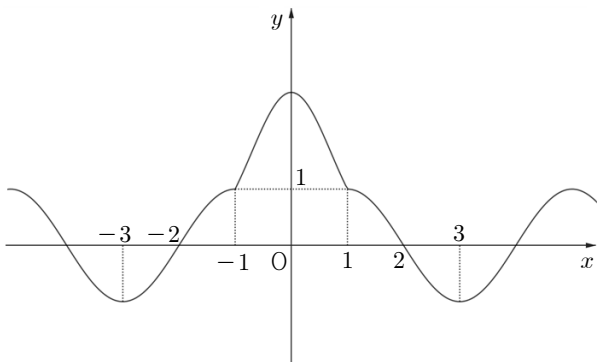
$$\begin{aligned} g'(\log_2(a+10)) &= \frac{1}{f'(g(\log_2(a+10)))} = \frac{1}{f'(2)} \\ &= \frac{(a+10)\ln 2}{13} = \ln 2 \end{aligned}$$

에서 $a=3$ 이다.

$$\therefore f'(1) = \frac{4}{\ln 2(1+1+3)} = \frac{4}{5\ln 2}$$

66-10. ②

조건 (가)에서 함수 $f(x)$ 는 y 축 대칭, 즉 우함수이고 그래프의 개형은 다음과 같다.



조건 (나)에서 $g'(x) = f(x)$ 이므로

문제에서 구하고자 하는 $\int_{-2}^4 g(x)dx$ 을 다음과 같이

부분적분해보자.

$$\begin{aligned} & \int_{-2}^4 g(x)dx \\ &= [xg(x)]_{-2}^4 - \int_{-2}^4 xg'(x)dx \\ &= [xg(x)]_{-2}^4 - \int_{-2}^4 xf(x)dx \quad \dots \textcircled{7} \end{aligned}$$

이때 $xf(x)$ 는 기함수이므로

$$\int_{-2}^4 xf(x)dx = \int_{-2}^2 xf(x)dx + \int_2^4 xf(x)dx = \int_2^4 xf(x)dx$$

이고,

$2 \leq x \leq 4$ 에서 $f(x) = \sin \frac{\pi}{2}x$, $x = 3$ 에 대해 대칭인

함수이므로

$(x-3)f(x)$ 는 점 $(3, 0)$ 에 대해 대칭인 함수임을 이용하면

$$\int_2^4 xf(x)dx = \int_2^4 \{(x-3)f(x) + 3f(x)\}dx = 3 \int_2^4 f(x)dx$$

이다.

이를 ⑦의 식에 대입해보면

$$\begin{aligned} & 4g(4) + 2g(-2) - 3 \int_2^4 f(x)dx \\ &= 4 \int_{-1}^4 f(x)dx - 2 \int_{-2}^{-1} f(x)dx - 3 \int_2^4 f(x)dx \end{aligned}$$

계산의 편의를 위해 $\int_1^2 f(x)dx = A$ 라고 하자.

A 와 문제의 조건에서 주어진 $\int_{-1}^1 f(x)dx = k$ 를 대입하면

$$\begin{aligned} &= 4 \left(k + \int_1^4 f(x)dx \right) - 2 \int_{-2}^{-1} f(x)dx - 3 \int_2^4 f(x)dx \\ &= 4(k - A) - 2A - 3 \times (-2A) \\ &= 4k \end{aligned}$$

66-11. ①

등비수열 $\{a_n\}$ 의 공비를 r 이라고 하자.

$$2 \times \sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} (a_n)^2 \text{에서}$$

$$\frac{2a_1}{1-r} = \frac{(a_1)^2}{1-r^2}$$

$$\frac{2a_1}{1-r} = \frac{a_1}{1-r} \times \frac{a_1}{1+r}$$

$$\frac{a_1}{1+r} = 2 \text{ 이고}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_{2n-1} = \frac{a_1}{1-r^2} = \frac{a_1}{1+r} \times \frac{1}{1-r} = \frac{2}{1-r} = 3 \text{에서}$$

$$r = \frac{1}{3} \text{ 이므로 } a_1 = \frac{8}{3} \text{이다.}$$

$$\therefore \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{2n}}{2^n} = \frac{\frac{a_2}{2}}{1 - \frac{1}{2} \times r^2} = \frac{\frac{4}{9}}{1 - \frac{1}{18}} = \frac{8}{17}$$

66-12. 7

조건 (가)에서

$$g'(x) = \{f(x) + f'(x)\}e^x = (x-2)(x-a)e^x \text{이다.}$$

$$\begin{aligned} g(x) &= \int (x-2)(x-a)e^x dx \\ &= \int \{x^2 - (a+2)x + 2a\}e^x dx \\ &= \{x^2 - (a+2)x + 2a - 2x + (a+2) + 2\}e^x \\ &= \{x^2 - (a+4)x + 3a + 4\}e^x \end{aligned}$$

$h(x) = x^2 - (a+4)x + 3a + 4$ 이라고 할 때,

조건 (나)에서 모든 실수 t 에 대해 극한값이 존재하려면
다음의 경우를 생각할 수 있다.

i) $h(x) = (x-2)(x-4)$ 일 때

이는 불가능하다.

ii) $h(x) = (x-4)^2$ 일 때

$$a = 4$$

iii) $h(x) = 0$ 의 실근이 존재하지 않을 때

$$D = (a+4)^2 - 4(3a+4) < 0$$

$$0 < a < 4$$

i), ii), iii)에서 $0 < a \leq 4$ 이고, 조건 (가)에서 $x = a$ 에서
극소를 가져야 하므로 $a > 2$ 이다.

따라서 조건을 만족시키는 모든 자연수 a 의 값은 3, 4 이다.

$\therefore 7$

Day. 67

수학1, 수학2



67-1. ④

등비수열의 첫째항을 a , 공비를 r 이라 하면

모든 항이 음수라는 조건에서 $a < 0$, $r > 0$ 임을 알 수 있다.

$$a_1 a_2 a_3 = a^3 r^3 = -64, ar = -4 \text{ 이고}$$

$$\frac{a_7 a_6}{a_5 a_4} = r^4 = 16, r = 2 \text{ 이므로 } a = -2 \text{ 이다.}$$

$$a_3 = ar^2 = -8, a_4 = ar^3 = -16$$

$$\therefore a_3 + a_4 = -24$$

67-2. 4

$$x' = v(t) = 3t^2 + 6t + (2a - 8)$$

점 P의 운동 방향이 바뀌지 않으려면 $t \geq 0$ 에서

$v(t) \geq 0$ 이어야 한다.

$v(t)$ 의 축이 $t = -1$ 이므로

$$v(0) = 2a - 8 \geq 0$$

$$a \geq 4 \text{ 이다.}$$

따라서, 자연수 a 의 최솟값은 4이다.

$$\therefore 4$$

67-3. ②

조건 (가)에서 $f(x) = -x^3 + 2x^2 + ax + b$ 라고 하면

$$f'(x) = -3x^2 + 4x + a \text{ 이다.}$$

조건 (나)의 극한값이 수렴하려면 $f(1) = 4$ 이고

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x^3) - f(1)}{x^3 - 1} \times \frac{(x-1)(x^2+x+1)}{(x-1)(x+1)} = f'(1) \times \frac{3}{2} = 3 \text{ 에}$$

서

$$f'(1) = 2 \text{ 이다.}$$

$$f'(1) = 1 + a = 2, a = 1$$

$$f'(x) = -3x^2 + 4x + 1$$

$$\therefore f'(2) = -3$$

67-4. 96

공차를 d 라고 할 때

$S_k = S_{k+1}$ 이므로 $a_{k+1} = 0$ 에서 $a_n = d(n-k-1)$ 로 둘 수 있다.

$$a_1 = -dk = 69 \text{에서}$$

음의 정수 d 와 자연수 k 에 대해 $dk = -69$ 를 만족시켜야 한다.

가능한 (d, k) 의 순서쌍은 다음과 같다.

$$(-1, 69), (-3, 23), (-23, 3), (-69, 1)$$

$a_k = -d$ 이므로 모든 a_k 의 값은 1, 3, 23, 69 이다.
 $\therefore 96$

67-5. 31

$g'(x) = f(x)$ 이므로

함수 $g(x)$ 가 극솟값을 가지려면 $f(x) = 0$ 이 서로 다른 세 실근을 가져야 한다.

$f'(x) = -3(x-2)(x+2)$ 에서 곡선 $f(x)$ 가 $x = -2$ 에서 극소, $x = 2$ 에서 극대를 가지므로

$$f(-2) < 0 < f(2)$$

$$-16 + k < 0 < 16 + k$$

$$-16 < k < 16$$

따라서 가능한 정수 k 의 개수는 31 이다.

$\therefore 31$

67-6. ③

조건 (가)를 만족하려면 함수 $f(x)$ 의 주기가 $\frac{3\pi}{n}$

(n 은 자연수)이어야 하므로

$$\frac{3\pi}{n} = \frac{2\pi}{a} \text{ 에서 } a = \frac{2}{3}n \text{ 이다.}$$

따라서 가능한 10 이하의 자연수 a 의 값은 2, 4, 6, 8, 10 이다.

조건 (나)를 만족하려면 $0 \leq x \leq \frac{\pi}{6}$ 에서 $f(x)$ 의 최솟값이 0 보다 커야 한다.

$a = 2, 4, 6$ 일 때 닫힌 구간에서 $f(x)$ 의 최솟값은 모두 $f(0)$ 이므로

$f(0) = b > 0$ 을 만족시키는 b 의 개수는 10 이다.

$a = 8$ 일 때 $f(x)$ 는 $x = \frac{\pi}{6}$ 에서 최소이므로

$f\left(\frac{\pi}{6}\right) = -\sqrt{3} + b > 0, b > \sqrt{3}$ 을 만족시키는 b 의 개수는 9 이다.

$a = 10$ 일 때 $f(x)$ 의 최솟값은 $-2 + b$ 이므로

$-2 + b > 0, b > 2$ 를 만족시키는 b 의 개수는 8 이다.

따라서 모든 순서쌍 (a, b) 의 개수는

$$10 + 10 + 10 + 9 + 8 = 47 \text{ 이다,}$$

$\therefore 47$

67-7. 35

조건 (가)에서 사차함수 $f(x)$ 에 대하여 다음과 같다.

$$f(x) - k = ax^3(x-4) \quad (a < 0)$$

$$f(x) = ax^3(x-4) + k$$

조건 (나)에서 함수 $y = f(x)$ 와 $y = k$ 는 $x = 0, x = 4$ 에서 만나므로 두 점 B, C 의 좌표는 다음과 같다.

$$B(0, k), C(4, k)$$

또한 사차함수의 비율관계에 의해 극대점의 x 좌표가 3 이므로 $A(3, -27a + k)$ 이다.

삼각형 ABC 가 직각삼각형이 되기 위해서는 선분 AB 와 AC 의 기울기의 곱이 -1 이어야 하므로

$$\frac{-27a}{3} \times \frac{27a}{1} = -3^5 a^2 = -1, a^2 = \frac{1}{3^5}$$

$$a = -\frac{\sqrt{3}}{27} \text{ 이다.}$$

$$f'(x) = 3ax^2(x-4) + ax^3$$

$$f'(1) = -8a = \frac{8\sqrt{3}}{27}$$

$$\therefore p+q=35$$

67-8. 28

$\angle P$ 는 공통, $\angle PBD = \angle PCA$ 이므로

삼각형 PAC 와 삼각형 PDB 는 $\overline{PA}:\overline{PD}=4:3$ 닮음이다.

따라서 $\overline{AC}+\overline{BD}=14$ 에서 $\overline{BD}=6$ 임을 알 수 있다.

한편 삼각형 PDB 에서 코사인법칙에 의해

$$\overline{PB}=1+2\sqrt{7} \text{ 이므로}$$

$$\overline{AB}=2\sqrt{7}-3 \text{ 이다.}$$

$$\therefore (\overline{AB}+3)^2 = 28$$

확률과 통계

67-9. ④

$${}_{3n}C_0 + {}_{3n}C_1 + {}_{3n}C_2 + \cdots + {}_{3n}C_{3n} = 2^{3n}$$

이므로

$$\log_4 ({}_{3n}C_0 + {}_{3n}C_1 + {}_{3n}C_2 + \cdots + {}_{3n}C_{3n})$$

$$= \log_2 2^{3n} = \frac{3n}{2} = 48$$

$$\therefore n = 32$$

67-10. 16

확률변수 $\overline{X}$ 는 정규분포 $N\left(m, \left(\frac{64}{\sqrt{n}}\right)^2\right)$ 를 따르므로

$$\begin{aligned} P(\overline{X} \geq m-n) &= P\left(\frac{\overline{X}-m}{\frac{64}{\sqrt{n}}} \geq \frac{m-n-m}{\frac{64}{\sqrt{n}}}\right) \\ &= P\left(Z \geq -\frac{n\sqrt{n}}{64}\right) \end{aligned}$$

$$P(Z \geq 1) + P(\overline{X} \geq m-n) = 1$$

$$\text{에서 } P(\overline{X} \geq m-n) = P(Z \geq -1)$$

이므로

$$-\frac{n\sqrt{n}}{64} = -1, \frac{n\sqrt{n}}{64} = 1 \text{ 이 되어야 한다.}$$

$$\therefore n\sqrt{n} = 64, n = 16$$

67-11. 42

조건 (나)를 만족시킬 때

$f(1) + f(3) + f(5)$ 의 값이 3의 배수가 되는 경우는

i) $f(1) = f(3) = f(5)$ 인 경우

$f(1)$ 의 값이 1부터 5가 될 수 있고

$f(2), f(4)$ 를 정하는 경우의 수는

$$1 \times 1 = 1$$

따라서 $f(1) = f(3) = f(5)$ 인 함수 f 의 개수는

$$5 \times 1 = 5$$

ii) $f(3) = f(1) + 1, f(5) = f(3) + 1$ 인 경우

$f(1)$ 의 값이 1부터 3이 될 수 있고

$f(2), f(4)$ 를 정하는 경우의 수는

$$2 \times 2 = 4$$

따라서 $f(3) = f(1) + 1, f(5) = f(3) + 1$ 인 함수 f 의

개수는

$$3 \times 4 = 12$$

iii) $f(1) = f(3), f(5) = f(3) + 3$ 인 경우

$f(1)$ 의 값이 1부터 2가 될 수 있고

$f(2), f(4)$ 를 정하는 경우의 수는

$$1 \times 4 = 4$$

따라서 $f(1) = f(3), f(5) = f(3) + 3$ 인 함수 f 의 개수는

$$2 \times 4 = 8$$

iv) $f(3) = f(5) = f(1) + 3$ 인 경우

$f(1)$ 의 값이 1부터 2가 될 수 있고

$f(2), f(4)$ 를 정하는 경우의 수는

$$4 \times 1 = 4$$

따라서 $f(3) = f(5) = f(1) + 3$ 인 함수 f 의 개수는

$$2 \times 4 = 8$$

v) $f(3) = f(1) + 2, f(5) = f(3) + 2$ 인 경우

$f(1)$ 의 값이 1이 될 수 있고

$f(2), f(4)$ 를 정하는 경우의 수는

$$3 \times 3 = 9$$

따라서 $f(3) = f(1) + 2, f(5) = f(3) + 2$ 인 함수 f 의

개수는

$$1 \times 9 = 9$$

i)~v)에 의하여 조건을 만족시키는 함수 f 의 개수는

$$5 + 12 + 8 + 8 + 9 = 42$$

67-12. ③

i) 첫 번째 시행에서 앞면이 보이는 동전 2개, 뒷면이 보이는 동전 1개를 뒤집는 경우

첫 번째 시행 후 앞면이 보이는 동전은 7개, 뒷면이 보이는 동전은 2개이다. 이때 두 번째 시행에서

① 앞면이 보이는 동전 3개, 뒷면이 보이는 동전 0개를 뒤집는 경우 :

두 번째 시행 후 앞면이 보이는 동전은 4개, 뒷면이 보이는 동전은 5개이다.

② 앞면이 보이는 동전 2개, 뒷면이 보이는 동전 1개를

뒤집는 경우 :

두 번째 시행 후 앞면이 보이는 동전은 6개, 뒷면이 보이는 동전은 3개이다.

- ③ 앞면이 보이는 동전 1개, 뒷면이 보이는 동전 2개를 뒤집는 경우 :

두 번째 시행 후 앞면이 보이는 동전은 8개, 뒷면이 보이는 동전은 1개이다.

따라서 두 번째 시행 후 앞면이 보이는 동전의 개수가 12의 약수가 아닌 사건은 ③뿐으로 그 확률은

$$\frac{{}_8C_2 \times {}_1C_1}{{}_9C_3} \times \frac{{}_7C_1 \times {}_2C_2}{{}_9C_3} = \frac{1}{36}$$

- ii) 첫 번째 시행에서 앞면이 보이는 동전 3개를 뒤집는 경우
첫 번째 시행 후 앞면이 보이는 동전은 5개, 뒷면이 보이는 동전은 4개이다. 이때 두 번째 시행에서

- ① 앞면이 보이는 동전 3개, 뒷면이 보이는 동전 0개를 뒤집는 경우 :

두 번째 시행 후 앞면이 보이는 동전은 2개, 뒷면이 보이는 동전은 7개이다.

- ② 앞면이 보이는 동전 2개, 뒷면이 보이는 동전 1개를 뒤집는 경우 :

두 번째 시행 후 앞면이 보이는 동전은 4개, 뒷면이 보이는 동전은 5개이다.

- ③ 앞면이 보이는 동전 1개, 뒷면이 보이는 동전 2개를 뒤집는 경우 :

두 번째 시행 후 앞면이 보이는 동전은 6개, 뒷면이 보이는 동전은 3개이다.

- ④ 앞면이 보이는 동전 0개, 뒷면이 보이는 동전 3개를 뒤집는 경우 :

두 번째 시행 후 앞면이 보이는 동전은 8개, 뒷면이 보이는 동전은 1개이다.

따라서 두 번째 시행 후 앞면이 보이는 동전의 개수가 12의 약수가 아닌 사건은 ④뿐으로 그 확률은

$$\frac{{}_8C_3}{{}_9C_3} \times \frac{{}_5C_0 \times {}_4C_3}{{}_9C_3} = \frac{2}{63}$$

i), ii)에서 구하는 확률은 $1 - \left(\frac{1}{36} + \frac{2}{63} \right) = \frac{79}{84}$

미적분

67-9. ②

$y = x$ 에서

$$\frac{e^t}{t} = \frac{2}{t}, e^t = 2 \text{ 이므로 } t = \ln 2 \text{ 이다.}$$

$$\frac{dx}{dt} = \frac{e^t(t-1)}{t^2}, \frac{dy}{dt} = -\frac{2}{t^2} \text{ 에서}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = -\frac{2}{e^t(t-1)} \text{ 이다.}$$

따라서 $t = \ln 2$ 일 때 $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{1 - \ln 2}$ 이다.

$$\therefore \frac{1}{1 - \ln 2}$$

67-10. ⑤

조건 (나)에서

$$2 \int_1^e x f(x) f'(x) dx = e$$

$$\int_1^e x \times 2 f(x) f'(x) dx$$

$$= [x \{f(x)\}^2]_1^e - \int_1^e \{f(x)\}^2 dx$$

$$= e \{f(e)\}^2 - \{f(1)\}^2 - \int_1^e \{f(x)\}^2 dx$$

$$= 4e - \int_1^e \{f(x)\}^2 dx$$

$= e$ 이므로

$$\int_1^e \{f(x)\}^2 dx = 3e \text{ 이다.}$$

$x = t$ 에서 곡선 $y = f(x)$ 의 접선이 x 축의 양의 방향과 이루는

예각의 크기 $\theta(t)$ 에 대하여

$\tan \theta(t) = f'(t)$ 이다.

구하고자 하는 값은

$$\int_1^e \cot \theta(t) \{f(t)\}^2 f'(t) dt$$

$$= \int_1^e \frac{\{f(t)\}^2 f'(t)}{\tan \theta(t)} dt$$

$$= \int_1^e \frac{\{f(t)\}^2 f'(t)}{f'(t)} dt$$

$$= \int_1^e \{f(t)\}^2 dt$$

$$= 3e$$

$$\therefore 3e$$

67-11. 9

조건 (가)에서 $a_{n+1} = a_n - 4$ 또는 $a_{n+1} = \frac{1}{3} a_n$ 이다.

조건 (나)에서 $n \geq 3$ 이면 $a_n < a_{n+1}$ 를 만족시키려면

$a_3 < 0$ 이고 $n \geq 3$ 에서 $a_{n+1} = \frac{1}{3} a_n$ 이어야 한다.

또한

$$\sum_{n=2}^{\infty} a_n = a_2 + \sum_{n=3}^{\infty} a_n = a_2 + \frac{a_3}{1 - \frac{1}{3}} = a_2 + \frac{3}{2} a_3 = \frac{3}{2} \text{ 이므로}$$

$a_2 > 0$ 임을 알 수 있다.

$a_2 > 0$, $a_3 < 0$ 에서 $a_3 = a_2 - 4$ 이므로

$$a_2 + \frac{3}{2}(a_2 - 4) = \frac{3}{2}, \quad a_2 = 3 \text{ 이다.}$$

따라서 가능한 자연수인 a_1 의 값은 7, 9이다.

$\therefore 9$

67-12. 36

$g'(x) = \{f(x) + f'(x)\}e^{x-a}$ 이므로

조건 (가)에서 $f(4) = 0$, $f(4) + f'(4) = 0$,

즉, $f(x) = (x-4)^2$ 임을 알 수 있다.

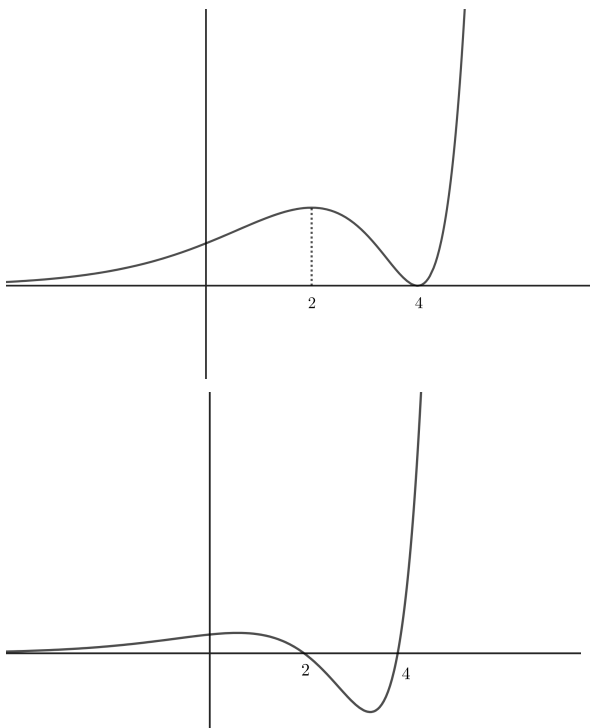
조건 (나)에서 $g(g(x))$ 의 역함수가 존재하려면 $x \geq a$ 에서

함수 $g(g(x))$ 는 증가해야 하므로 $g'(g(x)) \times g'(x) \geq 0$ 이어야 한다.

$$g(x) = (x-4)^2 e^{x-a}$$

$$g'(x) = (x-2)(x-4)e^{x-a}$$

두 곡선의 그래프의 개형은 다음과 같다.



$g'(x) \geq 0$ 에서 $a \geq 4$ 이고

이때 $g(x) = t$ 라고 하면 $a \geq 4$ 에서 $t \geq g(a) = (a-4)^2$ 이다.

따라서 $t \geq (a-4)^2$ 에서 $g'(t) \geq 0$ 이어야 하므로

$(a-4)^2 \geq 4$ 에서 $a \geq 6$ 이다.

$$m = 6$$

$$\therefore m^2 = 36$$

Day. 68

수학1, 수학2

68-1. ③

$$f(0) \times \left\{ \lim_{x \rightarrow -1-} f(x) + \lim_{x \rightarrow 1+} f(x) \right\}$$

$$= 2 \times (2 + 0) = 4$$

$$\therefore 4$$

68-2. ③

근과 계수의 관계에 의해

$$a_3 + a_8 = a_{10} \text{ 이므로 } a_1 = 0 \text{ 이다}$$

$$\sum_{n=1}^{10} a_n = 75 \text{ 에서 } a_1 + a_{10} = 15 \text{ 이므로 } a_{10} = 15 \text{ 이고}$$

$$d = \frac{5}{3} \text{ 이다. 따라서 } a_3 = \frac{10}{3}, a_8 = \frac{35}{3} \text{ 에서 } k = \frac{350}{9} \text{ 이다.}$$

$$\therefore \frac{350}{9}$$

68-3. 60

함수 $f(x)$ 가 $x=1$ 에서 불연속이고 미분 불가능하므로

조건 (가)를 만족시키려면 함수 $h(x)$ 는 $(x-1)^2$ 를 인수로 가져야 한다.

조건 (나)에서 $\lim_{x \rightarrow 2} g(x)h(x) = g(2)h(2)$ 이다.

이때 극한값 $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{h(x)}{x-2}$ 가 수렴하려면 $h(2) = 0$ 이고

$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{h(x)}{x-2} = g(2)h(2) = 0$ 이므로 함수 $h(x)$ 는 $(x-2)^2$ 를 인수로 갖는다.

따라서 $h(x) = (x-1)^2(x-2)^2$ 에서

$$h'(x) = 4(x-1)\left(x - \frac{3}{2}\right)(x-2) \text{ 이다.}$$

$$\therefore h'(4) = 60$$

68-4. ③

곡선 $y = \log_2 \frac{x-1}{a} - 1$ 를 $y=x$ 에 대하여 대칭이동시킨 곡선

$$y = a \times 2^{x+1} + 1 \text{ 은}$$

곡선 $y = a \times 2^x$ 를 x 축의 방향으로 -1 만큼, y 축의 방향으로 1 만큼 평행이동시킨 것이다.

곡선 $y = a \times 2^{x+1} + 1$ 가 y 축과 만나는 점을 P 라고 할 때,
 $\overline{BP} = \sqrt{2}$ 임을 알 수 있다.

(이때 점 P 는 점 A 를 $y=x$ 대칭시킨 점과 같다.)

따라서 $\overline{PA} = 4\sqrt{2}$ 이므로 점 A 의 x 좌표는 4이다.

$$\log_2 \frac{x-1}{a} - 1 = 0, x = 2a + 1 = 4 \text{ 에서 } a = \frac{3}{2} \text{ 이고,}$$

점 C의 좌표는 $\left(0, \frac{3}{2}\right)$ 이므로

삼각형 ABC의 넓이를 구하면 $\frac{15}{4}$ 이다.

$$\therefore \frac{15}{4}$$

68-5. ⑤

조건 (가)에서 $f(x) = ax^2(x - 3k)$ 라고 하면

$f'(x) = 3ax(x - 2k)$ 이다.

$(x - 1)f(x) = h(x)$ 라고 할 때, 조건 (나)에서 모든 실수 x 에 대해 $h(x) \leq h(2)$ 를 만족시켜야 하므로 함수 $h(x)$ 는 $x = 2$ 에서 극댓값을 가진다.

즉, $h'(2) = 0$ 이고 $h'(x) = f(x) + (x - 1)f'(x)$ 에서 $f(2) + f'(2) = 0$ 이다.

$$f(2) + f'(2) = 4a(2 - 3k) + 6a(2 - 2k) = 0, k = \frac{5}{6}$$

조건 (다)에서 $f(1) = -\frac{3}{2}a = \pm 9$, 즉 $a = \pm 6$ 이다.

이때 $x = 2$ 에서 극대이려면 $a < 0$ 이어야 하므로 $a = -6$ 이다.

따라서 $f(x) = -6x^2\left(x - \frac{5}{2}\right)$ 이다.

$$\therefore f(2) = 12$$

68-6. 19

$\overline{AC} = 1$ 에서 $\overline{BC} = \sqrt{3}$, $\angle CBA = \frac{\pi}{6}$ 이고

$\angle ACE = \theta$ 라 하면 $\angle CEB = \theta + \frac{\pi}{3}$ 이다.

삼각형 CEB에서 사인법칙을 쓰면

$$\frac{\overline{CE}}{\sin \frac{\pi}{6}} = \frac{\sqrt{3}}{\sin\left(\theta + \frac{\pi}{3}\right)}, \sin\left(\theta + \frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ 에서}$$

$$\theta + \frac{\pi}{3} = \frac{3\pi}{4}, \theta = \frac{5\pi}{12} \text{ 이다.}$$

$$\angle CBD = \angle CBA + \angle ABD = \frac{\pi}{6} + \theta$$

$$\angle CBD = \frac{7\pi}{12}$$

$$\therefore p + q = 19$$

68-7. ②

두 점 $(t, f(t))$, $(t + 3, f(t + 3))$ 을 연결한 선분의 1 : 2 내분점은

$$\left(t + 1, \frac{f(t + 3) + 2f(t)}{3}\right) \text{ 이므로}$$

$$g(t + 1) = \frac{f(t + 3) + 2f(t)}{3} \text{ 이다.}$$

즉, $f(t + 3) = 3g(t + 1) - 2f(t)$ 이므로

$$\int_0^6 f(x)dx = \int_0^3 f(x)dx + \int_3^6 f(x)dx \text{ 에서}$$

$$\int_0^3 f(x)dx = 8 \text{ 이고}$$

$$\begin{aligned} \int_3^6 f(x)dx &= \int_0^3 f(x+3)dx \\ &= \int_0^3 \{3g(x+1) - 2f(x)\}dx \\ &= 3 \int_1^4 g(x)dx - 2 \int_0^3 f(x)dx \\ &= 3 \times 7 - 2 \times 8 \\ &= 5 \text{ 이므로} \end{aligned}$$

$$\int_0^6 f(x)dx = 13 \text{ 이다.}$$

$$\therefore 13$$

68-8. ①

a_2 가 짝수인 경우 수열 $\{a_n\}$ 의 홀짝성은 다음과 같다.

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
a_n 의 홀짝	홀	짝	홀	홀	짝	홀	홀	짝	홀	홀	짝

a_2 가 홀수인 경우 수열 $\{a_n\}$ 의 홀짝성은 다음과 같다.

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
a_n 의 홀짝	홀	홀	짝	홀	홀	짝	홀	홀	짝	홀	홀

이때 a_{11} 은 홀수이므로 a_2 는 홀수임을 알 수 있다.

$a_2 = k$ (단, k 는 홀수)라 하고 위의 표를 채우면 다음과 같다.

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
a_n	a_1	k	$2k$	$3k$	$5k$	$10k$	$15k$	$25k$	$50k$	$75k$	$125k$

$$\text{따라서 } \sum_{n=1}^{10} a_n = a_1 + 186k = 301 \text{ 에서}$$

$$k = 1 \text{ 이고 } a_1 = 115 \text{ 이다.}$$

$$\therefore a_1 + a_2 = 116$$

확률과 통계

68-9. 64

감, 배, 귤을 각각 x, y, z 개 택한다고 했을 때

i) 사과를 2개 택하는 경우

$$x + y + z = 7 \quad (x, y, z \text{ 는 자연수})$$

$$\text{따라서 경우의 수는 } {}_3H_4 = {}_6C_4 = 15$$

ii) 사과를 1개 택하는 경우

$$x + y + z = 8 \quad (x, y, z \text{ 는 자연수})$$

$$\text{따라서 경우의 수는 } {}_3H_5 = {}_7C_5 = 21$$

iii) 사과를 0개 택하는 경우

$$x + y + z = 9 \quad (x, y, z \text{ 는 자연수})$$

$$\text{따라서 경우의 수는 } {}_3H_6 = {}_8C_6 = 28$$

i) ~ iii)에 의하여 모든 경우의 수는

$$15 + 21 + 28 = 64$$

68-10. ①

1차에 합격한 제품이 2차에 불합격할 확률은

$$\frac{3}{4} \times \frac{1}{5} = \frac{3}{20}$$

이므로 제품 100개 중에서 1차에 합격하고 2차에 불합격한 제품은

$$100 \times \frac{3}{20} = 15$$

따라서 2차에서 불합격한 제품 20개 중 5개는 1차에 불합격하고, 2차에 불합격한 제품이다.

제품 100개 중에서 1차에 불합격하고, 2차에 불합격할 확률은

$$\frac{5}{100} = \frac{1}{20}$$

따라서 2차에 불합격한 제품 중에서 임의로 택한 제품이 1차에서도 불합격한 제품일 확률은

$$\frac{\frac{1}{20}}{\frac{3}{20} + \frac{1}{20}} = \frac{1}{4}$$

68-11. 790

상위 10%의 점수를 x_1 , 하위 10%의 점수를 x_2 라 할 때,

$$P(X \leq x_1) = 0.9, P(X \leq x_2) = 0.1$$

이고 이를 각각 표준화하면

$$P\left(Z \leq \frac{x_1 - m}{\sigma}\right) = 0.9, P\left(Z \leq \frac{x_2 - m}{\sigma}\right) = 0.1$$

$$\frac{x_1 - m}{\sigma} = 1.3, \frac{x_2 - m}{\sigma} = -1.3$$

이므로

$$x_1 - x_2 = 2.6\sigma = a \quad \cdots \textcircled{㉠}$$

상위 16%의 점수를 x_3 , 하위 16%의 점수를 x_4 라 할 때,

$$P(X \leq x_3) = 0.84, P(X \leq x_4) = 0.16$$

이고 이를 각각 표준화하면

$$P\left(Z \leq \frac{x_3 - m}{\sigma}\right) = 0.84, P\left(Z \leq \frac{x_4 - m}{\sigma}\right) = 0.16$$

$$\frac{x_3 - m}{\sigma} = 1, \frac{x_4 - m}{\sigma} = -1$$

이므로

$$x_3 - x_4 = 2\sigma = b \quad \cdots \textcircled{㉡}$$

$$\textcircled{㉠}, \textcircled{㉡} \text{에서 } a - b = 0.6\sigma = 3$$

$$\therefore \sigma = 5$$

이 회사의 연수 점수가 상위 12% 안에 들어가기 위해서는

연수점수가 80점 이상이 되어야하므로

$$P(X \leq 80) = 0.88$$

$$P\left(\frac{X-m}{5} \leq \frac{80-m}{5}\right) = P\left(Z \leq \frac{80-m}{5}\right) = 0.88$$

$$\frac{80-m}{5} = 1.2$$

$$\therefore m = 74$$

$$\therefore 10(m + \sigma) = 10(74 + 5) = 790$$

68-12. 76

$$a = 16 - w, b = w - z, c = z - y, d = y - x, e = x - 1$$

로 놓으면 a, b, c, d, e 는 음이 아닌 정수이고

$$a + b + c + d + e = 15, b \times d = 20$$

i) $b = 2, d = 10$ 또는 $b = 10, d = 2$ 일 때

$a + c + e = 3$ 이므로 순서쌍 (a, b, c, d, e) 의 개수는

$$2 \times {}_3H_3 = 2 \times {}_5C_3 = 20$$

ii) $b = 4, d = 5$ 또는 $b = 5, d = 4$ 일 때

$a + c + e = 6$ 이므로 순서쌍 (a, b, c, d, e) 의 개수는

$$2 \times {}_3H_6 = 2 \times {}_8C_6 = 56$$

i), ii)에 의하여 구하는 모든 순서쌍 (a, b, c, d, e) 의 개수는

$$20 + 56 = 76$$

미적분

68-9. ③

$$a_n = 4f'(n\pi) \text{ 이고}$$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \cos x - x \sin x + \cos x + 2x \\ &= 2\cos x - x \sin x + 2x \end{aligned}$$

에서

$$a_n = 8\cos n\pi + 8n\pi \text{ 이다.}$$

따라서

$$\sum_{k=1}^{10} a_k = 5 \times (-8 + 8) + 8\pi \sum_{k=1}^{10} k = 8\pi \times 55 = 440\pi \text{ 이다.}$$

$$\therefore m = 440$$

68-10. ②

선분 PQ를 한 번으로 하는 반원의 넓이 $S(x)$ 는

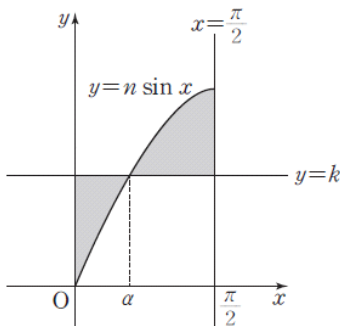
$$S(x) = \frac{\pi}{8} \cos^3 x \text{ 이다.}$$

따라서 입체도형의 부피 V 는

$$\begin{aligned} V &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\pi}{8} \cos^3 x \, dx \\ &= \frac{\pi}{8} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x (1 - \sin^2 x) \, dx \\ &= \frac{\pi}{8} \int_0^1 (1 - t^2) \, dt = \frac{\pi}{12} \end{aligned}$$

68-11. 5

곡선 $y = n \sin x$ 와 직선 $y = k$ 의 교점의 x 좌표를 α ($0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$) 라 하자.



두 부분의 넓이의 합을 $S(\alpha)$ 라 하면

$$\begin{aligned}
 S(\alpha) &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} |n \sin x - k| dx \\
 &= \int_0^{\alpha} (k - n \sin x) dx + \int_{\alpha}^{\frac{\pi}{2}} (n \sin x - k) dx \\
 &= [kx + n \cos x]_0^{\alpha} + [-n \cos x - kx]_{\alpha}^{\frac{\pi}{2}} \\
 &= k\alpha + n \cos \alpha - (0 + n \cos 0) - n \cos \frac{\pi}{2} \\
 &\quad - \frac{k\pi}{2} - (-n \cos \alpha - k\alpha) \\
 &= 2k\alpha + 2n \cos \alpha - n - \frac{k\pi}{2}
 \end{aligned}$$

이때 $k = n \sin \alpha$ 이므로

$$S(\alpha) = 2n\alpha \sin \alpha + 2n \cos \alpha - n - \frac{n\pi \sin \alpha}{2}$$

양변을 α 에 대하여 미분하면

$$\begin{aligned}
 S'(\alpha) &= 2n \sin \alpha + 2n\alpha \cos \alpha - 2n \sin \alpha - \frac{n\pi \cos \alpha}{2} \\
 &= 2n\alpha \cos \alpha - \frac{n\pi \cos \alpha}{2} \\
 &= n \cos \alpha \left(2\alpha - \frac{\pi}{2} \right)
 \end{aligned}$$

$S'(\alpha) = 0$ 에서 $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ 이므로 $2\alpha - \frac{\pi}{2} = 0$, 즉

$\alpha = \frac{\pi}{4}$ 이다.

구간 $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ 에서 함수 $S(\alpha)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

α	(0)	...	$\frac{\pi}{4}$	...	$\left(\frac{\pi}{2}\right)$
$S'(\alpha)$		-	0	+	
$S(\alpha)$		$\searrow$	극소	$\nearrow$	

따라서 함수 $S(\alpha)$ 는 $\alpha = \frac{\pi}{4}$ 일 때 극소이면서 최소이다.

$$k = n \sin \alpha = n \sin \frac{\pi}{4} = n \times \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2} n \text{ 이고}$$

$$f(n) = \frac{\sqrt{2}}{2} n \text{ 이므로}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\{f(n)\}^2}{n^2 + 1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{2} n^2}{n^2 + 1} = \frac{1}{2} \text{ 이다.}$$

$$\therefore p^2 + q^2 = 5$$

68-12. ④

조건 (가)에서 $g(0) = 0$, 즉 $f(0) = 0$ 이므로

조건 (나)에서 $f'(0) = \{1 + f(0)\}^2 = 1$ 임을 알 수 있다.

$g(a) = k$ 라고 하면 $f(k) = a$ 이고,

$$g'(a) = \frac{4}{3} \text{ 에서 } g'(a) = \frac{1}{f'(k)} = \frac{4}{3}, f'(k) = \frac{3}{4} \text{ 이다.}$$

이때 조건 (가)에서 함수 $g(x)$ 가 원점 대칭이므로 역함수 $f(x)$ 역시 $f(-x) = -f(x)$ 를 만족시킨다.

$$\begin{aligned} f'(k) &= \{1 + f(k)\} \times \{1 + f(-k)\} \\ &= (1 + a)(1 - a) = 1 - a^2 = \frac{3}{4} \end{aligned}$$

따라서 양수 a 의 값은 $\frac{1}{2}$ 이다.

$$\therefore a = \frac{1}{2}$$