

백일대장

수능 역전을 위한
백일 전략서

09

정답 및 해설

Day. 57

수학1, 수학2

57-1. ③

공차가 양수이므로 $a_5 > a_3$ 이고

$a_3 + a_5 = 2$ 이므로 a_3 과 a_5 중 적어도 하나는 양수

따라서 a_5 는 무조건 양수, 즉 $|a_5| = a_5$

$a_3 + a_5 = 2 \neq 4 = |a_3| + |a_5| = |a_3| + a_5$ 이므로

$a_3 < 0$, 즉 $|a_3| = -a_3$

따라서 $|a_3| + |a_5| = -a_3 + a_5 = 4$

위 식을 $a_3 + a_5 = 2$ 와 더하면

$$2a_5 = 6$$

$$\therefore a_5 = 3, a_3 = -1$$

$$a_5 - a_3 = 2d = 4 \text{이므로}$$

$$a_7 = a_5 + 2d = 3 + 4 = 7$$

57-2. ③

$F(x) = xf(x) + 4x^3 - x^2 + k$ 의 양변을 미분하면

$$f(x) = f(x) + xf'(x) + 12x^2 - 2x$$

$$xf'(x) = -12x^2 + 2x$$

$$x \neq 0 \text{일 때, } f'(x) = -12x + 2$$

이때, $f(x)$ 는 다항함수이므로 실수 전체에서 미분 가능

따라서 $f'(x)$ 는 실수 전체에서 연속이므로

실수 전체 범위에서 $f'(x) = -12x + 2$ 라 할 수 있다.

$$f(0) = 10 \text{이므로 } f(x) = -6x^2 + 2x + 10$$

$$F(1) = 7 \text{이므로 } F(x) = -2x^3 + x^2 + 10x - 2$$

$$\text{따라서 } k = F(0) = -2$$

$$F(-k) = F(2) = 6$$

57-3. ⑤

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{g(x)}{x+1} = -6 \text{에서}$$

$$g(-1) = 0, g'(-1) = -6$$

$(x^3 + x)f(x) + 2 = g(x)$ 에서 $x = -1$ 을 대입하면

$$-2f(-1) + 2 = g(-1)$$

$$\therefore f(-1) = 1$$

$(x^3 + x)f(x) + 2 = g(x)$ 의 양변을 미분하면

$$(3x^2 + 1)f(x) + (x^3 + x)f'(x) = g'(x)$$

$$x = -1 \text{을 대입하면 } 4 - 2f'(-1) = -6$$

$$\therefore f'(-1) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(-1+h) - f(-1)}{h} = 5$$

57-4. 9

점 A는 직선 $y = \frac{1}{2}x$ 위의 점이므로

점 A의 좌표를 $(p, \frac{1}{2}p)$ 라 하면

$$\overline{AB} = 2\sqrt{5} \text{ 이므로}$$

점 B의 좌표는 $(p+4, \frac{1}{2}p+2)$

사각형 ABDC의 넓이가 8이므로

$$(2p+4) \times 2 \times \frac{1}{2} = 8$$

$$\therefore p = 2$$

따라서 점 A의 좌표는 (2, 1), 점 B의 좌표는 (6, 3)

각 좌표를 $y = \log_3(x-a) + b$ 에 대입하면

$$1 = \log_3(2-a) + b$$

$$3 = \log_3(6-a) + b$$

$$1 - \log_3(2-a) = 3 - \log_3(6-a)$$

$$\therefore a = \frac{3}{2}, b = 1 + \log_3 2$$

$$a \times 3^b = 9$$

57-5. 22

$f(x) = 3$ 의 해는 $x = 0$ 또는 $x = 2$

$g(x) = 0$ 의 해는 $x = 1$

$g(x) = 2$ 의 해는 $x = \frac{1}{4}$ 또는 $x = 4$

$$\therefore a = \frac{1}{4} + 1 + 4 = \frac{21}{4}$$

$g(x) = 0$ 의 해는 $x = 1$

$f(x) = 1$ 의 해는 $x = 1$

$$\therefore b = 1$$

$$4a + b = 21 + 1 = 22$$

57-6. ②

$$(t-2)f(t) = \begin{cases} -t+2 & (t < 2) \\ -2t^2+10t-12 & (t \geq 2) \end{cases} \text{이므로}$$

$\int_a^x (t-2)f(t)dt$ 는 $x=2$ 에서 변곡점을 가지고 $x=3$ 에서

극댓값을 가지며, $x=3$ 을 기준으로 증가하다가 감소하는 그래프를 가진다.

따라서 $g(x)$ 가 오직 한 점에서만 미분가능하지 않도록 하려면 $g(2)=0$ 이어야 한다.

$$\int_2^{\frac{7}{2}} (-2t^2+10t-12)dt = 0 \text{이므로 } g\left(\frac{7}{2}\right) = g(2) = 0 \text{이고}$$

$$g(a) = 0 \text{이므로 } a = 2 \text{ 또는 } a = \frac{7}{2}$$

따라서 모든 a 의 값의 합은 $\frac{11}{2}$ 이다.

57-7. 11

선분 AB의 중점을 M이라 하고

$\overline{PC}=x$, $\overline{PD}=y$ 라 하면 (단, $x > y$)

$\cos(\angle PMC) = -\cos(\angle PMD)$ 이므로

$$\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{3}{2}\right)^2 - x^2}{2 \times \frac{1}{2} \times \frac{3}{2}} = -\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{3}{2}\right)^2 - y^2}{2 \times \frac{1}{2} \times \frac{3}{2}}$$

$$x^2 + y^2 = 5$$

$$\overline{PC} + \overline{PD} = x + y = \frac{7\sqrt{5}}{5} \text{ 이므로}$$

$$\therefore x = \frac{4\sqrt{5}}{5}, y = \frac{3\sqrt{5}}{5}$$

$$\cos(\angle CPD) = \frac{x^2 + y^2 - 1^2}{2 \times x \times y} = \frac{5}{6}$$

따라서 $p+q=11$

57-8. ①

$$\lim_{x \rightarrow 0+} f(x) = 14, f(1) = 7, f(5) = 39$$

$$a < 0 \text{ 이면, } f\left(\frac{a}{2}\right) = -\frac{a^2}{4} + a + b^2, f(0) = a + b^2$$

이때, $\lim_{t \rightarrow k-} g(t) > \lim_{t \rightarrow k+} g(t)$ 를 만족시키는 실수 k 의 개수가

1이려면

$$f\left(\frac{a}{2}\right) = \lim_{x \rightarrow 0+} f(x), f(0) = f(5) \text{ 이어야 하므로}$$

$$-\frac{a^2}{4} + a + b^2 = 14, a + b^2 = 39$$

이를 만족시키는 (a, b) 의 순서쌍은 $(-10, \pm 7)$

$$a \geq 0 \text{ 이면, } f(0) = a + b^2$$

이때, $\lim_{t \rightarrow k-} g(t) > \lim_{t \rightarrow k+} g(t)$ 를 만족시키는 실수 k 의 개수가

1이려면

$$f(0) = \lim_{x \rightarrow 0+} f(x) \text{ 이어야 하므로}$$

$$a + b^2 = 14$$

이를 만족시키는 (a, b) 의 순서쌍은

$$(13, \pm 1), (10, \pm 2), (5, \pm 3)$$

따라서 $a+b$ 의 최댓값 M 은 14, 최솟값 m 은 -17

$$M - m = 31$$

확률과 통계

57-9. ④

$x' = x - 1, y' = y - 1, z' = z - 1$ 이라 하면

$x' \geq 0, y' \geq 0, z' \geq 0$ 이고 $0 \leq x' + y' + z' < 7$

$x' + y' + z' = 6$ 인 경우의 수는 ${}_3H_6$

$x' + y' + z' = 5$ 인 경우의 수는 ${}_3H_5$

$\vdots$
 $x' + y' + z' = 0$ 인 경우의 수는 ${}_3H_0$ 이므로
 모든 순서쌍 (x, y, z) 의 개수는
 ${}_3H_6 + {}_3H_5 + \cdots + {}_3H_0 = {}_9C_3 = 84$

57-10. 15

표본평균 x 를 이용하여 구한 모평균 m 에 대한 신뢰도 95%의 신뢰구간은

$$x - 1.96 \times \frac{6}{\sqrt{4}} \leq m \leq x + 1.96 \times \frac{6}{\sqrt{4}}$$

$x - 5.88 \leq m \leq x + 5.88$ 이고

신뢰구간에 포함되는 자연수의 최솟값이 10이므로

$$9 < x - 5.88 \leq 10$$

$$14.88 < x \leq 15.88$$

$$\therefore x = 15$$

57-11. ④

a 가 적힌 공 또는 e 가 적힌 공을 1개 이상 선택하는 경우의 수는
 전체 경우의 수에서 a 가 적힌 공과 e 가 적힌 공이 포함되지
 않도록 선택하는 경우의 수를 빼 것과 같으므로

$${}_5H_5 - {}_3H_5 = 105$$

57-12. ①

시행을 4번 반복한 후 상자 B에 들어 있는 공의 개수가 짝수인 경우는

3의 배수가 4번 나오는 경우,

3의 배수가 2번, 3의 배수가 아닌 수가 2번 나오는 경우,

3의 배수가 아닌 수가 4번 나오는 경우이다.

이 중 상자 A에 들어 있는 공의 개수와 상자 C에 들어 있는 공의 개수가 같은 경우는 3의 배수가 4번 나오는 경우이므로

구하고자 하는 확률은

$$\frac{\left(\frac{1}{3}\right)^4}{\left(\frac{1}{3}\right)^4 + {}_4C_2 \times \left(\frac{1}{3}\right)^2 \times \left(\frac{2}{3}\right)^2 + \left(\frac{2}{3}\right)^4} = \frac{1}{41}$$

미적분

57-9. ②

$\int_1^{t^2} f(x) dx = 1 - \frac{1}{t}$ 의 양변을 미분하면

$$2tf(t^2) = \frac{1}{t^2}$$

양수 전체의 집합에서 함수 $f(x)$ 가 연속이므로

$$f(x) = \frac{1}{2t^3}$$

$$a_n = \int_1^n 4f(x^2)dx = \int_1^n \frac{2}{x^3}dx = \frac{n^2-1}{n^2} = \frac{(n-1)(n+1)}{n^2}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_2 \times a_3 \times a_4 \times \cdots \times a_n) = \frac{1}{2} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{n} = \frac{1}{2}$$

57-10. ③

$$f(x) = \begin{cases} e^x - 2 + e^{-a} & (x \geq 0) \\ -e^{-x} + e^{-a} & (x < 0) \end{cases}$$

곡선 $y = f(x)$ 와 x 축 및 y 축으로 둘러싸인 부분의 넓이가

$$1 - \frac{\sqrt{e}}{2} \text{ 이고, } a < 0 \text{ 이므로}$$

$$\int_a^0 (-e^{-x} + e^{-a})dx = 1 - \frac{\sqrt{e}}{2}$$

$$1 - (e^{-a} + ae^{-a}) = 1 - \frac{\sqrt{e}}{2}$$

$$(a+1)e^{-a} = \frac{\sqrt{e}}{2}$$

$$\therefore a = -\frac{1}{2}$$

57-11. 8

$$f'(x) = (x^2 - 2x - 4)e^{-x} \text{ 이므로}$$

$f(x)$ 는 $1 - \sqrt{5}$ 에서 극대이고 $1 + \sqrt{5}$ 에서 극소이다.

함수 $g(t)$ 는 $f(x)$ 의 극대점에서 극대이고,

$f(x)$ 의 극소점에서 극소이므로

$$a = 1 - \sqrt{5}, \quad b = 1 + \sqrt{5}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0 \text{ 이므로}$$

$\lim_{t \rightarrow \infty} g(t)$ 는 $f(x) = 0$ 이 되는 x 의 최솟값과 같다.

$$\text{따라서 } \lim_{t \rightarrow \infty} g(t) = -2$$

$$a \times b \times \lim_{t \rightarrow \infty} g(t) = 8$$

57-12. 5

$$\int_2^x f'(t)[f(t) + g(t)]dt = f(x)g(x) \text{ 에 } x = 2 \text{ 를 대입하면}$$

$$f(2)g(2) = 0$$

$$g(2) \neq 0 \text{ 이므로 } f(2) = 0$$

$$\int_2^x f'(t)[f(t) + g(t)]dt = f(x)g(x) \text{ 의 양변을 미분하면}$$

$$f'(x)f(x) + f'(x)g(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

$$f(x)[f'(x) - g'(x)] = 0$$

$$\text{따라서 } f(x) = 0 \text{ 또는 } f'(x) = g'(x)$$

함수 $g(x)$ 는 $g'(x) = -e^{-\frac{x^2}{2}}(x^2 - 1)$ 에서 $g'(1) = 0$ 이고
 $x = 1$ 에서 극대이다.

이때 $f(2) = 0$ 이고, 함수 $f(x)$ 가 실수 전체의 집합에서
 미분가능하므로

$\int_{-2}^0 f(x)dx$ 가 최소이려면

$x \geq 1$ 에서 $f(x) = 0$

$x < 1$ 에서 $f'(x) = g'(x)$, 즉 $f(x) = g(x) + C$
 $(C = -g(1))$

가 되어야 한다. 따라서

$$f(x) = \begin{cases} xe^{-\frac{x^2}{2}} - \frac{1}{\sqrt{e}} & (x \leq 1) \\ 0 & (x > 1) \end{cases}$$

일 때, $\int_{-2}^0 f(x)dx$ 가 최소이고 이때의 최솟값은

$$\int_{-2}^0 \left(xe^{-\frac{x^2}{2}} - \frac{1}{\sqrt{e}} \right) dx = \frac{1}{e^2} - \frac{2}{\sqrt{e}} - 1$$

$$\therefore a = 1, b = -2, a^2 + b^2 = 5$$

Day. 58

수학1, 수학2

58-1. ④

$$|a_1| = |a_5| \text{ 이므로 } a_3 = 0$$

$$a_3 = 0 \text{ 이므로 } |a_2| + |a_4| = 8$$

$$|a_1| = |a_5| \text{ 이므로 } |a_2| = |a_4|$$

$$\text{따라서 } |a_2| = |a_4| = 4$$

$$\text{공차를 } d \text{ 라 하면, } |d| = 4$$

$$|a_8| = |a_4| + 4|d| = 20$$

58-2. 3

점 P의 x 좌표를 a 라 하면,

접선이 서로 일치하므로 $x = a$ 에서의 미분계수가 같아야 한다.

$$\text{따라서 } -3a^2 = 6a$$

$$a(a+2) = 0$$

$$a \neq 0 \text{ 이므로 } a = -2$$

점 P에서 만나므로

$$-(-2)^3 + k = 3(-2)^2 - 1$$

$$k = 3$$

58-3. ③

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{(x+1)(x-1)} = k \text{ 에서 } f(1) = 0, f'(1) = 2k,$$

$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{(x+1)(x-1)} = 5$ 에서 $f(x)$ 의 차수가 2이고, 최고차항의 계수가 5임을 알 수 있다.

$$\text{따라서 } f(x) = 5(x-1)^2 + 2k(x-1)$$

$1 \leq k \leq 8$ 이므로 $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{f(x)}{(x+1)(x-1)}$ 의 최댓값은

$k=8$ 일 때, 즉, $\frac{13}{2}$ 임을 알 수 있다.

58-4. ⑤

$$\frac{S_3}{S_1} = 2 \text{이므로 } a_3 = -1$$

$$S_{n+2} = 2S_n \text{에서}$$

n 에 $n+1$ 을 대입하면

$$S_{n+3} = 2S_{n+1}$$

두 식을 빼면

$$a_{n+3} = 2a_{n+1} \text{이므로}$$

$$a_{14} = a_2 \times 2^6 = 2^7$$

$$a_{13} = a_3 \times 2^5 = -2^5$$

$$S_{11} = S_1 \times 2^5 = 2^5$$

$$\frac{a_{14} - a_{13}}{S_{11}} = 5$$

58-5. 10

함수 $f(x-2)$ 는 $x=3$ 에서 불연속이고,

$f(x-a)$ 는 $x=a+1$ 에서 불연속이다.

$a+1=3$, 즉, $a=2$ 일 때,

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x-2)f(x-a) = (-12)^2 = 144$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 3^+} f(x-2)f(x-a) &= \lim_{x \rightarrow 3^+} f(x-2)f(x-2) \\ &= (-6)^2 = 36 \end{aligned}$$

이므로 함수 $f(x-2)f(x-a)$ 은 $x=3$ 에서 불연속이다.

$f(x-2)f(x-a)$ 가 $x=3$ 에서 연속이 되게 하는 a 값은

6, 5, 0, -1이고

$f(x-2)f(x-a)$ 가 $x=a+1$ 에서 연속이 되게 하는 a 값은
-2, -1, 4, 5이다.

$f(x-2)$ 와 $f(x-a)$ 중 하나만 연속이어야 하므로

가능한 a 값은 6, 0, -2, 4이다.

따라서 모든 실수 a 의 값의 합은 $2+6+0+(-2)+4=10$

58-6. 14

$a_1, a_2, \dots, a_{10}$ 중

-1인 항의 개수를 x ,

0인 항의 개수를 y ,

1인 항의 개수를 z 라 하면,

$$x+y+z=10,$$

(가)에서 $-x+z=1$, (나)에서 $x+z=5$ 이므로

$$x=2, y=5, z=3$$

$$2^{-1} + 2^{-2} + 2^4 + 2^6 + 2^7 = \frac{855}{4} \text{이므로}$$

-1인 항은 a_1, a_2 이고, 1인 항은 a_4, a_6, a_7 이며,

나머지 항은 0이다.

따라서 $\sum_{n=1}^{10} na_n = 14$ 이다.

58-7. ⑤

x 가 정수일 때 $f(x)=1$ 이므로

$a_n = 1$ 이려면 $0 < x < c$ 에서 $g(x)$ 는 함숫값으로 정수인 값을 1만 가질 수 있다.

따라서 $f\left(\frac{n}{6}\right) < f(c) \leq f\left(\frac{n}{2}\right)$

$$\frac{n}{6} < c \leq \frac{n}{2}$$

$2c \leq n < 6c$ 인 n 의 개수가 36이므로

$$4c = 36$$

$$\therefore c = 9, a_3 = 11$$

$$a_3 + c = 20$$

58-8. 16

(가)에서 모든 실수 t 에 대하여 $\lim_{x \rightarrow t-} \frac{g(x)-g(t)}{x-t}$ 의 값이

존재하고 그 값이 0 이상이라면,

모든 실수 x 에 대하여

$g(x)$ 의 좌미분계수가 존재하고 0 이상이어야 하므로

$f(x)$ 는 $x=-1$ 에서 극대이고 $x=1$ 에서 극소이며,

$$k - f(1) = f(1) \text{이다.}$$

따라서 $f'(x) = 3x^2 - 3$

$$f(x) = x^3 - 3x + C$$

(나)에서 $g(x)=s$ 의 서로 다른 실근의 개수가 2가 되도록 하는 실수 s 의 최댓값이 12이므로

$$s = f(-1) = 12$$

따라서 $C = 10$

$$k = 2f(1) \text{이므로 } k = 16$$

확률과 통계

58-9. 84

무게가 k g 이하인 포도를 선택할 확률을 p 라 할 때,

2번의 시행 중 1번만 무게가 k g 이하인 포도를 선택할 확률은

$${}_2C_1 \times p(1-p) = \frac{8}{25}$$

$$p = \frac{1}{5} \text{ 또는 } p = \frac{4}{5}$$

$$p = \frac{1}{5} \text{인 경우, } k = 420 - 50 \times 0.84$$

$$p = \frac{4}{5} \text{인 경우, } k = 420 + 50 \times 0.84$$

$$|\alpha - \beta| = 2 \times 50 \times 0.84 = 84$$

58-10. ⑤

주머니 A에서 꺼낸 두 개의 공에 적힌 수의 합과 주머니 B에서 꺼낸 두 개의 공에 적힌 수의 합이 3으로 같을 경우의 확률은

$$\frac{{}_2C_1 \times {}_2C_1 \times {}_2C_1 \times {}_2C_1 \times {}_2C_1}{{}_5C_1 \times {}_4C_1 \times {}_5C_1 \times {}_4C_1} = \frac{32}{400}$$

합이 4로 같을 경우의 확률은

$$\frac{({}_2C_1 + {}_2C_1 \times {}_2C_1) \times ({}_2C_1 + {}_2C_1 \times {}_2C_1)}{{}_5C_1 \times {}_4C_1 \times {}_5C_1 \times {}_4C_1} = \frac{36}{400}$$

합이 5로 같을 확률은

$$\frac{{}_2C_1 \times {}_2C_1 \times {}_2C_1 \times {}_2C_1 \times {}_2C_1}{{}_5C_1 \times {}_4C_1 \times {}_5C_1 \times {}_4C_1} = \frac{32}{400}$$

따라서 구하고자 하는 확률은

$$\frac{32}{400} + \frac{36}{400} + \frac{32}{400} = \frac{1}{4}$$

58-11. 61

합이 5가 되도록 선택하는 경우는

$(3, 2, 0, 0, 0), (3, 1, 1, 0, 0), (2, 2, 1, 0, 0),$
 $(2, 1, 1, 1, 0), (1, 1, 1, 1, 1)$ 이고

각각의 조합으로 다섯 자리의 자연수를 만드는 경우의 수는

$$2 \times \frac{4!}{3!} = 8$$

$$\frac{4!}{2! \times 2!} + \frac{4!}{2!} = 18$$

$$\frac{4!}{2! \times 2!} + \frac{4!}{2!} = 18$$

$$\frac{4!}{3!} + \frac{4!}{2!} = 16$$

$$\frac{5!}{5!} = 1 \text{ 이므로}$$

구하고자 하는 경우의 수는 61이다.

58-12. 101

1, 2, 3, 4 중에서 중복으로 5개를 뽑아서 합이 10이 되도록 하는 조합은

$(4, 3, 1, 1, 1), (4, 2, 2, 1, 1), (3, 3, 2, 1, 1),$
 $(3, 2, 2, 2, 1), (2, 2, 2, 2, 2)$ 이고

각각의 조합에 대해 만들어지는 함수의 개수는

$${}_5C_1 \times {}_4C_1 = 20$$

$${}_5C_1 \times {}_4C_2 = 30$$

$${}_5C_1 \times {}_4C_2 = 30$$

$${}_5C_1 \times {}_4C_1 = 20$$

$${}_5C_5 = 1 \text{ 이므로}$$

구하고자 하는 경우의 수는 101이다.

미적분

58-9. 3

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=n}^{2n} \frac{n}{k^2} f\left(\frac{k}{n}\right) = \int_1^2 \frac{f(x)}{x^2} dx = \int_1^2 \frac{\ln x}{x^2} dx$$

$$= \frac{1 - \ln 2}{2}$$

$$p + q = 3$$

58-10. ③

$$y' = f'(x) - ke^x$$

$$y'' = f''(x) - ke^x = 2 - ke^x \text{ 이므로}$$

$$\text{변곡점의 } x \text{ 좌표는 } \ln \frac{2}{k}$$

$$g(k) = f(\ln 2 - \ln k) - 2$$

$$g(1) = g(2) \text{ 이므로, } f(x) = x^2 + ax + b \text{ 라 하면 } a = -\ln 2$$

$$g'(k) = -\frac{1}{k} f'(\ln 2 - \ln k)$$

$$g'(8) = \frac{5}{8} \ln 2$$

58-11. ④

두 곡선이 오직 두 점에서만 만나므로

두 점 중 x 좌표가 더 큰 점에서는 접해야 한다.

접할 때의 x 좌표를 a 라 하면

$$a^2 - 2ta + 1 = ke^a$$

$$2a - 2t = ke^a \text{ 이므로}$$

$$a^2 - 2ta + 1 = 2a - 2t$$

$$(a-1)(a-2t-1) = 0$$

$$t > 1 \text{ 이므로 } a = 2t + 1$$

$$k = f(t) = 2(t+1)e^{-2t-1}$$

$$f'(t) = -2(2t+1)e^{-2t-1}$$

$$f'(2) = -10e^{-5}$$

58-12. 17

(나)에서 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n b_n$ 이 발산하고 (가)에서 $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n b_n - a_n)$ 은

수렴하므로 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ 은 발산한다.

그런데, (다)에서 $\lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n)$ 이 수렴값을 가지므로

$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ 이 무한대로 발산하는 것이 아니라 2개 이상의 값에

가까워지며 진동한다고 볼 수 있다.

이때, $f(x) = 5$ 의 근의 개수는 최대 2개이므로

방정식 $f(x) = 5$ 의 두 근이 α, β 일 때,

$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ 이 α 와 β 에 가까워지며 진동한다고 하면,

(가)에서 $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) = 4$, $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n b_n - a_n) = 2$ 이므로

$\alpha = 1$, $\beta = 2$ 라 할 수 있다.

따라서 $f(x) = (x-1)(x-2) + 5$ 이고 $f(5) = 17$ 이다.

Day. **59**

수학1, 수학2

59-1. 84

$\frac{a_2}{b_1} = k$ 라 하면,

$$\sum_{n=1}^6 \frac{a_{2n}}{b_n} = \sum_{n=1}^6 k \times 2^{n-1} = 3$$

$$k(2^6 - 1) = 3$$

$$k = \frac{1}{21}$$

따라서 $b_1 = 21a_2$

$$\frac{b_5}{a_4} = \frac{21a_2 \times 2^4}{a_2 \times 2^2} = 84$$

59-2. ①

$$g'(x) = (2x-2)f(x) + (x^2-2x)f'(x)$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(2+h) - g(h)}{h} = g'(2) = 2f(2) = 6$$

59-3. ④

i) $a > 0$ 일 때, $m = 0$, $M = a + 2$ 이므로

$$a + 2 = 5 \therefore a = 3$$

ii) $a < 0$ 일 때, $m = a + 2$, $M = 2$ 이므로

$$a + 2 = -3 \therefore a = -5$$

따라서 모든 a 의 값의 합은 -2 이다.

59-4. ④

점 P는 $0 \leq t \leq 2$ 에서는 왼쪽으로 움직이다가

$2 \leq t \leq 6$ 에서는 오른쪽으로 움직인다.

따라서 $t = 2$ 일 때 점 B로부터 가장 가까이 있고,

$t = 6$ 일 때 점 B로부터 가장 멀리 있다.

$$a = 8 + \int_0^2 3t(t-2)dt = 4$$

$$b = 4 + \int_2^6 -2(t-2)(t-6)dt = \frac{76}{3}$$

$$a + b = \frac{88}{3}$$

59-5. 27

점 A의 좌표는 (0, 1)

삼각형 ABC는 $\overline{AB} = \overline{BC} = 2\sqrt{2}$ 인 직각 이등변삼각형이므로
점 B, C의 좌표는 각각 (2, 3), (4, 1)이다.

점 B는 $f(x) = a^x$ 위의 점이므로

$$3 = a^2, \therefore a = \sqrt{3}$$

점 C는 점 B를 x 축의 방향으로 m 만큼 y 축의 방향으로
 $-m$ 만큼

평행이동한 점이므로 $m = 2$

$$a^{3m} = 27$$

59-6. 91

$$f(x) = -x(x-a)^2 + f(0)$$

$$g(t) = \begin{cases} 1 & (0 < t \leq a) \\ 2 & (a < t < 2a) \\ 1 & (2a \leq t) \end{cases}$$

$k = a, 2a$ 이므로

$$a + 2a = 12, \therefore a = 4$$

$$f(x) = -x(x-4)^2 + f(0)$$

$$f'(x) = -(x-4)^2 - 2x(x-4)$$

$$|f'(-3)| = 91$$

59-7. 36

점 O에서 선분 AC에 내린 수선의 발을 F라 하면

$$\overline{OF} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\text{따라서 } \angle COF = \angle AOF = \frac{\pi}{4}$$

$$\angle ABC = \frac{\pi}{4} \text{ 이므로 } \overline{OD} \text{ 를 } x \text{ 라 하면 } \overline{BD} = 2x$$

$$(x)^2 + (2x)^2 = 1^2$$

$$\therefore x = \frac{\sqrt{5}}{5}$$

$$\overline{BC} = \frac{2\sqrt{5}}{5} \text{ 이므로 삼각형 ABC에서}$$

$$\text{코사인 법칙을 쓰면 } \overline{AB} = \frac{3\sqrt{10}}{5}$$

$$10 \times \overline{AB}^2 = 36$$

59-8. 48

$f(0) = 0$ 이므로 (가)에서 $(f \circ g)(x) = 0$ 을 만족시키는 근 중
하나는 $x = -1$ 임을 알 수 있다.

$x = -1$ 을 제외하고 서로 다른 실근의 개수가 3이므로

$f(2) = 0$ 이어야 한다.

(나)에서 $(g \circ f)(x) = 0$ 의 서로 다른 실근이 α, β 뿐이므로

$f(x) = a(x-\alpha)^2(x-\beta)^2 - 1$ 이라 할 수 있고

$0 < \alpha < 2 < \beta$ 이므로

$$f(x) = ax(x-2)^2(x-4), \alpha = 2 - \sqrt{2}$$

$$f(\alpha) = -10 \text{ 이므로 } a = \frac{1}{4}, f(6) = 48$$

확률과 통계

59-9. ③

$$\overline{X} \sim N(500, 3^2)$$

$$P(494 \leq \overline{X} \leq 503) = P$$

$$(500 - 2.0 \times 3 \leq \overline{X} \leq 500 + 1.0 \times 3) \\ = 0.4772 + 0.3413 = 0.8185$$

59-10. 9

$f(2) + f(5)$ 의 값이 짝수가 되는 $f(2)$ 와 $f(5)$ 의 값의 순서쌍은
 $(2, 2), (2, 4), (4, 2), (4, 4)$

$(3, 3), (3, 5), (5, 3), (5, 5)$ 이므로

$$f(2) + f(5) \text{의 값이 짝수가 되는 확률은 } \frac{4^2 \times 8}{4^4} = \frac{1}{2}$$

$f(2) + f(5)$ 의 값이 짝수이면서 박스의 조건을 만족시킬 확률은

$$\frac{2 \times ({}_1H_2 + {}_3H_2 + {}_1H_2)}{4^4} = \frac{1}{16} \text{ 이므로}$$

구하고자 하는 확률은

$$\frac{\frac{1}{16}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{8}$$

$$p + q = 9$$

59-11. ③

$$a + 3 \leq b - 1 \text{에서 } b - a \geq 4$$

$$b - 1 \leq c \text{에서 } b - c \leq 1$$

i) $b = c + 1$ 일 때,

c 가 될 수 있는 값은 4, 5, 6, 7, 8, 9이고

각각에서 a 를 선택하는 경우의 수의 합은

$${}_1C_1 + {}_2C_1 + {}_3C_1 + {}_4C_1 + {}_5C_1 + {}_6C_1 = 21$$

ii) $b < c$ 일 때,

b 가 될 수 있는 값은 5, 6, 7, 8, 9이고

각각에서 a 와 c 를 선택하는 경우의 수의 합은

$${}_1C_1 \times {}_5C_1 + {}_2C_1 \times {}_4C_1 + {}_3C_1 \times {}_3C_1 + {}_2C_1 \times {}_4C_1 \\ + {}_1C_1 \times {}_5C_1 = 35$$

따라서 구하고자 하는 경우의 수는

$$21 + 35 = 56$$

59-12. 142

i) $2 \leq n < 5$ 일 때,

$$P(B) = \frac{2}{n}$$

$$n \text{이 짝수이면 } P(A) = \frac{1}{2}, P(A \cap B) = \frac{1}{n}$$

$$\frac{2}{n} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{n} \text{은 항등식}$$

따라서 $n = 2, 4$ 일 때 조건을 만족

$$n \text{이 홀수이면 } P(A) = \frac{n+1}{2n}, P(A \cap B) = \frac{1}{n}$$

$$\frac{2}{n} \times \frac{n+1}{2n} = \frac{1}{n} \text{은 해가 없다.}$$

따라서 주어진 범위에서 조건을 만족시키는 n 이 없다.

$$\therefore a_1 = 2, a_2 = 4$$

ii) $5 \leq n < 10$ 일 때,

$$P(B) = \frac{3}{n}$$

$$n \text{이 짝수이면 } P(A) = \frac{1}{2}, P(A \cap B) = \frac{1}{n}$$

$$\frac{3}{n} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{n} \text{은 해가 없다.}$$

따라서 주어진 범위에서 조건을 만족시키는 n 이 없다.

$$n \text{이 홀수이면 } P(A) = \frac{n+1}{2n}, P(A \cap B) = \frac{2}{n}$$

$$\frac{3}{n} \times \frac{n+1}{2n} = \frac{2}{n} \text{인데}$$

주어진 범위에서는 위 식을 만족시키는 n 이 없다.

iii) $n \geq 10$ 일 때,

$$P(B) = \frac{4}{n}$$

$$n \text{이 짝수이면 } P(A) = \frac{1}{2}, P(A \cap B) = \frac{2}{n}$$

$$\frac{4}{n} \times \frac{1}{2} = \frac{2}{n} \text{은 항등식}$$

따라서 10이상인 짝수인 모든 n 은 조건을 만족시킨다.

$$n \text{이 홀수이면 } P(A) = \frac{n+1}{2n}, P(A \cap B) = \frac{2}{n}$$

$$\frac{4}{n} \times \frac{n+1}{2n} = \frac{2}{n} \text{인데}$$

주어진 범위에서는 위 식을 만족시키는 n 이 없다.

따라서 $a_3 = 10, a_4 = 12, a_5 = 14, \dots$

$$\sum_{k=1}^{10} a_k = 142$$

미적분

59-9. ③

$2x^2 + 4xy + y^3 = k$ 의 양변을 미분하면

$$4x + 4y + 4x \frac{dy}{dx} + 3y^2 \frac{dy}{dx} = 0$$

$$x = 2 \text{일 때, } \frac{dy}{dx} = 0 \text{이므로 } a = -2$$

따라서 $k = -16$

59-10. ③

a_n 의 첫째항을 a , 공비를 r 이라 하면,

(가)에서 $b_n = 2a_n$ 이므로 b_n 의 첫째항은 $2a$, 공비는 r 이다.

따라서, (나)에서 $\frac{2a^2}{1-r^2} = 8$ 임을 알 수 있고,

$a_2b_2 = 2$ 이므로 $a^2r^2 = 1$ 임을 알 수 있다.

$r^2 = \frac{1}{a^2}$ 을 $\frac{2a^2}{1-r^2} = 8$ 에 대입하면

$a^2 = 2$ 이고 따라서 $r^2 = \frac{1}{2}$ 이다.

$$\therefore a_4 \times b_4 = \frac{1}{2}$$

59-11. 50

$\sin x = t$ 의 서로 다른 두 실근 중

작은 근을 $\alpha(t)$, 큰 근을 $\beta(t)$ 라 하면,

$$\sin \alpha(t) = t, \sin \beta(t) = t$$

$$f(t) = \beta(t) - \alpha(t)$$

$$f'(t) = \beta'(t) - \alpha'(t) = \frac{1}{\cos \beta(t)} - \frac{1}{\cos \alpha(t)}$$

$$f'\left(\frac{3}{5}\right) = -\frac{5}{2}, f'\left(-\frac{4}{5}\right) = \frac{10}{3} \text{이므로}$$

구하고자 하는 값은 50이다.

59-12. ④

(나)에서 $f(1) = 0$, $f'(1) = 2$ 이므로

$a = -1$ 이고, $x < 1$ 일 때 $f(x) = x^3 - x$

$$\int_0^2 f(x) dx = \int_0^1 (x^3 - x) dx + \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sec^2 x f(\tan x + 1) dx$$

$$= -\frac{1}{4} + \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\tan^3 x \sec^2 x + \tan x + x \sec^2 x) dx$$

$$= -\frac{1}{4} + \left[\frac{1}{4} \tan^4 x \right]_0^{\frac{\pi}{4}} + \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan x dx + \left[x \tan x \right]_0^{\frac{\pi}{4}}$$

$$- \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan x dx$$

$$= \frac{\pi}{4}$$

Day. 60

수학1, 수학2

60-1. 9

n 은 4의 배수이면서 144의 약수이어야 하므로
 2^2 을 인수로 가져야 하고 $2^2 \times 3^2$ 의 약수를 인수로 가져야 한다.
 따라서 자연수 n 의 개수는 $3 \times 3 = 9$

60-2. ④

$S_n = an^2 + bn$ 이라 하면
 $a_n = 2an + b - a$ 이므로
 $S_{12} < 0$ 에서 $12a + b < 0$
 $a_4 + a_{10} > 0$ 에서 $13a + b > 0$
 따라서 $-13a < b < -12a$ 이므로
 $a_n > 0$ 을 만족시키는 자연수 n 의 최솟값은 7이다.

60-3. 21

$g(x)$ 가 $x = a$ 에서 연속이려면
 $a^4 - 14a^2 - 24a - 12 = f(t)$
 위 식을 만족시키는 실수 a 의 개수가 3이므로
 $f(t) = -4$ 또는 $f(t) = -1$
 위 조건을 만족시키는 서로 다른 실수 t 의 개수가 3이므로
 $f(x) = (x - k)(x - 2)$ 라 하면
 $f(x)$ 의 극솟값 $f\left(\frac{k+2}{2}\right) = -4$
 따라서 $k = -2$ 또는 $k = 6$
 $f(5)$ 의 최댓값은 $k = -2$ 일 때, 즉, 21이다.

60-4. ③

선분 AB의 중점을 M이라 하면 $M\left(\frac{b}{2}, 0\right)$
 삼각형 OAB의 넓이가 $6\sqrt{2}$ 이므로
 $\frac{b}{2} = 3 \quad \therefore b = 6$
 점 A의 x 좌표를 k 라 하면
 두 직선 AC, BC가 서로 수직이므로
 $2\sqrt{2} : 6 - k = k : 2\sqrt{2}$
 $k < 3$ 이므로 $k = 2$
 점 A가 곡선 $y = a \tan \frac{\pi}{b}x$ 위의 점이므로
 $a = \frac{2\sqrt{6}}{3}$
 $a \times b = 4\sqrt{6}$

60-5. 9

(나)에서 극댓값의 절댓값이 6보다 작으므로 $k > 0$

(가)에서 함수 $f(x)$ 의 극솟값이 -6 이므로

$$\int_{-1}^2 f'(x) dx = -6, \text{ 즉, } \int_0^2 f'(x) dx = -\left(\frac{k}{6} \times 2^3\right) = -4$$

$$\therefore k = 3$$

$$f'(-3) = 9$$

60-6. 5

$$|a^2 - x| \leq 10 \text{ 이므로}$$

$$x - 10 \leq a^2 \leq x + 10$$

$$\lim_{x \rightarrow 6+} f(5+x) \text{에서 } \lim_{x \rightarrow 6+} (5+x) = \lim_{x \rightarrow 0+} (11+x) \text{ 이므로}$$

$$\lim_{x \rightarrow 6+} f(5+x) = 3$$

$$\lim_{x \rightarrow 6+} f(5-x) \text{에서 } \lim_{x \rightarrow 6+} (5-x) = \lim_{x \rightarrow 0-} (-1+x) \text{ 이므로}$$

$$\lim_{x \rightarrow 6+} f(5-x) = 2$$

따라서 구하고자 하는 값은 $3 + 2 = 5$

60-7. 65

$$S(t) = \int_0^t [f(t) - f(x)] dx$$

$$S(t) = tf(t) - \int_0^t f(x) dx$$

$$S'(t) = f(t) + tf'(t) - f(t) = tf'(t)$$

$$\frac{S'(t)}{t} = f'(t) = 3t^2 + a$$

이때, 함수 $f(t)$ 가 $t \geq 0$ 에서 증가하므로

$a \geq 0$ 이다.

$$f(0) = 1 \text{ 이므로}$$

$$f(t) = t^3 + at + 1$$

$$f(4) = 4a + 65$$

이때, $a \geq 0$ 이므로 최솟값은 65이다.

60-8. 12

(가), (나)의 두 등식을 더하면

$$a_{2n+2} + a_{2n+1} = a_{2n} + 4\sin^2 \frac{n\pi}{24} \text{ 이므로}$$

$$a_3 + a_4 = a_2 + 4\sin^2 \frac{\pi}{24} \text{ 이고}$$

양 변에 $4\sin^2 \frac{2\pi}{24}$ 를 더해주면

$$a_3 + a_5 + a_6 = a_2 + 4\left(\sin^2 \frac{\pi}{24} + \sin^2 \frac{2\pi}{24}\right) \text{ 이다.}$$

양 변에 $4\sin^2 \frac{3\pi}{24}$, $4\sin^2 \frac{4\pi}{24}$, ..., $4\sin^2 \frac{11\pi}{24}$ 를 더해주면

$$a_3 + a_5 + \dots + a_{23} + a_{24} = a_2 + 4\left(\sin^2 \frac{\pi}{24} + \dots + \sin^2 \frac{11\pi}{24}\right)$$

$$a_{24} = 12 + a_1 \text{ 이고 } \sin^2 \frac{\pi}{24} + \dots + \sin^2 \frac{11\pi}{24} = 5 + \frac{1}{2} \text{ 이므로}$$

$$a_1 + a_3 + \dots + a_{23} = \sum_{k=1}^{12} a_{2k-1} = 12 \text{ 이다.}$$

확률과 통계

60-9. ⑤

주사위를 굴려 소수가 나왔을 때 앞면이 나온 동전의 개수와 뒷면이 나온 동전의 개수가 같을 확률은

$$\frac{1}{2} \times {}_2C_1 \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

주사위를 굴려 소수가 아닌 수가 나왔을 때 앞면이 나온 동전의 개수와 뒷면이 나온 동전의 개수가 같을 확률은

$$\frac{1}{2} \times {}_4C_2 \times \left(\frac{1}{2}\right)^2 \times \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{3}{16}$$

따라서 구하고자 하는 확률은 $\frac{7}{16}$

60-10. 96

$$P(A) = \frac{a+10}{45}, P(B) = \frac{25}{45}, P(A \cap B) = \frac{10}{45} \text{ 이므로}$$

$$\frac{a+10}{45} \times \frac{25}{45} = \frac{10}{45}$$

$$\therefore a = 8, b = 12$$

$$ab = 96$$

60-11. 40

조건을 만족시키는 순서쌍 (a, b) 는

$(3, 6), (4, 6), (5, 5), (5, 6), (6, 5), (6, 6)$ 이므로

$$P(A) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}, X \sim B\left(72, \frac{1}{6}\right)$$

$$V(X) = 72 \times \frac{1}{6} \times \frac{5}{6} = 10$$

$$V(2X+4) = 40$$

60-12. ①

2개의 공이 서로 같은 색일 확률은

$$2 \times \frac{{}_4C_2}{{}_8C_2} = \frac{3}{7}$$

2개의 공이 같은 숫자가 적혀 있을 확률은

$$1 \text{ 이 적혀 있을 경우, } \frac{{}_3C_2}{{}_8C_2} = \frac{3}{28}$$

$$2 \text{ 가 적혀 있을 경우, } \frac{{}_2C_2}{{}_8C_2} = \frac{1}{28}$$

$$3 \text{ 이 적혀 있을 경우, } \frac{{}_2C_2}{{}_8C_2} = \frac{1}{28}$$

2개의 공이 서로 같은 색이면서 같은 숫자가 적혀 있을 확률은

$$\frac{{}_2C_2}{{}_8C_2} = \frac{1}{28}$$

따라서 구하고자 하는 확률은

$$\frac{3}{7} + \left(\frac{3}{28} + \frac{1}{28} + \frac{1}{28} \right) - \frac{1}{28} = \frac{4}{7}$$

미적분

60-9. 92

$$f''(x) = 2 - \frac{n}{x^2}$$

$$f''(k)f''(k+1) < 0 \text{ 이므로}$$

$$\frac{n}{(k+1)^2} < 2 < \frac{n}{k^2}$$

$$k < \sqrt{\frac{n}{2}} < k+1$$

$$\sqrt{\frac{n}{2}} > 1 \text{ 이고 자연수가 되면 안 되므로}$$

$$n \neq 1, 2, 8, 18, 32, 50, 72, 98$$

따라서 100 이하의 자연수 n 의 개수는

$$100 - 8 = 92$$

60-10. 5

(가)에서 $f(x)$ 는 기함수이므로 $f(x) = x^3 + kx$ 라 할 수 있다.

$$(나)에서 f\left(\frac{a}{2}\right) = 0, f'\left(\frac{a}{2}\right) = \frac{2}{b} \text{ 이므로}$$

$$k = -\frac{a^2}{4}, b = \frac{4}{a^2} \text{ 이다.}$$

b 가 자연수이므로 $a = 1$ 또는 $a = 2$ 이고

각각의 경우에서 $a+b$ 의 값은 5와 3이므로

$a+b$ 의 최댓값은 5이다.

60-11. 79

직선 PQ의 중점을 R이라 할 때, 직선 OR과 직선 PQ가 수직이다.

$$\text{직선 OR의 기울기가 } \tan\left(\theta + \frac{\pi}{6}\right) \text{ 이므로}$$

$$\text{직선 PQ의 기울기 } f(\theta) = -\frac{1}{\tan\left(\theta + \frac{\pi}{6}\right)} = -\cot\left(\theta + \frac{\pi}{6}\right)$$

$$f'(\theta) = \csc^2\left(\theta + \frac{\pi}{6}\right) \text{ 이므로}$$

$$f'(\alpha) = \csc^2\left(\alpha + \frac{\pi}{6}\right) = \frac{52}{27}$$

$$p+q = 79$$

60-12. ①

$$f(x) = x^2 + ax + b \text{ 라 하면,}$$

(가)에서 $g(x)$ 는 점 $(2, 0)$ 대칭이므로 $a = -4$

(나)에서 $b = 0$

직선 $y = f'(x)$ 와 곡선 $y = g(x)$ 로 둘러싸인 도형의 넓이는

$$2 \int_0^2 [f'(x)e^{f(x)} - f'(x)]dx = 2e^{-4} + 6$$

Day. 61

수학1, 수학2

61-1. ③

$$\int_1^x f(t)dt = x^3 + 3x^2 - 6x + a \text{에 } x = 1 \text{을 대입하면}$$

$$a = 2$$

$$\int_1^x f(t)dt = x^3 + 3x^2 - 6x + a \text{를 미분하면}$$

$$f(x) = 3x^2 + 6x - 6$$

$$f'(x) = 6x + 6$$

$$af'(a) = 2f'(2) = 36$$

61-2. ④

$$\overline{OC} = 4 \text{이므로 } \overline{AB} = \frac{4}{3}$$

$$\text{점 A의 } x \text{좌표가 } \frac{4}{3} \text{이므로 } k = \sqrt{3}$$

$$\text{사다리꼴 OABC의 넓이는 } \frac{8\sqrt{3}}{3} \text{이다.}$$

61-3. ④

$$\int_0^2 g(t)dt = k \text{라 하면}$$

$$f(x) = 2x + k$$

$$\text{따라서 } g(x) = \frac{1}{2}x - \frac{k}{2}$$

$$\int_0^2 \left(\frac{1}{2}x - \frac{k}{2} \right) dx = k \text{이므로}$$

$$k = \frac{1}{2}$$

$$f\left(\frac{3}{4}\right) = 2$$

61-4. ③

곡선 $y = 4^{-x} + 2^p - 16$ 이 직선 $y = 1$ 과 한 점에서 만나므로

$$2^p - 16 < 1$$

곡선 $y = \log_2(-3x + p)$ 가 직선 $x = -1$ 과 한 점에서 만나므로

$$\frac{p}{3} > -1$$

따라서 가능한 정수 p 의 값은 $-2, -1, 0, 1, 2, 3, 4$ 로 7개다.

61-5. 160

$$B = \{2a_3 - 4d, 2a_3 - 3d, \dots, 2a_3 + 4d\}$$

(가)에서 $n(A \cap B) = 3$ 이므로

$$2a_3 + 4d = a_3 \text{ 또는 } 2a_3 - 4d = a_3$$

i) $2a_3 + 4d = a_3$ 일 때,

$$a_3 = -4d$$

(나)에서 $A \cap B$ 의 모든 원소의 합은 30이므로

$$d = -2$$

$$\sum_{k=1}^{10} a_k = 30$$

ii) $2a_3 - 4d = a_3$ 일 때,

$$a_3 = 4d$$

(나)에서 $A \cap B$ 의 모든 원소의 합은 30이므로

$$d = 2$$

$$\sum_{k=1}^{10} a_k = 130$$

따라서 $\sum_{k=1}^{10} a_k$ 의 값의 합은 $30 + 130 = 160$

61-6. ②

$$\angle BAC = \angle BDC$$

삼각형 ABC와 삼각형 BCE는 닮음이므로

$$\overline{EC} = 1$$

삼각형 CDE의 외접원의 반지름의 길이 R 은

$$R = \frac{1}{2} \times \frac{\overline{EC}}{\sin(\angle BDC)} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{\frac{\sqrt{15}}{8}} = \frac{4}{\sqrt{15}} \text{ 이므로}$$

외접원의 넓이는 $\frac{16}{15}\pi$ 이다.

61-7. 15

(가)에서 함수 $h(t)$ 가 오직 한 점에서만 불연속이므로

$g(x)$ 는 $f(x)$ 의 변곡점선이다.

따라서 $f(x)$ 의 변곡점의 x 좌표는 1이다.

(나)에서 $f(3) = 0$, $f'(3) = 0$ 이므로

$$f'(x) = 3(x+1)(x-3)$$

$$f'(4) = 15$$

61-8. ③

a_5 가 최소이려면,

$$a_2 = 2^3, a_3 = 2^5, a_4 = 2^7, a_5 = 2^9$$

a_5 가 최대이려면,

$$a_2 = 2^4, a_3 = 2^7, a_4 = 2^{13}, a_5 = 2^{25}$$

따라서 구하는 값은

$$\log_2 M + \log_2 m = 25 + 9 = 34$$

확률과 통계

61-9. ⑤

구하고자 하는 경우의 수는

전체 경우의 수에서 양 끝에 서로 같은 문자가 놓이도록 나열하는 경우의 수를 뺀 것과 같다.

$$\text{양 끝에 모두 A가 놓이는 경우의 수는 } \frac{5!}{2! \times 2!} = 30$$

$$\text{양 끝에 모두 B가 놓이는 경우의 수는 } \frac{5!}{3! \times 2!} = 10$$

$$\text{양 끝에 모두 C가 놓이는 경우의 수는 } \frac{5!}{3! \times 2!} = 10$$

$$\text{전체 경우의 수는 } \frac{7!}{3! \times 2! \times 2!} = 210$$

$$\text{따라서 구하고자 하는 경우의 수는 } 210 - (30 + 10 + 10) = 160$$

61-10. ③

(가)에서 함수 $f(x)$ 는 $x = 2\sigma$ 대칭이므로 $m = 2\sigma$

(나)에서 $\frac{x + x - 2\sigma}{2} = 2\sigma$ 의 실근이 a 이므로 $a = 3\sigma$

$P(0 \leq X \leq a) = P(b \leq X \leq m) + P(0 \leq X \leq m)$ 에서

$$P(0 \leq X \leq a) - P(0 \leq X \leq m)$$

$$= P(m \leq X \leq a) = P(2\sigma \leq X \leq 3\sigma)$$

$$= P(b \leq X \leq m) = P(b \leq X \leq 2\sigma) \text{ 이므로}$$

$$b = \sigma$$

$$\frac{a}{b} = 3$$

61-11. ④

ab 가 홀수일 확률은

$$\frac{{}_4P_2 + 2 \times {}_4C_1 \times {}_2C_1 + {}_2P_2}{{}_{10}P_2} = \frac{1}{3}$$

ab 가 홀수이면서 3 이상일 확률은

$$\frac{2 \times {}_4C_1 \times {}_2C_1 + {}_2P_2}{{}_{10}P_2} = \frac{1}{5}$$

따라서 구하고자 하는 확률은

$$\frac{\frac{1}{5}}{\frac{1}{3}} = \frac{3}{5}$$

61-12. 304

먼저 A에게 사탕을 1개 주고, B에게 초콜릿을 1개 주고,
나머지 사탕과 초콜릿을 A, B, C에게 나눠주는 경우의 수는

$${}_3H_5 \times {}_3H_4 = 315 \text{ 이다.}$$

이때 A가 사탕과 초콜릿을 총합 9개를 받는 경우의 수는 4,
 총합 10개를 받는 경우의 수는 1이고,
 B가 총합 9개와 10개를 받는 경우의 수도 각각 동일하며
 C가 총합 9개를 받는 경우의 수는 1이므로
 구하고자 하는 경우의 수는
 $315 - (4 + 1 + 4 + 1 + 1) = 304$ 이다.

미적분

61-9. ③

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x + \cos x) - f(3)}{x^2 - 2x} = 2 \text{에서 } f(1) = f(3), f'(1) = -4$$

$$f(x) = a(x-1)(x-3) + C \text{라 하면}$$

$$f'(x) = a(x-1) + a(x-3)$$

$$f'(1) = -4 \text{이므로 } a = 2$$

$$f(4) - f(1) = 6$$

61-10. ③

$$(나) \text{에서 } f'(2) = 4 \text{이므로}$$

$$(가) \text{의 식에 } x = 2 \text{를 대입하면 } f(2) = 1$$

$$g(1) + g'(1) = 2 + \frac{1}{f'(2)} = 2 + \frac{1}{4} = \frac{9}{4}$$

61-11. 19

$$a_1 = a, \text{ 공비를 } r \text{이라 하면}$$

$$(가) \text{에서 } \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{이 정수값을 가지므로}$$

$$-1 < r < 1 \text{이고 } \frac{a}{1-r} \text{는 정수}$$

$$(나) \text{에서 } -3 < \frac{a}{1-r} < 4 \text{이고}$$

$$(다) \text{에서 } \frac{a}{1-r} \times \frac{r}{1+r} = \frac{5}{2} \text{이므로}$$

$$\text{가능한 } \frac{a}{1-r} \text{의 값은 } -2, -1, 1, 2, 3 \text{인데}$$

$$\frac{a}{1-r} \text{의 값이 } 1, 2, 3 \text{일 때는 (다)의 식에 대입해보면}$$

$$r \text{의 절댓값이 } 1 \text{보다 크므로}$$

$$\text{가능한 } \frac{a}{1-r} \text{의 값은 } -2, -1 \text{이다.}$$

$$(다) \text{의 식에 각각의 값을 대입해서 } r \text{과 } a \text{를 구해주면}$$

$$a \text{는 각각 } -\frac{28}{9} \text{과 } -\frac{12}{7} \text{가 나오므로}$$

$$a_1 \text{의 값의 곱은 } \frac{16}{3} \text{이다.}$$

$$\text{따라서, } p + q = 19 \text{이다.}$$

61-12. 14

함수 $f(x) = x^2 + ax + b$ 라 하면,

$$g(x) = (x^2 + ax + b)e^{-x}$$

$$g'(x) = (-x^2 + (2-a)x + a-b)e^{-x}$$

$$g''(x) = (x^2 + (a-4)x + b - 2a + 2)e^{-x}$$

(다)에서 $g(x) = 0$ 이 실근을 가지므로

$$a^2 - 4b \geq 0$$

(가)에서 $g''(3) = 0$ 이므로

$$a + b = 1$$

(나)에서 $f'(g(0)) = 0$ 또는 $g'(0) = 0$ 인데

$$g'(0) = 0 \text{이면 } a = b \text{ 이므로 } a = b = \frac{1}{2}$$

이때, $a^2 - 4b < 0$ 이므로 모순

따라서 $f'(g(0)) = 0$ 이고

$$2b + a = 0 \text{ 이므로 } a = 2, b = -1$$

따라서 $k = -1$ 이다.

$$f(5k) = f(-5) = 14$$