

백일대장

수능 역전을 위한
백일 전략서

08

정답 및 해설

Day. 50

수학1, 수학2

50-1. ⑤

점 A(0, 4)를 지나는 직선 AD의 방정식을

$y = mx + 4$ ($m < 0$)라 하자.

$\overline{AB} = \overline{BC}$ 에서 점 B의 x 좌표를 α 라 하면 점 C의 x 좌표는 2α 이다.

α 가 방정식 $\log_2 x = mx + 4$ 의 해이므로

$$\log_2 \alpha = m\alpha + 4 \quad \cdots \text{㉠}$$

2α 가 방정식 $\log_4 x = mx + 4$ 의 해이므로

$$\log_4 2\alpha = 2m\alpha + 4, \log_2 \alpha = 4m\alpha + 7 \quad \cdots \text{㉡}$$

㉠ $\times 4 -$ ㉡을 하면

$$3\log_2 \alpha = 9, \alpha = 2^3 = 8$$

$$\text{㉠에서 } 3 = 8m + 4, m = -\frac{1}{8}$$

즉, 구하는 직선 AD의 방정식은 $y = -\frac{1}{8}x + 4$ 이므로

점 D의 x 좌표는 32

$$\therefore \frac{\overline{CD}}{\overline{AB}} = \frac{32 - 2\alpha}{\alpha} = \frac{16}{8} = 2$$

50-2. ④

수열 $\{a_n\}$ 이 공차가 7인 등차수열이므로

모든 자연수 n 에 대하여

$$a_{n+1} = a_n + 7$$

이다. 따라서

$$\frac{a_m}{a_{m+1}} = \frac{a_m}{a_m + 7} = \frac{6}{7} \text{에서}$$

$$a_m = 42$$

따라서

$$a_1 + 7(m-1) = 42 \text{이므로}$$

$$a_1 + 7m = 49 \quad \cdots \text{㉠}$$

a_1, m 이 모두 자연수이므로 ㉠을 만족시키는

모든 순서쌍 (a_1, m) 은

$$(7, 6), (14, 5), (21, 4), (28, 3), (35, 2), (42, 1)$$

이므로 $a_1 + m$ 의 최솟값은 $7 + 6 = 13$ 이다.

50-3. 10

$(-3)^{n-1}$ 은 $n-1$ 이 홀수, 즉 n 이 짝수이면 음수이고

$(-3)^{n-1}$ 의 n 제곱근 중 실수인 것의 개수는 0이다.

$(-3)^{n-1}$ 은 $n-1$ 이 짝수, 즉 n 이 홀수이면 양수이고

$(-3)^{n-1}$ 의 n 제곱근 중 실수인 것의 개수는 1이다.

따라서

$$f(n) = \begin{cases} 1 & (n \text{이 홀수인 경우}) \\ 0 & (n \text{이 짝수인 경우}) \end{cases}$$

이다.

한편 2^n 은 항상 양수이므로

n 이 홀수일 때,

2^n 의 n 제곱근 중 실수인 것의 개수는 1이고,

n 이 짝수일 때,

2^n 의 n 제곱근 중 실수인 것의 개수는 2이다.

따라서

$$g(n) = \begin{cases} 1 & (n \text{이 홀수인 경우}) \\ 2 & (n \text{이 짝수인 경우}) \end{cases}$$

이므로 $f(n) \geq g(n)$ 인 경우는 n 이 홀수인 경우,

$f(n) < g(n)$ 인 경우는 n 이 짝수인 경우이다.

따라서

$$h(n) = \begin{cases} 0 & (n \text{이 홀수인 경우}) \\ 2 & (n \text{이 짝수인 경우}) \end{cases}$$

$$\therefore \sum_{n=2}^{10} h(n) = 2 + 2 + 2 + 2 + 2 = 10$$

50-4. 10

$f(x) = -x^2(x-6)$ 에서

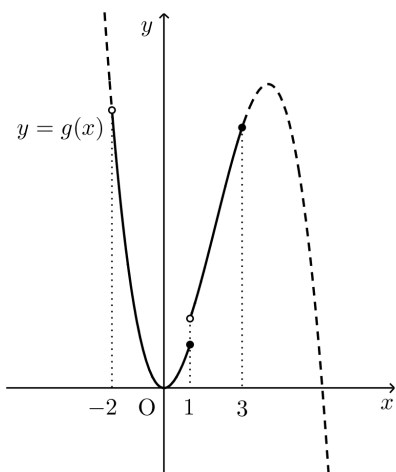
$$f'(x) = -2x(x-6) - x^2 = -3x(x-4)$$

$f'(x) = 0$ 에서 $x = 0$ 또는 $x = 4$

함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	...	0	...	4	...
$f'(x)$	-	0	+	0	-
$f(x)$	$\searrow$	0	$\nearrow$	32	$\searrow$

함수 $f(x)$ 는 $x = 0$ 일 때 극솟값 0을, $x = 4$ 일 때 극댓값 32를 갖는다. 따라서 구간 $(-2, 3]$ 에서 함수 $y = g(x)$ 의 그래프를 그리면 다음과 같다.



따라서 구간 $(-2, 3]$ 에서 함수 $g(x)$ 가 최솟값을 가지려면

$$\lim_{x \rightarrow 1+} g(x) \geq g(0)$$

$$f(1) - m \geq f(0)$$

최댓값을 갖지 않으려면

$$g(3) < g(-2) \text{에서}$$

$$f(3) - m < f(-2)$$

을 모두 만족시켜야 한다.

$$f(1) - m \geq f(0) \text{에서}$$

$$5 - m \geq 0, m \leq 5 \quad \dots \textcircled{㉠}$$

$$f(3) - m < f(-2) \text{에서}$$

$$27 - m < 32, m > -5 \quad \dots \textcircled{㉡}$$

$\textcircled{㉠}, \textcircled{㉡}$ 에 의하여

$$-5 < m \leq 5$$

따라서 모든 정수 m 의 개수는 10이다.

50-5. ③

점 P를 (t, t) ($t > 0$)라 하면 $\overline{OP} = \sqrt{2}t$ 이고

$$\overline{PQ} = \frac{\sqrt{10}}{2} \times \overline{OP} \text{이므로}$$

$$\overline{PQ} = \sqrt{5}t$$

선분 PQ의 중점을 점 M이라 하면 $M(6, 0)$ 이고

$$\overline{PM} = \frac{\sqrt{5}}{2}t$$

한편 점 P에서 x 축에 내린 수선의 발을 점 H라 하면

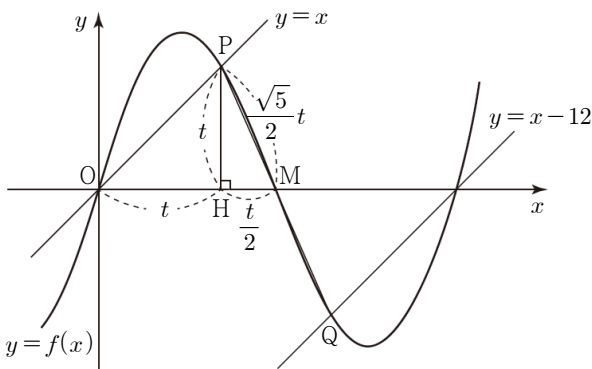
$$\overline{PH} = t \text{이므로}$$

$$\overline{HM} = \sqrt{\frac{5}{4}t^2 - t^2} = \frac{t}{2} \text{이다.}$$

따라서 $t = 4$ 이고 $f(4) = 4$ 이므로

$$f(4) = a \sin \frac{2}{3}\pi = 4$$

$$\therefore a = \frac{8}{3}\sqrt{3}$$



50-6. ③

$f(x)$ 의 최고차항의 계수가 1이고 $f(2) = 0$ 이므로

$f(x) = (x-2)(x^2 + ax + b)$ 로 놓을 수 있다.

$f(x)$ 를 미분하면

$$f'(x) = (x^2 + ax + b) + (x-2)(2x+a)$$

이고 $f'(2) = 0$ 이므로

$$4 + 2a + b = 0 \quad \therefore b = -2a - 4$$

따라서

$$\begin{aligned} f'(x) &= (x-2)(x+a+2) + (x-2)(2x+a) \\ &= (x-2)(3x+2a+2) \end{aligned}$$

이고

$$\begin{aligned} g(x) &= (x+2)f'(x) \\ &= (x+2)(x-2)(3x+2a+2) \end{aligned}$$

이다. 이때 함수 $|g(x)|$ 가 $x=t$ 에서 미분가능하지 않은 실수 t 의 개수가 1이 되려면 $g(x)$ 가 $(x+2)^2$ 을 인수로 가지거나 $(x-2)^2$ 을 인수로 가져야 한다.

i) $g(x)$ 가 $(x+2)^2$ 을 인수로 가지는 경우

$$3 \cdot (-2) + 2a + 2 = 0 \text{에서 } a = 2$$

$$f(x) = (x-2)(x^2 + 2x - 8) \text{이므로}$$

$$f(1) = 5$$

ii) $g(x)$ 가 $(x-2)^2$ 을 인수로 가지는 경우

$$3 \cdot 2 + 2a + 2 = 0 \text{에서 } a = -4$$

$$f(x) = (x-2)(x^2 - 4x + 4) \text{이므로}$$

$$f(1) = -1$$

i), ii)에 의하여 $f(1)$ 의 최댓값은 5이다.

50-7. 45

$\angle ADM = \alpha$ 라 하자. $\left(0 < \alpha < \frac{\pi}{2}\right)$

$\overline{AM} = \overline{DM}$ 이므로

$$\angle AMD = \pi - 2\alpha$$

두 삼각형 ABM 과 DCM 이 서로 합동이므로

$$\angle AMB = \angle DMC = \alpha$$

이때 $\angle DPA = \angle MPC$ 이므로

삼각형 ADP 와 삼각형 CMP 는 서로 닮음이다.

따라서

$$\frac{\overline{AD}}{\overline{DP}} = \frac{\overline{CM}}{\overline{MP}} \text{이므로}$$

$$\overline{AD} = 3\overline{CM}$$

$$\overline{AB} = \overline{BM} = \overline{CM} = \overline{CD} = 3a, \quad \overline{AD} = a \text{라 하자.}$$

$$\overline{AM} = \overline{DM} = 4 \text{이고}$$

삼각형 ABM 과 삼각형 AMD 가 서로 닮음이므로

$$\frac{\overline{AM}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{AD}}{\overline{AM}}, \quad \frac{4}{3a} = \frac{a}{4}$$

$$\therefore a = \frac{4\sqrt{3}}{3}$$

한편 $\angle AMD = \beta$ 라 하자.

삼각형 AMD 에서 코사인법칙에 의하여

$$\cos \beta = \frac{16 + 16 - \frac{16}{3}}{2 \cdot 4 \cdot 4} = \frac{5}{6}$$

삼각형 AMP 에서 코사인법칙에 의하여

$$\cos\beta = \frac{16+9-\overline{AP}^2}{2 \cdot 4 \cdot 3} = \frac{5}{6}$$

$$\therefore \overline{AP} = \sqrt{5}$$

삼각형 ADP와 삼각형 CMP는 서로 닮음이고

$$\overline{PC} : \overline{PA} = 3 : 1 \text{ 이므로}$$

$$\overline{PC} = 3\overline{AP} = 3\sqrt{5}$$

$$\therefore \overline{PC}^2 = 45$$

50-8. 150

조건 (가)에서 $f(0) = 0$, $f(1) = 1$

$$\lim_{h \rightarrow 0-} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = 1 \text{ 이고}$$

$f(x)$ 가 실수 전체의 집합에서 미분가능하므로

$f'(1)$ 의 값이 존재하고,

$$f'(1) = \lim_{h \rightarrow 0-} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = 1$$

이다. 조건 (나)의 식의 양변에 $x = 0$ 을 대입하면

$$g(0) = f(1) = 1 \quad \cdots \textcircled{㉠}$$

이므로

$$f(x+1) - f(1) - xf(x) = g(x) - g(0)$$

$$\frac{f(1+x) - f(1)}{x} - f(x) = \frac{g(x) - g(0)}{x}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left\{ \frac{f(1+x) - f(1)}{x} - f(x) \right\} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{g(x) - g(0)}{x}$$

$$f'(1) - f(0) = g'(0)$$

$$\therefore g'(0) = 1 \quad \cdots \textcircled{㉡}$$

$g(x) = ax^2 + bx + c$ 라 할 때,

$$g'(x) = 2ax + b$$

이고 ㉠, ㉡에 의하여

$$b = 1, c = 1$$

$$\therefore g(x) = ax^2 + x + 1$$

조건 (나)에서 $0 \leq x \leq 1$ 에서

$$f(x+1) = xf(x) + g(x)$$

이므로

$$f(x+1) = (a+1)x^2 + x + 1$$

이다. 따라서 $1 \leq x \leq 2$ 에서

$$f(x) = (a+1)(x-1)^2 + x$$

이므로 $1 < x < 2$ 에서

$$f'(x) = 2(a+1)(x-1) + 1$$

$f(x)$ 가 $x = 2$ 에서 미분가능하므로

$$f'(2) = 2(a+1) + 1 = 7$$

$$\therefore a = 2$$

$$f(x) = \begin{cases} x & (0 \leq x \leq 1) \\ 3x^2 - 5x + 3 & (1 < x \leq 2) \end{cases}$$

따라서

$$\int_1^2 f(x) dx = \int_1^2 (3x^2 - 5x + 3) dx$$

$$\begin{aligned}
 &= \left[x^3 - \frac{5}{2}x^2 + 3x \right]_1^2 \\
 &= 4 - \frac{3}{2} = \frac{5}{2} \\
 \therefore 60 \times \int_1^2 f(x) dt &= 60 \times \frac{5}{2} = 150
 \end{aligned}$$

확률과 통계

50-9. ⑤

5일 동안의 점심 식사 메뉴를 정하는 경우의 수는

i) 한 메뉴가 3번, 나머지 두 메뉴가 각각 1번인 경우

3번 들어가는 메뉴를 정하는 경우의 수는

$${}_3C_1 = 3$$

3번 들어가는 메뉴를 A라 하고, 나머지 두 메뉴를 각각 B, C라 하면, 5일 동안의 메뉴를 정하는 경우의 수는 A, A, A, B, C를 일렬로 나열하는 경우의 수와 같다. 따라서 구하는 경우의 수는

$$3 \times \frac{5!}{3!} = 60$$

ii) 두 메뉴가 각각 2번, 나머지 한 메뉴가 1번인 경우

2번 들어가는 두 메뉴를 정하는 경우의 수는

$${}_3C_2 = 3$$

2번 들어가는 두 메뉴를 각각 A, B라 하고, 나머지 한 메뉴를 C라 하면, 5일 동안의 메뉴를 정하는 경우의 수는 A, A, B, B, C를 일렬로 나열하는 경우의 수와 같다. 따라서 구하는 경우의 수는

$$3 \times \frac{5!}{2!2!} = 90$$

i), ii)에 의하여 구하는 경우의 수는 $60 + 90 = 150$

50-10. 103

$Y = \frac{X+2}{3}$ 로 놓으면

$$P(Y=n) = {}_{10}C_n \times \left(\frac{1}{2}\right)^n \left(\frac{1}{2}\right)^{10-n}$$

따라서 확률변수 Y 는 이항분포 $B\left(10, \frac{1}{2}\right)$ 을 따른다.

$$E(Y) = 10 \times \frac{1}{2} = 5,$$

$$V(Y) = 10 \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{5}{2} \text{에서}$$

$$\begin{aligned}
 E(Y) &= E\left(\frac{X+2}{3}\right) \\
 &= \frac{1}{3}E(X) + \frac{2}{3} = 5
 \end{aligned}$$

이므로 $E(X) = 13$

$$V(Y) = V\left(\frac{X+2}{3}\right) = \frac{1}{9} V(X) \text{에서}$$

$$V(Y) = \frac{5}{2} \text{이므로}$$

$$V(X) = \frac{45}{2}$$

$$V(2X) = 4V(X) = 90$$

$$\therefore E(X) + V(2Y) = 13 + 90 = 103$$

50-11. 53

a 는 2, 3, 4, 5가 될 수 있으므로 각각의 경우로 나누어 순서쌍을 구하면

i) $a=2$ 인 경우

$$2 \leq b \leq c \leq 5 \text{이고}$$

d 가 될 수 있는 수는 6, 8, 10이므로

10 이하의 자연수 b, c, d 의 모든 순서쌍 (b, c, d) 의 개수는

$$\begin{aligned} {}_4H_2 \times {}_3C_1 &= {}_5C_2 \times {}_3C_1 \\ &= 10 \times 3 = 30 \end{aligned}$$

ii) $a=3$ 인 경우

$$3 \leq b \leq c \leq 5 \text{이고}$$

d 가 될 수 있는 수는 7, 9이므로

10 이하의 자연수 b, c, d 의 모든 순서쌍 (b, c, d) 의 개수는

$$\begin{aligned} {}_3H_2 \times {}_2C_1 &= {}_4C_2 \times {}_2C_1 \\ &= 6 \times 2 = 12 \end{aligned}$$

iii) $a=4$ 인 경우

$$4 \leq b \leq c \leq 5 \text{이고}$$

d 가 될 수 있는 수는 6, 8, 10이므로

10 이하의 자연수 b, c, d 의 모든 순서쌍 (b, c, d) 의 개수는

$$\begin{aligned} {}_2H_2 \times {}_3C_1 &= {}_3C_2 \times {}_3C_1 \\ &= 3 \times 3 = 9 \end{aligned}$$

iv) $a=5$ 인 경우

$$b=c=5 \text{이고}$$

d 가 될 수 있는 수는 7, 9이므로

10 이하의 자연수 b, c, d 의 모든 순서쌍 (b, c, d) 의 개수는
2

i)~iv)에 의하여 10 이하의 자연수 a, b, c, d 의 모든 순서쌍 (a, b, c, d) 의 개수는

$$30 + 12 + 9 + 2 = 53$$

50-12. ①

주머니 B에서 꺼낸 공에 적힌 수가 짝수인 사건을 X , 주머니 A에서 꺼낸 공에 적힌 수가 홀수인 사건을 Y 라 하면 구하는 확률은 $P(Y|X)$ 이다.

i) 주머니 A에서 꺼낸 공에 적힌 수는 홀수이고, 주머니 B에서 꺼낸 공에 적힌 수에 짝수인 확률은

$$P(X \cap Y) = \frac{3}{5} \times \frac{1}{2} = \frac{3}{10}$$

ii) 주머니 A에서 꺼낸 공에 적힌 수는 짝수이고, 주머니 B에서

꺼낸 공에 적힌 꺼낸 공에 적힌 수가 짝수일 확률은

$$P(X \cap Y^C) = \frac{2}{5} \times \frac{2}{3} = \frac{4}{15}$$

i), ii)에 의하여

$$P(X) = P(X \cap Y) + P(X \cap Y^C) = \frac{3}{10} + \frac{4}{15} = \frac{17}{30}$$

따라서 구하는 확률은

$$P(Y|X) = \frac{P(X \cap Y)}{P(X)} = \frac{\frac{3}{10}}{\frac{17}{30}} = \frac{9}{17}$$

미적분

50-9. 16

$$x = \frac{t^2}{2} + t - 4 \ln(t+1), \quad y = 4t + 1 \text{에서}$$

$$\frac{dx}{dt} = t + 1 - \frac{4}{t+1},$$

$$\frac{dy}{dt} = 4$$

좌표평면 위를 움직이는 점 P의 시각 t 에서의 속력은

$$\begin{aligned} \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} &= \sqrt{\left(t+1 - \frac{4}{t+1}\right)^2 + 4^2} \\ &= t+1 + \frac{4}{t+1} \\ &\geq 2\sqrt{(t+1) \times \frac{4}{t+1}} = 4 \end{aligned}$$

(단, 등호는 $t+1 = \frac{4}{t+1}$, 즉 $t=1$ 일 때 성립한다.)

따라서 점 P의 속력은 $t=1$ 일 때 최소이므로 $t=0$ 에서 $t=1$ 까지 점 P가 움직인 거리 l 은

$$\begin{aligned} l &= \int_0^1 \left(t+1 + \frac{4}{t+1}\right) dt \\ &= \left[\frac{t^2}{2} + t + 4 \ln(t+1)\right]_0^1 \\ &= \frac{3}{2} + 4 \ln 2 \end{aligned}$$

$$l - \frac{3}{2} = 4 \ln 2$$

$$\therefore e^{l - \frac{3}{2}} = e^{4 \ln 2} = 2^4 = 16$$

50-10. ③

함수 $f(x) = \ln x$ 의 그래프를 y 축에 대하여 대칭이동한

그래프는 함수 $y = \ln(-x)$ 의 그래프이고, 이 함수의 그래프를 x 축의 방향으로 m 만큼 평행이동한 그래프는

함수 $y = \ln(-x+m)$ 의 그래프이다. 따라서

$$g(x) = \ln(-x+m)$$

직선 $y=t$ 와 곡선 $y=f(x)$ 가 만나는 점의 x 좌표는

$t=\ln x$ 에서 $x=e^t$ 에서 e^t 이므로

이므로 $P(e^t, t)$ 이고,

직선 $y=t$ 와 곡선 $y=g(x)$ 가 만나는 점의 x 좌표는

$t=\ln(-x+m)$ 에서

$e^t=-x+m$, $x=-e^t+m$ 에서 $-e^t+m$ 이므로

이므로 $Q(-e^t+m, t)$

$f'(x)=\frac{1}{x}$ 이므로 점 P 에서 곡선 $y=f(x)$ 에 접하는 접선의

기울기는 $\frac{1}{e^t}$ 이고,

$g'(x)=\frac{-1}{-x+m}=\frac{1}{x-m}$ 이므로 점 Q 에서 곡선

$y=g(x)$ 에 접하는 접선의 기울기는 $-\frac{1}{e^t}$ 이다.

따라서 기울기가 각각 $\frac{1}{e^t}$, $-\frac{1}{e^t}$ 인 두 직선이 이루는 예각의

크기가 $\frac{\pi}{3}$ 이 되려면

i) 기울기가 $\frac{1}{e^t}$ 인 직선과 x 축의 양의 방향이 이루는 예각의

크기가 $\frac{\pi}{6}$ 인 경우 $\frac{1}{e^t}=\tan\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{3}$ 이므로

$$e^t=\sqrt{3}, t=\frac{1}{2}\ln 3$$

ii) 기울기가 $\frac{1}{e^t}$ 인 직선과 x 축의 양의 방향이 이루는 예각의

크기가 $\frac{\pi}{3}$ 인 경우 $\frac{1}{e^t}=\tan\frac{\pi}{3}=\sqrt{3}$ 이므로

$$e^t=\frac{1}{\sqrt{3}}, t=-\frac{1}{2}\ln 3$$

i), ii)에서 모든 t 의 값의 합은

$$\frac{1}{2}\ln 3 - \frac{1}{2}\ln 3 = 0$$

50-11. ④

직선 OA_n 의 방정식이 $y=t^{n-1}x$ 이므로

$$S(t)=\int_0^t (t^{n-1}x-x^n)dx$$

$$=\left[t^{n-1}\cdot\frac{x^2}{2}-\frac{x^{n+1}}{n+1}\right]_0^t$$

$$=\frac{t^{n+1}}{2}-\frac{t^{n+1}}{n+1}$$

$$=\frac{(n-1)t^{n+1}}{2(n+1)}$$

$$a_n=\lim_{t\rightarrow 0+}\frac{S(t)}{t^{n+2}+t^{n+1}}$$

$$=\lim_{t\rightarrow 0+}\frac{(n-1)t^{n+1}}{2(n+1)(t^{n+2}+t^{n+1})}$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{t \rightarrow 0+} \frac{(n-1)}{2(n+1)(t+1)} \\
&= \frac{(n-1)}{2(n+1)} \\
a_2 \times a_3 \times \cdots \times a_8 \\
&= \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3}\right) \times \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{4}\right) \times \cdots \times \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{7}{9}\right) \\
&= \frac{1}{2^7} \left(\frac{1}{3} \times \frac{2}{4} \times \cdots \times \frac{7}{9}\right) \\
&= \frac{1}{2^7} \times \left(1 \times 2 \times \frac{1}{8} \times \frac{1}{9}\right) = \frac{1}{2^9} \times \frac{1}{3^2} \\
\therefore \sum_{n=2}^8 \log_{\frac{1}{2}} a_n &= \log_{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{2^9} \times \frac{1}{3^2}\right) \\
&= \log_{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{2}\right)^9 + \log_{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{3}\right)^2 \\
&= 9 + 2\log_2 3
\end{aligned}$$

50-12. ④

함수 $h(x)$ 가 $x=0$ 에서 연속이므로

$$\lim_{x \rightarrow 0-} h(x) = f(0)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0+} h(x) = h(0) = g(0) \text{에서}$$

$$f(0) = g(0)$$

$$f(0) = a+b, g(0) = 0 \text{이므로}$$

$$a+b=0$$

$$\therefore a = -b$$

함수 $h(x)$ 가 $x=0$ 에서 미분가능하므로 $h'(0)$ 의 값이 존재한다.

$f(x), g(x)$ 가 모두 미분가능한 함수이므로

$$f'(0) = g'(0)$$

이다.

$$f(x) = (x+a)e^x - a \text{에서}$$

$$f'(x) = (x+a+1)e^x$$

$$g(x) = \int_0^x xf(x-t)dt \text{에서 } x-t=s \text{로 놓으면}$$

$-dt = ds$ 이고, $t=0$ 일 때, $s=x$, $t=x$ 일 때, $s=0$ 이므로

$$\begin{aligned}
\int_0^x xf(x-t)dt &= - \int_x^0 xf(s)ds \\
&= x \int_0^x f(s)ds
\end{aligned}$$

$$g'(x) = \int_0^x f(s)ds + xf(x)$$

이므로

$$g'(0) = 0$$

$$\therefore f'(0) = a+1 = 0 \text{이므로 } a = -1$$

$$\therefore f(x) = (x-1)e^x + 1$$

따라서

$$\begin{aligned}
g(x) &= x \int_0^x f(s) ds \\
&= x \int_0^x \{(s-1)e^s + 1\} dx \\
&= x \left\{ \left[(s-1)e^s \right]_0^x - \int_0^x e^s ds + \left[s \right]_0^x \right\} \\
&= x \left\{ (x-1)e^x + 1 - \left[e^s \right]_0^x + x \right\} \\
&= x \{ (x-2)e^x + x + 2 \} \\
&= (x^2 - 2x)e^x + x^2 + 2x
\end{aligned}$$

따라서 구하는 값은

$$\begin{aligned}
&\int_0^3 g(x) dx \\
&= \int_0^3 \{ (x^2 - 2x)e^x + x^2 + 2x \} dx \\
&= \left[(x^2 - 2x)e^x \right]_0^3 - \int_0^3 (2x - 2)e^x dx + \left[\frac{x^3}{3} + x^2 \right]_0^3 \\
&= 3e^3 - \left[(2x - 2)e^x \right]_0^3 + \int_0^3 2e^x dx + 18 \\
&= 3e^3 - (4e^3 + 2) + \left[2e^x \right]_0^3 + 18 \\
&= -e^3 + 16 + (2e^3 - 2) \\
&= e^3 + 14
\end{aligned}$$

Day. **51**

수학1, 수학2

51-1. ⑤

$f(x) = -2x^3 + 9x^2 - 4$ 에서

$$f'(x) = -6x^2 + 18x = -6x(x-3)$$

$x=0, x=3$ 일 때, $f'(x)=0$

닫힌구간 $[-1, 4]$ 에서 함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	-1	...	0	...	3	...	4
$f'(x)$		-	0	+	0	-	
$f(x)$	7	$\searrow$	-4	$\nearrow$	23	$\searrow$	12

따라서 닫힌구간 $[-1, 4]$ 에서 함수 $f(x)$ 의 최댓값은 23,

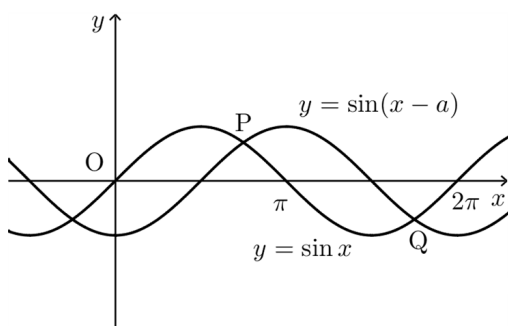
최솟값은 -4이므로 $M=23, m=-4$

$$\therefore M+m=23-4=19$$

51-2. ③

함수 $y = \sin(x-a)$ 의 그래프는 함수 $y = \sin x$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 a 만큼 평행이동한 것이다. 두 함수 $y = \sin x$,

$y = \sin(x - a)$ 의 그래프를 그리면 다음과 같다.



두 함수 $y = \sin x$, $y = \sin(x - a)$ 의 그래프는 두 점 $P(t, \sin t)$, $Q(s, \sin s)$ 에서 만난다. (단, $\frac{\pi}{2} < t < \pi$,

$$\frac{3}{2}\pi < s < 2\pi)$$

두 곡선 $y = \sin x$, $y = \sin(x - a)$ 가 직선 $x = t$ 에 대하여 대칭이다.

따라서 $0 < x < \pi$ 에서 함수 $y = \sin x$ 가 최대가 되는 x 인 $\frac{\pi}{2}$ 와 $a < x < \pi + a$ 에서 함수 $y = \sin(x - a)$ 가 최대가 되는 x 인 $\frac{\pi}{2} + a$ 의 값의 합이 $2t$ 이므로

$$\frac{\pi}{2} + \left(\frac{\pi}{2} + a\right) = 2t$$

$$\text{에서 } t = \frac{a}{2} + \frac{\pi}{2}$$

또한 두 곡선 $y = \sin x$, $y = \sin(x - a)$ 가 직선 $x = s$ 에 대하여 대칭이다.

따라서 $\pi < x < 2\pi$ 에서 함수 $y = \sin x$ 가 최소가 되는 x 인 $\frac{3\pi}{2}$ 와

$\pi + a < x < 2\pi + a$ 에서 함수 $y = \sin(x - a)$ 가 최소가 되는 x 인 $\frac{3\pi}{2} + a$ 의 값의 합이 $2s$ 이므로

$$\frac{3\pi}{2} + \left(\frac{3\pi}{2} + a\right) = 2s$$

$$\text{에서 } s = \frac{a}{2} + \frac{3\pi}{2}$$

이때 t, s 는 $0 \leq x \leq 2\pi$ 에서 방정식 $\sin x = \sin(x - a)$ 의 모든 해이므로

$$t + s = \frac{a}{2} + \frac{\pi}{2} + \frac{a}{2} + \frac{3}{2}\pi = \frac{5}{2}\pi$$

$$\therefore a = \frac{\pi}{2}$$

51-3. ④

시각 t 에서의 점 P 의 속도를 $v(t)$,

시각 t 에서의 점 P 의 위치를 $x(t)$ 라 하면

$$v(t) = \int a(t)dt = -3t^2 + 4t + C_1 \quad (\text{단, } C_1 \text{은 적분상수})$$

$$x(t) = \int v(t)dt = -t^3 + 2t^2 + C_1t + C_2 \quad (\text{단, } C_2 \text{는 적분상수})$$

시각 $t=1$ 에서의 점 P의 위치와 속도가 같으므로

$$v(1) = x(1) \text{에서}$$

$$1 + C_1 = 1 + C_1 + C_2 \quad \therefore C_2 = 0 \quad \cdots \textcircled{7}$$

$$v(2) = x(2) \text{에서}$$

$$-4 + C_1 = 2C_1 \text{이므로 } \textcircled{7} \text{을 대입하면 } C_1 = -4$$

$$\text{따라서 } x(t) = -t^3 + 2t^2 - 4t$$

$$\therefore x(4) = -64 + 32 - 16 = -48$$

51-4. 248

수열 $\{na_n\}$ 의 제1항부터 제 n 항까지의 합을 S_n 이라 하면

$$\sum_{k=1}^n ka_k = S_n \text{이고,}$$

$$S_n = 8(n \cdot 2^n - 2^n + 1) \text{이다.}$$

$$n=1 \text{일 때, } a_1 = 8(1 \cdot 2 - 2 + 1) = 8$$

$$n \geq 2 \text{일 때,}$$

$$na_n = S_n - S_{n-1}$$

$$= 8(n \cdot 2^n - 2^n + 1) - 8\{(n-1) \cdot 2^{n-1} - 2^{n-1} + 1\}$$

$$= 8\{(2n - n + 1)2^{n-1} - 2^{n-1}\}$$

$$= 8 \times n \times 2^{n-1}$$

$$= n \cdot 2^{n+2}$$

$$\therefore a_n = 2^{n+2}$$

따라서 모든 자연수 n 에 대하여

$$a_n = 2^{n+2} \text{이므로 구하는 값은}$$

$$\sum_{n=1}^5 a_n = \sum_{n=1}^5 2^{n+2} = \frac{8(2^5 - 1)}{2 - 1} = 248$$

51-5. 8

$$\lim_{x \rightarrow -1-} f(x) = -1 + 3k,$$

$$\lim_{x \rightarrow -1+} f(x) = f(-1) = 5 + k$$

에서 함수 $f(x)$ 가 $x = -1$ 에서 연속이면

$$\lim_{x \rightarrow -1-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1+} f(x) = f(-1)$$

$$\text{에서 } -1 + 3k = 5 + k, \quad k = 3$$

즉, $k = 3$ 이면 함수 $f(x)$ 는 실수 전체의 집합에서 연속이고

$$\lim_{x \rightarrow -1-} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow -1+} f(x) = f(-1)$$

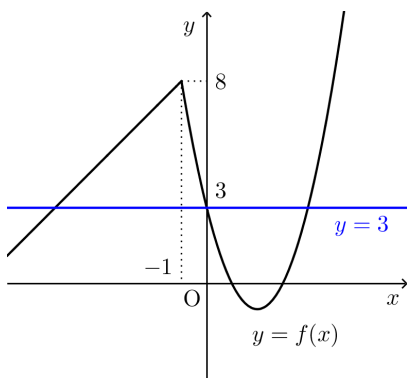
에서 $k \neq 3$ 이면 함수 $f(x)$ 는 $x = -1$ 에서 불연속이다.

i) $k = 3$ 인 경우

$$f(x) = \begin{cases} x+9 & (x < -1) \\ x^2 - 4x + 3 & (x \geq -1) \end{cases}$$

이고 함수 $(f \circ g)(x)$ 는 실수 전체의 집합에서 연속이다.

이때, 방정식 $f(x) = 3$ 의 실근의 개수는 그림과 같이 3이다.



ii) $k \neq 3$ 인 경우

함수 $(f \circ g)(x)$ 가 실수 전체의 집합에서 연속이려면 모든 실수 m 에 대하여

$$\lim_{x \rightarrow m+} (f \circ g)(x) = \lim_{x \rightarrow m-} (f \circ g)(x) = (f \circ g)(m)$$

... ㉠

이차함수 $g(x)$ 의 치역이 $\{y \mid y \geq -k^2\}$ 이고, $g(x)$ 가 $x=0$ 에서 최솟값 $-k^2$ 을 가지므로 ㉠은 $m \neq 0$ 일 때,

$$\lim_{x \rightarrow g(m)+} f(x) = \lim_{x \rightarrow g(m)-} f(x) = f(g(m)) \quad \dots \text{㉡}$$

(단, $g(m) > -k^2$)이고 $m=0$ 일 때,

$$\lim_{x \rightarrow -k^2+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -k^2+} f(x) = f(-k^2) \quad \dots \text{㉢}$$

㉡, ㉢을 모두 만족시키려면

$-k^2 \geq -1$ 이 되어야 한다.

따라서 $-1 \leq k \leq 1$

이때 $\lim_{x \rightarrow -1-} f(x) = -1 + 3k$,

$$\lim_{x \rightarrow -1+} f(x) = f(-1) = 5 + k$$

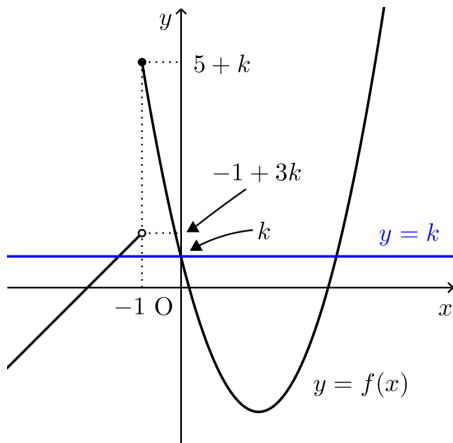
에서 $-1 \leq k \leq 1$ 일 때, $-1 + 3k \leq 5 + k$

즉, $\lim_{x \rightarrow -1-} f(x) \leq \lim_{x \rightarrow -1+} f(x) = f(-1)$ 이고

$x \geq -1$ 에서 $f(x)$ 의 최솟값이 $k-4$ 이므로

방정식 $f(x) = k$ 의 서로 다른 실근의 개수가 3이 되려면 그림과 같이

$k-4 < k < -1+3k$ 에서 $\frac{1}{2} < k \leq 1$ 이 되어야 한다.



i), ii)에 의하여 조건을 만족시키는 실수 k 의 값의 범위가

$$k=3 \text{ 또는 } \frac{1}{2} < k \leq 1$$

$$\therefore \frac{a+c}{b} = \frac{3+1}{\frac{1}{2}} = 8$$

51-6. 135

조건 (가)에서 방정식 $f(x) = 0$ 의 실근이 0, 1 뿐이므로

$$f(x) = ax^2(x-1) \text{ 또는}$$

$$f(x) = ax(x-1)^2 \text{이다. (단, } a \neq 0 \text{)}$$

$g'(x) = f(x)$ 이고 $g(x)$ 가 최솟값을 가지므로 $a > 0$ 이다.

$g(1) = 0$ 임을 이용하여

$f(x) = ax^2(x-1)$ 또는 $f(x) = ax(x-1)^2$ 일 때 각각 함수 $g(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

i) $g'(x) = f(x) = ax^2(x-1)$ 일 때,

x	...	0	...	1	...
$g'(x)$	-	0	-	0	+
$g(x)$	$\searrow$		$\searrow$	0	$\nearrow$

함수 $g(x)$ 는 $x=1$ 에서 극소이자 최소이고, $g(x)$ 의 최솟값이 0이므로 조건을 만족시키지 않는다.

ii) $g'(x) = f(x) = ax(x-1)^2$ 일 때,

x	...	0	...	1	...
$g'(x)$	-	0	+	0	+
$g(x)$	$\searrow$	최소	$\nearrow$	0	$\nearrow$

함수 $g(x)$ 는 $x=0$ 에서 극소이자 최소이고 최솟값이 -1 이려면

$$g(0) = \int_1^0 f(x) dx = -1,$$

$$\int_0^1 f(x) dx = 1 \text{ 이므로}$$

$$\begin{aligned} \int_0^1 f(x) dx &= \int_0^1 ax(x-1)^2 dx \\ &= \int_0^1 (ax^3 - 2ax^2 + ax) dx \\ &= \left[\frac{a}{4}x^4 - \frac{2}{3}ax^3 + \frac{a}{2}x^2 \right]_0^1 \\ &= \frac{a}{12} = 1 \end{aligned}$$

$$\therefore a = 12$$

$$\begin{aligned} g(-2) &= \int_1^{-2} (12x^3 - 24x^2 + 12x) dx \\ &= -12 \int_{-2}^1 (x^3 - 2x^2 + x) dx \\ &= -12 \left[\frac{1}{4}x^4 - \frac{2}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 \right]_{-2}^1 \\ &= -12 \left(\frac{1}{12} - \frac{34}{3} \right) = 135 \end{aligned}$$

51-7. ③

두 점 A, B의 좌표를 각각 $(t, 3t+1)$, $(s, 3s+1)$
 $(0 < t < s)$

라 하자.

$$\begin{aligned}\overline{AB} &= \sqrt{(s-t)^2 + (3s-3t)^2} \\ &= \sqrt{10} |s-t| = 2\sqrt{10}\end{aligned}$$

이므로 $|s-t|=2$

$s > t$ 이므로 $s=t+2$

따라서 $A(t, 3t+1)$, $B(t+2, 3t+7)$ 로 놓을 수 있다.

한편 곡선 $y=a^x$ 는 곡선 $y=a^{x+1}+1$ 을 x 축의 방향으로 1만큼, y 축의 방향으로 -1 만큼 평행이동한 것이다.

따라서 점 $B'(t+3, 3t+6)$ 은 선분 BC와 곡선 $y=a^x$ 위에 있다.

이때 두 곡선 $y=a^x$, $y=\log_a x$ 는 직선 $y=x$ 에 대하여 대칭이다.

따라서 두 점 $B'(t+3, 3t+6)$, C가 직선 $y=x$ 에 대하여 대칭이므로

$$C(3t+6, t+3)$$

직선 AC가 x 축과 평행하므로

점 A의 y 좌표와 점 C의 y 좌표가 같다.

$$\therefore 3t+1=t+3, t=1$$

따라서 $A(1, 4)$, $B(3, 10)$, $C(9, 4)$ 이다.

한편 점 A를 x 축의 방향으로 1만큼, y 축의 방향으로 -1 만큼 평행이동한 점을 $A'(2, 3)$ 이라 하면

점 A'는 곡선 $y=a^x$ 위에 있고 $\overline{A'B'}=2\sqrt{10}$ 이다.

곡선 $y=\log_a x$ 위의 두 점 C, D에 대하여

$\overline{CD}=2\sqrt{10}$ 이고 두 점 B', C가 직선 $y=x$ 에 대하여 대칭이므로 두 점 A'(2, 3), D가 직선 $y=x$ 에 대하여 대칭이다. 따라서 $D(3, 2)$

점 $A(1, 4)$ 가 곡선 $y=a^{x+1}+1$ 위에 있으므로

$$4=a^2+1 \text{에서 } a=\sqrt{3}$$

한편, 사각형 ABCD는 직선 AD와 직선 BC가 평행한 사다리꼴이다.

직선 AD의 방정식은 $y=-x+5$ 이고

직선 $y=-x+5$, 즉 $x+y-5=0$ 과 점 $B(3, 10)$ 사이의 거리는

$$\frac{|3+10-5|}{\sqrt{1+1}}=4\sqrt{2}$$

$$\overline{AD}=2\sqrt{2}, \overline{BC}=6\sqrt{2} \text{이므로}$$

사다리꼴 ABCD의 넓이는

$$\frac{1}{2} \times (2\sqrt{2}+6\sqrt{2}) \times 4\sqrt{2}=32$$

$$\therefore a \times S=32\sqrt{3}$$

51-8. ②

조건에서 수열 $\{a_n\}$ 의 모든 항은 자연수가 되어야 한다.

또한

$$a_n = \begin{cases} 2^{a_{n+1}} & (2^{a_{n+1}} \leq 100 + 2(n-1)) \\ a_{n+1} - 2 & (\log_2(a_{n+1} - 2) \text{이 자연수가 아니고 } a_{n+1} > 2) \end{cases}$$

i) $\log_2 a_7$ 이 자연수인 경우

$a_8 = \log_2 a_7$ 이고 이때

두 자연수 a_7, a_8 의 모든 순서쌍 (a_7, a_8) 은

$(2, 1), (4, 2), (8, 3), (16, 4)$

이므로 $a_7 + a_8 = 20$ 을 만족시키는 경우는

$$a_7 = 16, a_8 = 4$$

a_1 이 100 이하의 자연수이므로 $a_6 \leq 110$ 따라서

$$a_6 = a_7 - 2 = 14$$

a_1 이 100 이하의 자연수이므로 $a_5 \leq 108$ 따라서

$$a_5 = a_6 - 2 = 12$$

a_1 이 100 이하의 자연수이므로 $a_4 \leq 106$ 따라서

$$a_4 = a_5 - 2 = 10$$

a_1 이 100 이하의 자연수이므로 $a_3 \leq 104$ 따라서

$$a_3 = a_4 - 2 = 8$$

그런데 $a_3 = 8$ 이 될 수 없으므로 $\log_2 a_7$ 이 자연수이고

$a_7 + a_8 = 20$ 인 경우는 존재하지 않는다.

ii) $\log_2 a_7$ 이 자연수가 아닌 경우

$$a_8 = a_7 + 2$$

$$a_7 + a_8 = 2a_7 + 2 = 20$$

에서 $a_7 = 9, a_8 = 11$

a_1 이 100 이하의 자연수이므로 $a_6 \leq 110$ 따라서

$$a_6 = a_7 - 2 = 7$$

a_1 이 100 이하의 자연수이므로 $a_5 \leq 108$ 따라서

$$a_5 = a_6 - 2 = 5$$

a_1 이 100 이하의 자연수이므로 $a_4 \leq 106$ 따라서

$$a_4 = 2^{a_5} = 32 \text{ 또는 } a_4 = a_5 - 2 = 3$$

$$a_3 \leq 104, a_2 \leq 102, a_1 \leq 100$$

인 조건을 이용하여 $a_4 = 32$ 또는 $a_4 = 3$ 일 때,

a_3, a_2, a_1 을 구하면 다음과 같다.

a_4	a_3	a_2	a_1
32	30	28	26
3	8	6	64
	1	2	4

따라서 i), ii)에 의하여 모든 a_1 은 4, 26, 64이므로

모든 a_1 의 값의 합은

$$4 + 26 + 64 = 94$$

확률과 통계

51-9. ②

앞면이 나오는 동전의 개수가 2일 확률은

$${}_3C_2 \left(\frac{1}{2}\right)^2 \left(\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{8}$$

앞면이 나오는 동전의 개수가 3일 확률은

$${}_3C_3 \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}$$

이므로 3개의 동전을 던져 앞면이 나오는 동전의 개수가 2 이상일 확률은

$$\frac{3}{8} + \frac{1}{8} = \frac{1}{2}$$

주머니에서 임의로 2개의 공을 꺼낼 때, 꺼낸 공에 적힌 모든 수가 홀수일 확률은

$$\frac{{}_4C_2}{{}_7C_2} = \frac{2}{7}$$

따라서 3개의 동전을 던져 앞면이 나오는 동전의 개수가 2 이상이고, 주머니에서 꺼낸 공에 적힌 공에 적힌 모든 수가 홀수일 확률은

$$\frac{1}{2} \times \frac{2}{7} = \frac{1}{7}$$

3개의 동전을 던져 앞면이 나오는 동전의 개수가 1 이하인 사건은 앞면이 나오는 동전의 개수가 2 이상인 사건의 여사건이므로

앞면이 나오는 동전의 개수가 1 이하일 확률은

$$1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

주머니에서 임의로 3개의 공을 꺼낼 때, 꺼낸 공에 적힌 모든 수가 홀수일 확률은

$$\frac{{}_4C_3}{{}_7C_3} = \frac{4}{35}$$

따라서 3개의 동전을 던져 앞면이 나오는 동전의 개수가 1 이하이고, 주머니에서 꺼낸 공에 적힌 공에 적힌 모든 수가 홀수일 확률은

$$\frac{1}{2} \times \frac{4}{35} = \frac{2}{35}$$

따라서 구하는 확률은

$$\frac{1}{7} + \frac{2}{35} = \frac{1}{5}$$

51-10. 161

$\sqrt{a+b+c-2} = \sqrt{6-d}$ 에서

$a+b+c-2=6-d$ 즉, $a+b+c+d=8$ 이고,

$6-d \geq 0$ 이어야 한다.

$a+b+c+d=8$ 을 만족시키는 음이 아닌 정수 a, b, c, d 의 모든 순서쌍 (a, b, c, d) 의 개수는

$${}_4H_8 = {}_{11}C_8 = 165 \cdots \textcircled{7}$$

$$a+b+c-2 \geq -2 \text{이므로}$$

⑦의 경우에서 무리함수의 조건에 의하여 $d=7$ 또는 $d=8$ 인 경우를 제외하면 된다.

$d=7$ 일 때, $a+b+c=1$ 이고 이를 만족시키는 음이 아닌 정수 a, b, c 의 모든 순서쌍 (a, b, c) 의 개수는

$${}_3H_1 = {}_3C_1 = 3$$

$d=8$ 일 때, $a+b+c=0$ 이고 이를 만족시키는 음이 아닌 정수 a, b, c 의 모든 순서쌍 (a, b, c) 의 개수는 1

따라서 구하는 음이 아닌 정수 a, b, c, d 의 모든 순서쌍 (a, b, c, d) 의 개수는

$$165 - 3 - 1 = 161$$

51-11. ③

1이 적힌 공을 꺼내는 개수에 따라 각각 $a \leq b \leq c \leq d$ 일 확률을 구해 보면

i) 1이 적힌 공을 4개 꺼내는 경우

꺼낸 4개의 공이 전부 1이 적힌 공일 확률은

$$\frac{{}_4C_4}{{}_7C_4} = \frac{1}{35}$$

이때 항상 $a \leq b \leq c \leq d$ 이므로 $a \leq b \leq c \leq d$ 일 확률은

$$\frac{1}{35} \times 1 = \frac{1}{35}$$

ii) 1이 적힌 공을 3개 꺼내는 경우

꺼낸 4개의 공 중에서 3개가 1이 적힌 공일 확률은

$$\frac{{}_4C_3 \times {}_3C_1}{{}_7C_4} = \frac{12}{35}$$

이때 $a \leq b \leq c \leq d$ 가 되려면 1이 아닌 한 공에 적혀 있는 수가 d 가 되어야 하고 그 확률이 $\frac{3!}{4!} = \frac{1}{4}$ 이다.

따라서 $a \leq b \leq c \leq d$ 일 확률은

$$\frac{12}{35} \times \frac{1}{4} = \frac{3}{35}$$

iii) 1이 적힌 공을 2개 꺼내는 경우

꺼낸 4개의 공 중에서 2개가 1이 적힌 공일 확률은

$$\frac{{}_4C_2 \times {}_3C_2}{{}_7C_4} = \frac{18}{35}$$

이때 $a \leq b \leq c \leq d$ 가 되려면 1이 아닌 두 공에 각각 적혀 있는 두 수가 작은 것부터 크기순으로 c, d 가 되어야 하고 그 확률이 $\frac{2!}{4!} = \frac{1}{12}$ 이다. 따라서 $a \leq b \leq c \leq d$ 일

확률은

$$\frac{18}{35} \times \frac{1}{12} = \frac{3}{70}$$

iv) 1이 적힌 공을 1개 꺼내는 경우

꺼낸 4개의 공 중에서 1개가 1이 적힌 공일 확률은

$$\frac{{}_4C_3 \times {}_3C_3}{{}_7C_4} = \frac{4}{35}$$

이때 $a \leq b \leq c \leq d$ 가 되려면 1이 아닌 세 공에 각각 적혀 있는 세 수가 작은 것부터 크기순으로 b, c, d 가 되어야 하고 그 확률이 $\frac{1}{4!} = \frac{1}{24}$ 이다. 따라서 $a \leq b \leq c \leq d$ 일 확률은

$$\frac{4}{35} \times \frac{1}{24} = \frac{1}{210}$$

i)~iv)에 의하여 구하는 확률은

$$\frac{1}{35} + \frac{3}{35} + \frac{3}{70} + \frac{1}{210} = \frac{17}{105}$$

51-12. 18

$$E(X) = 1 \times a + 2 \times b + 3 \times c = a + 2b + 3c$$

$$E(X^2) = 1^2 \times a + 2^2 \times b + 3^2 \times c = a + 4b + 9c$$

$$\begin{aligned} E(Y) &= 1 \times \left(a - \frac{1}{4}\right) + 2 \times b + 3 \times \left(c + \frac{1}{4}\right) \\ &= a + 2b + 3c + \frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$= E(X) + \frac{1}{2}$$

$$\begin{aligned} E(Y^2) &= 1^2 \times \left(a - \frac{1}{4}\right) + 2^2 \times b + 3^2 \times \left(c + \frac{1}{4}\right) \\ &= a + 4b + 9c + 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} V(Y) &= E(Y^2) - \{E(Y)\}^2 \\ &= (a + 4b + 9c + 2) - \{E(Y)\}^2 \\ &= E(X^2) - \left(E(X) + \frac{1}{2}\right)^2 + 2 \\ &= E(X^2) - \{E(X)\}^2 - E(X) + \frac{7}{4} \\ &= V(X) - E(X) + \frac{7}{4} \\ &= -\frac{5}{8} + \frac{7}{4} = \frac{9}{8} \end{aligned}$$

$$\therefore V(4Y+1) = 16V(Y) = 16 \times \frac{9}{8} = 18$$

미적분

51-9. 10

b 의 범위에 따라 주어진 등식을 만족시키는 a 의 값을 구해 보면

i) $b > 5$ 또는 $b < -5$ 일 때,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a \cdot 5^n - 2b^n}{5^n + 4^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a - 2\left(\frac{b}{5}\right)^n}{1 + \left(\frac{4}{5}\right)^n}$$

이므로 극한값이 존재하지 않는다.

ii) $b = 5$ 일 때,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a \cdot 5^n - 2 \cdot 5^n}{5^n + 4^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a-2}{1 + \left(\frac{4}{5}\right)^n} \\ = a-2 = 4$$

$$\therefore a = 6$$

iii) $b = -5$ 일 때,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a \cdot 5^n - 2(-5)^n}{5^n + 4^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a-2(-1)^n}{1 + \left(\frac{4}{5}\right)^n}$$

이므로 극한값이 존재하지 않는다.

iv) $-5 < b < 5$ 일 때,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a \cdot 5^n - 2b^n}{5^n + 4^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a-2\left(\frac{b}{5}\right)^n}{1 + \left(\frac{4}{5}\right)^n} = a = 4$$

$$\therefore a = 4$$

i) ~ iv)에 의하여

$a = 6, b = 5$ 또는 $a = 4, -5 < b < 5$ 이므로

모든 순서쌍 (a, b) 의 개수는

$$1 + 9 = 10$$

51-10. ②

$0 < k < \frac{\pi}{2}$ 인 실수 k 가

$$f(k) = 2\cos k - \sin k = 1$$

일 때,

$$2\cos k = \sin k + 1$$

의 양변을 제곱하면

$$4\cos^2 k = \sin^2 k + 2\sin k + 1$$

$$4 - 4\sin^2 k = \sin^2 k + 2\sin k + 1$$

$$5\sin^2 k + 2\sin k - 3 = 0$$

$$(5\sin k - 3)(\sin k + 1) = 0$$

$$0 < k < \frac{\pi}{2} \text{이므로 } \sin k = \frac{3}{5}, \cos k = \frac{4}{5}$$

$$f(k) = 1 \text{에서 } g(1) = k \text{이므로}$$

$$\tan g(1) = \tan k = \frac{\sin k}{\cos k} = \frac{3}{4}$$

한편 함수 $f(x)$ 를 미분하면

$$f'(x) = -2\sin x - \cos x \text{에서}$$

$$f'(k) = -2\sin k - \cos k = -\frac{6}{5} - \frac{4}{5} = -2$$

역함수의 미분법에 의하여

$$g'(1) = \frac{1}{f'(k)} = -\frac{1}{2}$$

$$\therefore \frac{\tan g(1)}{g'(1)} = -\frac{3}{2}$$

51-11. ④

삼각형 ABC에 외접하는 반지름의 길이가 1이므로

사인법칙에 의하여

$$\overline{AC} = 2\sin\theta$$

한편, $\angle BEC = \pi - \theta$ 이고 사각형 ABEC가 원에 내접한다.

원에 내접하는 사각형의 대각의 합은 π 이므로

$$\angle BAC = \pi - (\pi - \theta) = \theta$$

따라서 삼각형 ABC는

$$\overline{AC} = \overline{BC} = 2\sin\theta$$

인 이등변삼각형이다. $\angle ACB = \pi - 2\theta$ 이므로

$$S(\theta) = \frac{1}{2} \times (2\sin\theta)^2 \times \sin(\pi - 2\theta)$$

$$= 2\sin^2\theta \sin 2\theta$$

$$= 4\sin^3\theta \cos\theta$$

$$\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} S(\theta) d\theta = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} 4\sin^3\theta \cos\theta d\theta$$

$\sin\theta = t$ 로 놓으면 $\cos\theta d\theta = dt$ 이고

$$\theta = \frac{\pi}{6} \text{ 일 때, } t = \frac{1}{2}$$

$$\theta = \frac{\pi}{3} \text{ 일 때, } t = \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ 이므로}$$

$$\begin{aligned} \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} 4\sin^3\theta \cos\theta d\theta &= \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} 4t^3 dt \\ &= \left[t^4 \right]_{\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \\ &= \frac{9}{16} - \frac{1}{16} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

51-12. ⑤

$x \geq 0$ 일 때, $f(x) \geq 0$ 이고

$x < 0$ 일 때, $f(x) < 0$ 이므로

$$g(x) = \begin{cases} f(x) & (x < 0) \\ e^{-2f(x)} f(x) & (x \geq 0) \end{cases}$$

$x < 0$ 일 때,

$$\begin{aligned} g'(x) &= f'(x) \\ &= \frac{k \cdot (x^2 + 1) - kx \cdot 2x}{(x^2 + 1)^2} \\ &= \frac{-k(x^2 - 1)}{(x^2 + 1)^2} \end{aligned}$$

구간 $(-\infty, 0)$ 에서 함수 $g(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	0
$g'(x)$	$-$	0	$+$	
$g(x)$	$\searrow$	극소	$\nearrow$	0

따라서 $x = -1$ 에서 $g(x)$ 는 극소

$x \geq 0$ 일 때,

$$g'(x) = \frac{d}{dx} \{e^{-2f(x)} f(x)\}$$

$$\begin{aligned}
&= -2f'(x)e^{-2f(x)}f(x) + e^{-2f(x)}f'(x) \\
&= -f'(x)\{2f(x) - 1\}e^{-2f(x)} \\
&= \frac{k(x^2 - 1)}{(x^2 + 1)^2} \cdot \frac{(-x^2 + 2kx - 1)}{x^2 + 1} e^{-\frac{2kx}{x^2 + 1}} \\
&= -\frac{k(x^2 - 1)(x^2 - 2kx + 1)}{(x^2 + 1)^3} e^{-\frac{2kx}{x^2 + 1}}
\end{aligned}$$

이때 x 에 대한 이차방정식 $x^2 - 2kx + 1 = 0$ 의 두 근이

$$x = k \pm \sqrt{k^2 - 1}$$

이므로 $x \geq 0$ 에서 방정식 $g'(x) = 0$ 은

$0 < k < 1$ 인 경우 $x = 1$ 만을 근으로 갖는다.

$k = 1$ 인 경우 $x = 1$ 만을 근으로 갖는다. (삼중근)

$k > 1$ 인 경우, 1 , $k - \sqrt{k^2 - 1}$, $k + \sqrt{k^2 - 1}$ 을 근으로 갖는다.

이때 조건에서 $\sum_{n=1}^m x_n = 12$ 이므로 $k > 1$ 이고,

구간 $[0, \infty)$ 에서 함수 $g(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	0	...	$k - \sqrt{k^2 - 1}$	...	1
$g'(x)$		+	0	-	0
$g(x)$	0	↗	극대	↘	극소

x	1	...	$k + \sqrt{k^2 - 1}$	...
$g'(x)$	0	+	0	-
$g(x)$	극소	↗	극대	↘

따라서 함수 $g(x)$ 는

$$x = -1, x = k - \sqrt{k^2 - 1}, x = 1, x = k + \sqrt{k^2 - 1}$$

에서 극대 또는 극소이므로 $m = 4$

$$\sum_{n=1}^m x_n = 2k = 12 \text{이므로 } k = 6$$

$$f(x) = \frac{6x}{x^2 + 1} \text{에서 } f(2) = \frac{12}{5}$$

$$\therefore m \times f(2) = 4 \times \frac{12}{5} = \frac{48}{5}$$

Day. **52**

수학1, 수학2

52-1. ④

$$\begin{aligned}
\frac{a_{k+1}}{S_k S_{k+1}} &= \frac{1}{S_{k+1} - S_k} \left(\frac{a_{k+1}}{S_k} - \frac{a_{k+1}}{S_{k+1}} \right) \\
&= \frac{1}{a_{k+1}} \left(\frac{a_{k+1}}{S_k} - \frac{a_{k+1}}{S_{k+1}} \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{S_k} - \frac{1}{S_{k+1}} \\
\sum_{k=1}^{10} \frac{a_{k+1}}{S_k S_{k+1}} &= \sum_{k=1}^{10} \left(\frac{1}{S_k} - \frac{1}{S_{k+1}} \right) \\
&= \left(\frac{1}{S_1} - \frac{1}{S_2} \right) + \left(\frac{1}{S_2} - \frac{1}{S_3} \right) + \cdots + \left(\frac{1}{S_{10}} - \frac{1}{S_{11}} \right) \\
&= \frac{1}{S_1} - \frac{1}{S_{11}} = \frac{1}{4}
\end{aligned}$$

$S_1 = a_1 = 2$ 이므로

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{S_{11}} = \frac{1}{4}$$

$$\frac{1}{S_{11}} = \frac{1}{4} \therefore S_{11} = 4$$

52-2. 7

주어진 등식의 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$f(x) = 2x - 6 \quad \cdots \textcircled{㉠}$$

주어진 등식의 양변에 $x = a$ 를 대입하면

$$0 = a^2 - 6a + b \quad \cdots \textcircled{㉡}$$

이고 이를 만족시키는 모든 실수 a 가 a_1, a_2 이므로

a 에 대한 이차방정식

$$a^2 - 6a + b = 0$$

의 두 근이 a_1, a_2 이고 a_1, a_2 가 실수이므로

이 이차방정식의 판별식 D 에 대하여

$$\frac{D}{4} = 9 - b^2 > 0, \quad -3 < b < 3$$

이다. 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$a_1 + a_2 = 6, \quad a_1 a_2 = b$$

$$\begin{aligned}
(a_2 - a_1)^2 &= (a_2 + a_1)^2 - 4a_1 a_2 \\
&= 36 - 4b
\end{aligned}$$

$36 - 4b > 0$ 이므로

$$a_2 - a_1 = \sqrt{36 - 4b} \quad \text{또는} \quad a_2 - a_1 = -\sqrt{36 - 4b}$$

이를 ㉠에 대입하여 b 의 값을 구하면

i) $a_2 - a_1 = \sqrt{36 - 4b}$ 인 경우

$$f(a_2 - a_1) = 2\sqrt{36 - 4b} - 6 = 10 \text{에서}$$

$$\sqrt{36 - 4b} = 8 \therefore b = -7$$

ii) $a_2 - a_1 = -\sqrt{36 - 4b}$ 인 경우

$$f(a_2 - a_1) = -2\sqrt{36 - 4b} - 6 = 10$$

$$\sqrt{36 - 4b} = -8 \text{이므로 } b \text{의 값이 존재하지 않는다.}$$

i), ii)에 의하여 $b = -7$ 이고 $a_2 > a_1$

$b = -7$ 을 ㉡에 대입하면

$$a^2 - 6a - 7 = 0$$

$$(a+1)(a-7) = 0 \text{에서}$$

$$a = -1 \quad \text{또는} \quad a = 7$$

$a_2 > a_1$ 이므로 $a_1 = -1$

$$\therefore a_1 \times b = (-1) \times (-7) = 7$$

52-3. 18

함수 $f(x)$ 가 $x=1$ 에서 연속이므로

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{|x^3 - a^2| - 2(a+1)}{x-1} = b$$

가 되어야 한다. 이때 $\lim_{x \rightarrow 1} (x-1) = 0$ 이므로

$$\lim_{x \rightarrow 1} \{|x^3 - a^2| - 2(a+1)\} = 0$$

$$\therefore |1 - a^2| - 2(a+1) = 0 \quad \cdots \textcircled{㉠}$$

$a^2 > 1$ 인 경우 $\textcircled{㉠}$ 에서

$$-(1 - a^2) - 2(a+1) = 0$$

$$a^2 - 2a - 3 = 0, (a+1)(a-3) = 0$$

$$\therefore a = 3$$

$a^2 \leq 1$ 인 경우 $\textcircled{㉠}$ 에서

$$(1 - a^2) - 2(a+1) = 0$$

$$a^2 + 2a + 1 = 0, (a+1)^2 = 0$$

$$\therefore a = -1$$

따라서 $a = -1$ 또는 $a = 3$ 이고 각각의

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{|x^3 - a^2| - 2(a+1)}{x-1} = b \text{의 값을 구하면}$$

i) $a = -1$ 인 경우

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1+} \frac{|x^3 - a^2| - 2(a+1)}{x-1} &= \lim_{x \rightarrow 1+} \frac{|x^3 - 1|}{x-1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1+} \frac{x^3 - 1}{x-1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1+} (x^2 + x + 1) = 3 \\ \lim_{x \rightarrow 1-} \frac{|x^3 - a^2| - 2(a+1)}{x-1} &= \lim_{x \rightarrow 1-} \frac{|x^3 - 1|}{x-1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1-} \frac{-(x^3 - 1)}{x-1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1-} (-x^2 - x - 1) = -3 \end{aligned}$$

따라서 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{|x^3 - a^2| - 2(a+1)}{x-1}$ 의 값이 존재하지

않으므로 함수 $f(x)$ 는 $x=1$ 에서 불연속이다.

ii) $a = 3$ 인 경우

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1+} \frac{|x^3 - a^2| - 2(a+1)}{x-1} &= \lim_{x \rightarrow 1+} \frac{|x^3 - 9| - 8}{x-1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1+} \frac{-x^3 + 1}{x-1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1+} (-x^2 - x - 1) = -3 \\ \lim_{x \rightarrow 1-} \frac{|x^3 - a^2| - 2(a+1)}{x-1} &= \lim_{x \rightarrow 1-} \frac{|x^3 - 9| - 8}{x-1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1-} \frac{-x^3 + 1}{x-1} \end{aligned}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1-} (-x^2 - x - 1) = -3$$

따라서 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{|x^3 - a^2| - 2(a+1)}{x-1} = -3$ 이고 함수 $f(x)$ 가

$$x=1 \text{에서 연속이므로 } f(1) = b = -3$$

$$\therefore a^2 + b^2 = 3^2 + (-3)^2 = 18$$

52-4. ④

$$a_1 = 20 \text{이므로}$$

$$a_2 = \log_2 a_1 = \log_2 20 = 1$$

$$a_3 = 4^{a_2} = 4^1 = 4$$

$$a_4 = \log_2 a_3 = \log_2 4 = 2$$

$$\vdots$$

모든 자연수 n 에 대하여 $a_{n+3} = a_n$ 이므로

$$a_1 + a_2 + a_3$$

$$= a_4 + a_5 + a_6$$

$$\vdots$$

$$= a_{25} + a_{26} + a_{27} = 2 + 1 + 4 = 7$$

또한 $a_{28} = a_{25} = a_{22} = \dots = a_1 = 20$ 이므로

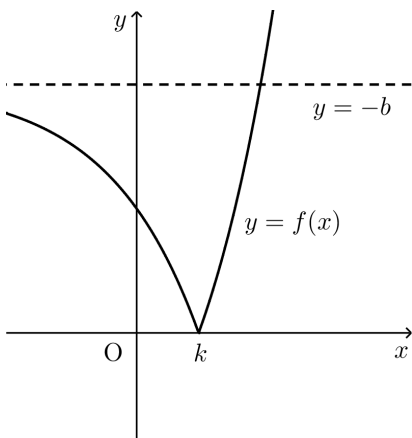
구하는 값은

$$\sum_{n=1}^{28} a_n = 7 \times 9 + 2 = 65$$

52-5. 17

함수 $y = f(x)$ 의 그래프는 그림과 같고

$f(x) = 0$ 을 만족시키는 x 를 k 라 하자.



$$\text{한편 } g(x) = -(x-3)(x-5) = -(x-4)^2 + 1$$

이고 $x=4$ 에서 최댓값 1을 갖는다.

조건 (가)에서 방정식 $(f \circ g)(x) = 0$ 이 오직 하나의 실근을 가지려면

방정식 $f(g(x)) = 0$ 에서 방정식 $g(x) = k$ 을 만족시키는 x 가 오직 하나만 존재해야 한다. 따라서

$$k = 1$$

이때 $2^{k+a} + b = 0$ 이므로

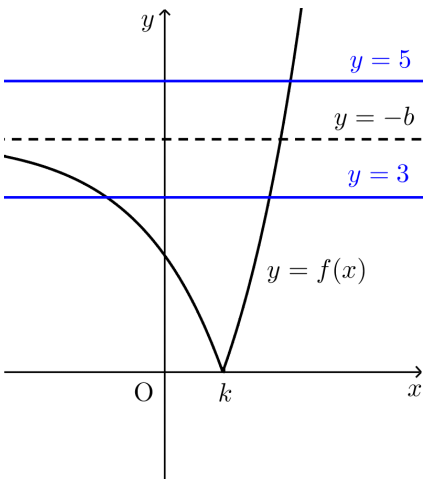
$$2^{1+a} + b = 0 \quad \dots \textcircled{7}$$

한편, 방정식 $g(x) = 0$ 의 근이 3 또는 5이고 조건 (나)에서 방정식 $(g \circ f)(x) = 0$ 이 서로 다른 세 개의 실근을 가지므로 방정식 $g(f(x)) = 0$ 에서

$$\{f(x) - 3\}\{f(x) - 5\} = 0$$

의 서로 다른 실근의 개수가 3이 되어야 한다.

따라서 곡선 $y = f(x)$ 와 직선 $y = 3$ 이 만나는 점의 개수와 곡선 $y = f(x)$ 와 직선 $y = 5$ 가 만나는 점의 개수의 합이 3이 되어야 한다.



이를 만족시키는 경우는 $b = -4$ 또는 $b = -5$ 인 경우이다.

$b = -4$ 일 때, ㉠에 의하여 $a = 1$

$b = -5$ 일 때, ㉠에 의하여 $b = -1 + \log_2 5$

이때 a, b 가 모두 정수이므로 $a = 1, b = -4$ 이다.

$$\therefore a^2 + b^2 = 1 + 16 = 17$$

52-6. 37

직선 AP의 기울기는

$$\frac{a \sin \pi t}{t+1} \text{ 이므로 } m_1 = \frac{a \sin \pi t}{t+1}$$

직선 OP의 기울기는

$$\frac{a \sin \pi t}{t} \text{ 이므로 } m_2 = \frac{a \sin \pi t}{t}$$

$7m_1 = 3m_2$ 에서

$$7 \times \frac{a \sin \pi t}{t+1} = 3 \times \frac{a \sin \pi t}{t}$$

$$\frac{7}{t+1} = \frac{3}{t} \quad \therefore t = \frac{3}{4}$$

따라서 점 P는 $\left(\frac{3}{4}, \frac{\sqrt{2}}{2}a\right)$ 이고

$$\overline{AP} = \sqrt{\left(-1 - \frac{3}{4}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}a\right)^2} = \sqrt{\frac{49}{16} + \frac{a^2}{2}},$$

$$\overline{OP} = \sqrt{\left(-\frac{3}{4}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}a\right)^2} = \sqrt{\frac{9}{16} + \frac{a^2}{2}}$$

이므로 $\overline{AP} = 2 \times \overline{OP}$ 에서

$$\overline{AP}^2 = 4 \times \overline{OP}^2 \text{ 이므로}$$

$$\frac{49}{16} + \frac{a^2}{2} = 4 \left(\frac{9}{16} + \frac{a^2}{2} \right)$$

$$\therefore a^2 = \frac{13}{24}$$

52-7. 600

$$a_2 = a_1 + 1 - 7 = 44,$$

$$a_3 = a_2 - 2 + 3 = 45$$

이고 모든 자연수 n 에 대하여

$$a_{2n} = a_{2n-1} + 2n - 8$$

$$a_{2n+1} = a_{2n} - 2n + 3$$

$$= a_{2n-1} - 5$$

$$a_{2n+2} = a_{2n+1} + 2n - 6$$

$$= a_{2n} - 3$$

$$a_{2n+3} = a_{2n+2} - 2n + 1$$

$$= a_{2n+1} - 5$$

$$b_n = a_{2n-1} + a_{2n} \text{ 이라 하면}$$

$$b_{n+1} - b_n = (a_{2n+1} + a_{2n+2}) - (a_{2n-1} + a_{2n}) = -8$$

$$b_1 = a_1 + a_2 = 94 \text{ 이므로}$$

수열 $\{b_n\}$ 은 첫째항이 94이고 공차가 -8 인 등차수열이다.

따라서

$$S_{2n} = b_1 + b_2 + \cdots + b_n$$

$$= \sum_{k=1}^n (102 - 8k)$$

$$= -4n^2 + 98n$$

$$= -4 \left(n - \frac{49}{4} \right)^2 + \cdots$$

이고 n 이 자연수이므로 $n = 12$ 일 때,

S_{2n} 은 최댓값 600을 가진다. ... ㉠

한편 $c_n = a_{2n} + a_{2n+1}$ 이라 하면

$$c_{n+1} - c_n = (a_{2n+2} + a_{2n+3}) - (a_{2n} + a_{2n+1}) = -8$$

$$c_1 = a_2 + a_3 = 89 \text{ 이므로}$$

수열 $\{c_n\}$ 은 첫째항이 89이고 공차가 -8 인 등차수열이다.

따라서

$$S_{2n+1} = a_1 + c_1 + c_2 + \cdots + c_n$$

$$= 50 + \sum_{k=1}^n (97 - 8k)$$

$$= 50 - 4n^2 + 93n$$

$$= -4 \left(n - \frac{93}{8} \right)^2 + \cdots$$

이고 n 이 자연수이므로 $n = 12$ 일 때,

S_{2n+1} 은 최댓값 590을 가진다. ... ㉡

㉠, ㉡에 의하여 모든 자연수 n 에 대하여 S_n 의 최댓값은 $n = 24$ 일 때, 600이다.

52-8. ⑤

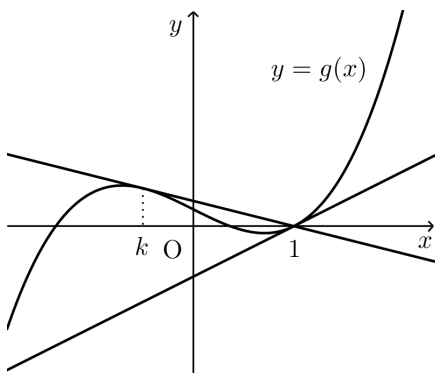
$f(x)$ 가 최고차항의 계수가 1인 이차함수이므로 $g(x)$ 는
최고차항의 계수가 $\frac{1}{3}$ 인 삼차함수이다.

$g(1) = 0$ 이므로 $g(x) = \frac{1}{3}(x-1)(x^2+ax+b)$ 로 놓을 수
있다.

따라서 점 $(1, 0)$ 에서 곡선 $y = g(x)$ 에 그은 직선은

점 $(1, 0)$ 에서 곡선 $y = g(x)$ 에 접하는 직선과

점 $(k, g(k))$ ($k \neq 1$)에서 곡선 $y = g(x)$ 에 접하고 점 $(1, 0)$ 을
직선이 있다.



이때 곡선 $y = g(x)$ 위의 점 $(k, g(k))$ 에서의 접선의 방정식을
 $y = mx + n$ 이라 할 때,

$$g(x) - (mx + n) = 0,$$

$$\frac{1}{3}(x-1)(x^2+ax+b) - (mx+n) = 0$$

$$\frac{1}{3}x^3 + \frac{a-1}{3}x^2 - \left(\frac{a-b}{3} + m\right)x - \frac{b}{3} - n = 0$$

의 방정식의 중근이 k 이고 나머지 한 근이 1이므로

$$2k+1 = -a+1$$

$$\therefore k = -\frac{a}{2}$$

한편

$$g'(x) = f(x) = \frac{1}{3}(x-1)(2x+a) + \frac{1}{3}(x^2+ax+b)$$

$$= x^2 + \frac{2}{3}(a-1)x - \frac{a-b}{3}$$

$$g'(1) = \frac{1}{3} + \frac{a}{3} + \frac{b}{3}$$

$$g'\left(-\frac{a}{2}\right) = -\frac{a^2}{12} + \frac{b}{3}$$

$$g'(1) - g'\left(-\frac{a}{2}\right) = \frac{a^2}{12} + \frac{a}{3} + \frac{1}{3} = \frac{1}{12}(a+2)^2 \geq 0$$

$$\text{이므로 } g'(1) = \frac{1}{2}, g'\left(-\frac{a}{2}\right) = -\frac{1}{4}$$

두 식

$$\frac{1}{3} + \frac{a}{3} + \frac{b}{3} = \frac{1}{2}, -\frac{a^2}{12} + \frac{b}{3} = -\frac{1}{4}$$

를 연립하여 풀면

$$a=1, b=-\frac{1}{2} \text{ 또는 } a=-5, b=\frac{11}{2}$$

그런데 조건에서 $g'(0) < 0$ 이므로

$$-\frac{a-b}{3} < 0, a > b$$

따라서 $a=1, b=-\frac{1}{2}$ 이다.

$$f(x) = x^2 - \frac{1}{2}$$

$$\therefore f(3) = 9 - \frac{1}{2} = \frac{17}{2}$$

확률과 통계

52-9. ④

i) $n(A \cup B) = 5, n(A \cap B) = 2$ 인 경우

$A \cap B$ 에 들어갈 두 원소를 정하는 경우의 수는 ${}_5C_2 = 10$

나머지 세 원소는 각각 두 집합 $A \cap B^C, A^C \cap B$ 중 한 집합에 포함되므로 세 원소가 들어갈 집합을 정하는 경우의 수는 $2^3 = 8$

$$\therefore 10 \times 8 = 80$$

ii) $n(A \cup B) = 4, n(A \cap B) = 1$ 인 경우

$A \cap B$ 에 들어갈 한 원소를 정하는 경우의 수는 ${}_5C_1 = 5$

$(A \cup B)^C$ 에 들어갈 한 원소를 정하는 경우의 수는 ${}_4C_1 = 4$

나머지 세 원소는 각각 두 집합 $A \cap B^C, A^C \cap B$ 중 한 집합에 포함되므로 세 원소가 들어갈 집합을 정하는 경우의 수는 $2^3 = 8$

$$\therefore 5 \times 4 \times 8 = 160$$

iii) $n(A \cup B) = 3, n(A \cap B) = 0$ 인 경우

$(A \cup B)^C$ 에 들어갈 두 원소를 정하는 경우의 수는 ${}_5C_2 = 10$

나머지 세 원소는 각각 두 집합 $A \cap B^C, A^C \cap B$ 중 한 집합에 포함되므로 세 원소가 들어갈 집합을 정하는 경우의 수는 $2^3 = 8$

$$\therefore 10 \times 8 = 80$$

i) ~ iii)에 의하여 모든 경우의 수는 $80 + 160 + 80 = 320$

52-10. ③

$f(\bar{X}) \geq 0$ 일 때,

$$\bar{X}^2 - 6\bar{X} \geq 0, \bar{X}(\bar{X} - 6) \geq 0$$

$$\bar{X} \leq 0 \text{ 또는 } \bar{X} \geq 6$$

확률변수 $\bar{X}$ 가 정규분포 $N\left(6, \left(\frac{\sigma}{6}\right)^2\right)$ 를 따르므로

$f(\bar{X}) \geq 0$ 일 확률은

$$P(\bar{X} \leq 0) + P(\bar{X} \geq 6)$$

$$= P\left(Z \leq \frac{-6}{\frac{\sigma}{6}}\right) + P(Z \geq 0) = 0.5688$$

에서

$$P(Z \leq -1.5) + P(Z \leq 0) = 0.5668$$

이므로

$$\frac{-6}{\frac{\sigma}{6}} = -1.5 \quad \therefore \sigma = 24$$

$$f(\bar{X}) \leq -\frac{\sigma}{3} = -8 \text{에서}$$

$$\bar{X}^2 - 6\bar{X} \leq -8, (\bar{X} - 2)(\bar{X} - 4) \leq 0$$

$$2 \leq \bar{X} \leq 4$$

$$\begin{aligned} P(2 \leq \bar{X} \leq 4) &= P\left(\frac{2-6}{4} \leq \frac{\bar{X}-6}{4} \leq \frac{4-6}{4}\right) \\ &= P(-1 \leq Z \leq -0.5) \\ &= P(-1 \leq Z \leq 0) - P(-0.5 \leq Z \leq 0) \\ &= P(0 \leq Z \leq 1) - P(0 \leq Z \leq 0.5) \\ &= 0.3413 - 0.1915 = 0.1498 \end{aligned}$$

52-11. ⑤

세 자리의 자연수를 선택하는 경우의 수는

$$4^3 = 64$$

각 숫자를 3으로 나누었을 때의 나머지를 기준으로 분류하면,
나머지가 0인 수는 3

나머지가 1인 수는 1, 4

나머지가 2인 수는 2

세 자리의 자연수가 6의 배수하려면 각 자리수의 합이 3의 배수면 서 마지막 자리수가 짝수여야 한다.

나머지가 0인 수를 a_0 , 나머지가 1인 수를 a_1 , 나머지가 2인 수를 a_2 라 할 때, 세 자리의 자연수가

$$a_0a_12 \text{의 끝인 경우의 수는 } 1 \times 2 = 2$$

$$a_1a_02 \text{의 끝인 경우의 수는 } 2 \times 1 = 2$$

$$a_1a_14 \text{의 끝인 경우의 수는 } 2 \times 2 = 4$$

$$a_0a_24 \text{의 끝인 경우의 수는 } 1 \times 1 = 1$$

$$a_2a_04 \text{의 끝인 경우의 수는 } 1 \times 1 = 1$$

$$a_2a_22 \text{의 끝인 경우의 수는 } 1 \times 1 = 1$$

따라서 선택한 세 자리의 자연수가 6의 배수인 경우의 수는
 $2 + 2 + 4 + 1 + 1 + 1 = 11$

따라서 구하는 확률은 $\frac{11}{64}$ 이다.

52-12. ⑤

$f(3)$ 의 값은 1, 2, 3이 될 수 있다.

$f(3) = 1$, $f(3) = 2$, $f(3) = 3$ 일 때, 각각의 경우의 함수의 개수를 구하면

i) $f(3) = 1$ 인 경우

$f(1) \leq f(2) \leq 1$ 인 6 이하의 자연수 $f(1)$, $f(2)$ 의

순서쌍 $(f(1), f(2))$ 의 개수는

$${}_1H_2 = {}_2C_2 = 1$$

$1 \leq f(4) \leq f(5) \leq f(6)$ 인 6 이하의 자연수 $f(4), f(5), f(6)$ 의 순서쌍 $(f(4), f(5), f(6))$ 의 개수는

$${}_6H_3 = {}_8C_3 = 56$$

따라서 함수 f 의 개수는

$$1 \times 56 = 56$$

ii) $f(3) = 2$ 인 경우

$f(1) \leq f(2) \leq 2$ 인 6 이하의 자연수 $f(1), f(2)$ 의 순서쌍 $(f(1), f(2))$ 의 개수는

$${}_2H_2 = {}_3C_2 = 3$$

$2 \leq f(4) \leq f(5) \leq f(6)$ 인 6 이하의 자연수 $f(4), f(5), f(6)$ 의 순서쌍 $(f(4), f(5), f(6))$ 의 개수는

$${}_5H_3 = {}_7C_3 = 35$$

따라서 함수 f 의 개수는

$$3 \times 35 = 105$$

iii) $f(3) = 3$ 인 경우

$f(1) \leq f(2) \leq 3$ 인 6 이하의 자연수 $f(1), f(2)$ 의 순서쌍 $(f(1), f(2))$ 의 개수는

$${}_3H_2 = {}_4C_2 = 6$$

$3 \leq f(4) \leq f(5) \leq f(6)$ 인 6 이하의 자연수 $f(4), f(5), f(6)$ 의 순서쌍 $(f(4), f(5), f(6))$ 의 개수는

$${}_4H_3 = {}_6C_3 = 20$$

따라서 함수 f 의 개수는

$$6 \times 20 = 120$$

i) ~ iii)에 의하여 함수 f 의 개수는

$$56 + 105 + 120 = 281$$

미적분

52-9. ④

$$f'(x) = 2x + \frac{1}{2} \text{에서}$$

$$\begin{aligned} g'(x) &= 2\cos 2x f'(\sin 2x - k) \\ &= 2\cos 2x \left(2\sin 2x - 2k + \frac{1}{2} \right) \end{aligned}$$

$$0 < x < 2\pi \text{에서}$$

$$\cos 2x = 0 \text{인 } x \text{는 } \frac{\pi}{4}, \frac{3}{4}\pi, \frac{5}{4}\pi, \frac{7}{4}\pi$$

방정식 $g'(x) = 0$ 의 서로 다른 실근의 개수가 4이므로

$$\text{방정식 } 2\sin 2x + \frac{1}{2} - 2k = 0,$$

$$\sin 2x = k - \frac{1}{4}$$

가 실근을 갖지 않거나 $\frac{\pi}{4}, \frac{3}{4}\pi, \frac{5}{4}\pi, \frac{7}{4}\pi$ 의 실근을 가져야 한다.

$k > 0$ 이므로

i) $k - \frac{1}{4} < 1$ 일 때, 즉 $0 < k < \frac{5}{4}$ 일 때,

방정식 $\sin 2x = k - \frac{1}{4}$ 은 $\frac{\pi}{4}, \frac{3}{4}\pi, \frac{5}{4}\pi, \frac{7}{4}\pi$ 가 아닌
실근을 갖는다.

ii) $k - \frac{1}{4} = 1$ 일 때, 즉 $k = \frac{5}{4}$ 일 때,

방정식 $\sin 2x = 1$ 의 실근은 $\frac{\pi}{4}, \frac{5}{4}\pi$

iii) $k - \frac{1}{4} > 1$ 일 때, 즉 $k > \frac{5}{4}$ 일 때,

방정식 $\sin 2x = 1$ 의 실근이 존재하지 않는다.

i)~iii)에 의하여

$$k \geq \frac{5}{4}$$

따라서 k 의 최솟값은 $\frac{5}{4}$ 이다.

52-10. ①

$$\int_0^1 f(2f(x))f'(x)dx = 2 \text{에서}$$

$$2f(x) = t \text{로 놓으면 } 2f'(x)dx = dt,$$

$$x = 0 \text{일 때, } t = 2f(0) = 0,$$

$$x = 1 \text{일 때, } t = 2f(1) = 2 \text{이므로}$$

$$\int_0^1 f(2f(x))f'(x)dx$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^2 f(t)dt = 2$$

$$\therefore \int_0^2 f(t)dt = 4$$

$$\int_2^5 xf'(2x-4)dx \text{에서 } 2x-4 = t \text{로 놓으면}$$

$$2dx = dt, x = 2 \text{일 때, } t = 0, x = 5 \text{일 때, } t = 6 \text{이므로}$$

$$\int_2^5 xf'(2x-4)dx$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^6 \left(\frac{t}{2} + 2 \right) f'(t)dt$$

$$= \frac{1}{4} \int_0^6 tf'(t)dt + \int_0^6 f'(t)dt$$

$$= \frac{1}{4} \left[tf(t) \right]_0^6 - \frac{1}{4} \int_0^6 f(t)dt + \left[f(t) \right]_0^6$$

$$= \frac{3}{2}f(6) - \frac{1}{4} \int_0^6 f(t)dt + f(6) - f(0)$$

$$= \frac{5}{2}f(6) - f(0) - \frac{1}{4} \int_0^6 f(t)dt$$

에서

$$f(6) = f(4) + 3 = f(2) + 6 = f(0) + 9 = 9$$

$$\begin{aligned}
 \int_2^4 f(t)dt &= \int_0^2 f(t+2)dt \\
 &= \int_0^2 \{f(t) + 3\}dt \\
 &= \int_0^2 f(t)dt + 6 = 10
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \int_4^6 f(t)dt &= \int_2^4 f(t+2)dt \\
 &= \int_2^4 \{f(t) + 3\}dt \\
 &= \int_2^4 f(t)dt + 6 = 16
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \therefore \int_0^6 f(t)dt &= \int_0^2 f(t)dt + \int_2^4 f(t)dt + \int_4^6 f(t)dt \\
 &= 4 + 10 + 16 = 30
 \end{aligned}$$

$$\frac{5}{2}f(6) - f(0) - \frac{1}{4} \int_0^6 f(t)dt$$

$$= 9 \times \frac{5}{2} - 0 - \frac{1}{4} \times 30 = 15$$

$$\therefore \int_2^5 xf'(2x-4)dx = 15$$

52-11. 40

$\angle POB = \theta$ 라 하면 점 P의 위치는

$x = 5\cos\theta$, $y = 5\sin\theta$ 이다.

$\overline{PC} = \ell$ 이라 하면 삼각형 PCO에서 코사인법칙에 의하여

$$\frac{l^2 + 1 - 25}{2 \cdot l \cdot 1} = \cos t \text{에서}$$

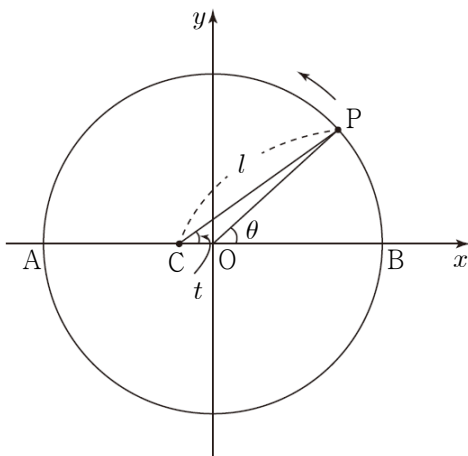
$$\ell^2 - 2l \cos t - 24 = 0 \cdots \textcircled{㉠}$$

이 성립하고

삼각형 PCO에서 사인법칙에 의하여

$$\frac{\ell}{\sin(\pi - \theta)} = \frac{5}{\sin t}, \quad \frac{\ell}{\sin \theta} = \frac{5}{\sin t} \cdots \textcircled{㉡}$$

가 성립한다.



한편, $t = \frac{\pi}{4}$ 일 때, $\textcircled{㉠}$, $\textcircled{㉡}$ 에 의하여

$\ell = 4\sqrt{2}$ 이고 $\sin\theta = \frac{4}{5}$ 이다.

$\frac{dx}{dt} = -5\sin\theta \times \frac{d\theta}{dt}$, $\frac{dy}{dt} = 5\cos\theta \times \frac{d\theta}{dt}$ 에서 속력은

$$\begin{aligned} & \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} \\ &= \sqrt{25\sin^2\theta \times \left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 + 25\cos^2\theta \left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2} \\ &= 5\sqrt{(\sin^2\theta + \cos^2\theta) \times \left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2} = 5\left|\frac{d\theta}{dt}\right| \end{aligned}$$

$\ell^2 - 2\cos t \times \ell - 24 = 0$ 에서 양변을 t 로 미분하면

$$2\ell \frac{d\ell}{dt} + 2\sin t \times \ell - 2\cos t \times \frac{d\ell}{dt} = 0 \text{에서 } t = \frac{\pi}{4} \text{ 일 때,}$$

$$\frac{d\ell}{dt} = -\frac{4\sqrt{2}}{7} \text{ 이다.}$$

$\frac{\ell}{\sin\theta} = \frac{5}{\sin t}$, $5\sin\theta = \ell\sin t$ 에서 양변을 t 로 미분하면

$$5\cos\theta \times \frac{d\theta}{dt} = \frac{d\ell}{dt}\sin t + \ell\cos t \text{에서 } t = \frac{\pi}{4} \text{ 일 때,}$$

$$5 \times \frac{3}{5} \times \frac{d\theta}{dt} = -\frac{4\sqrt{2}}{7} \times \frac{\sqrt{2}}{2} + 4\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\therefore \frac{d\theta}{dt} = \frac{8}{7}, v = 5 \times \frac{8}{7} = \frac{40}{7}$$

$$\therefore 7 \times v = 7 \times \frac{40}{7} = 40$$

52-12. 127

$$a_1 = 1$$

$$a_2 = |b_1| = \frac{1}{2}$$

$$a_3 = |b_2| = \frac{1}{4}$$

$\vdots$

$b_k \times b_{k+1} < 0$ 인 자연수 k 에 대하여

i) $b_k < 0$, $b_{k+1} > 0$ 인 경우

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} a_n - \sum_{n=1}^{\infty} b_n &= a_1 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_{n+1} - b_n) \\ &= a_1 + \sum_{n=1}^k (a_{n+1} - b_n) \\ &= a_1 + 2 \sum_{n=1}^k \left(\frac{1}{2}\right)^n \\ &= 1 + 2 \times \frac{\frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{2^k}\right)}{1 - \frac{1}{2}} \\ &= 1 + 2 \left(1 - \frac{1}{2^k}\right) \geq 2 \end{aligned}$$

이므로 조건을 만족시키지 않는다.

ii) $b_k > 0$, $b_{k+1} < 0$ 인 경우

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty} a_n - \sum_{n=1}^{\infty} b_n &= a_1 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_{n+1} - b_n) \\
&= a_1 + 2 \sum_{n=k+1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n \\
&= 1 + \frac{\frac{1}{2^k}}{1 - \frac{1}{2}} = 1 + \frac{2}{2^k} < \frac{51}{50}
\end{aligned}$$

$$\frac{1}{2^k} < \frac{1}{100} \text{에서 } k > 6.xx$$

따라서 자연수 k 의 최솟값은 7이고

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty} b_n &= \sum_{n=1}^k \left(\frac{1}{2}\right)^n - \sum_{n=k+1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n \\
&= \frac{\left(\frac{1}{2}\right)\left(1 - \frac{1}{2^k}\right)}{1 - \frac{1}{2}} - \frac{\frac{1}{2^{k+1}}}{1 - \frac{1}{2}} \\
&= 1 - \frac{1}{2^k} - \frac{1}{2^k} = 1 - \frac{1}{2^{k-1}}
\end{aligned}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \text{은 } k=7 \text{일 때, 최솟값 } 1 - \frac{1}{2^6} = \frac{63}{64} \text{을 갖는다.}$$

$$\therefore p+q=64+63=127$$

Day. 53

수학1, 수학2

53-1. ①

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = 4 + 2 = 6$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = f(2) = 4 + 2a + b$$

에서 함수 $f(x)$ 가 $x=2$ 에서 연속이므로

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = f(2)$$

$$\text{에서 } 6 = 4 + 2a + b$$

$$\therefore 2a + b = 2, \quad b = 2 - 2a$$

$x < 2$ 에서 $f'(x) = 2x$ 이므로

$x < 2$ 에서 함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	...	0	...	2
$f'(x)$	-	0	+	
$f(x)$	$\searrow$	극소	$\nearrow$	

따라서 함수 $f(x)$ 가 극댓값을 갖지 않으려면

$x > 2$ 에서 함수 $f(x)$ 가 증가해야 한다.

$x > 2$ 에서 $f'(x) = 2x + a$ 이고

$x > 2$ 에서 $f'(x) \geq 0$ 이므로
 $f'(2) = 4 + a \geq 0 \therefore a \geq -4$
 $a + b = -a + 2 \leq 6$
 이므로 $a + b$ 의 최댓값은 6이다.

53-2. ③

주어진 등식의 양변에 $x = 0$ 을 대입하면

$$0 = \int_0^1 f(x) dx \quad \cdots \text{㉠}$$

주어진 등식의 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$f(x) = 8x^3 + 2ax$$

㉠에서

$$\begin{aligned} \int_0^1 f(x) dx &= \int_0^1 (8x^3 + 2ax) dx \\ &= \left[2x^4 + ax^2 \right]_0^1 \\ &= 2 + a = 0 \end{aligned}$$

$$\therefore a = -2, f(x) = 8x^3 - 4x$$

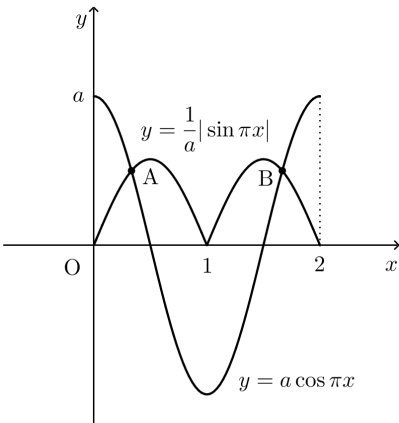
$f(x)$ 의 한 부정적분을 $F(x)$ 라 할 때,

$$\begin{aligned} &\lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{x^2 - a^2} \int_a^x f(t) dt \\ &= \lim_{x \rightarrow -2} \frac{1}{x^2 - 4} \int_{-2}^x f(t) dt \\ &= \lim_{x \rightarrow -2} \frac{F(x) - F(-2)}{(x+2)(x-2)} \\ &= \lim_{x \rightarrow -2} \frac{F(x) - F(-2)}{x - (-2)} \times \lim_{x \rightarrow -2} \frac{1}{x - 2} \\ &= -\frac{F'(-2)}{4} \\ &= -\frac{f(-2)}{4} = \frac{56}{4} = 14 \end{aligned}$$

53-3. ②

$0 \leq x \leq 2$ 에서 두 함수 $y = a \cos \pi x$, $y = \frac{1}{a} |\sin \pi x|$ 의

그래프는 그림과 같고, 두 함수의 그래프는 직선 $x = 1$ 에 대하여 대칭이다.



따라서 두 교점 A, B는 직선 $x=1$ 에 대하여 대칭이고, y 좌표가 같다. 점 A의 x 좌표가 1보다 작을 때, $\overline{AB} = \frac{4}{3}$ 이므로 점 A의 x 좌표는 $\frac{1}{3}$ 이다. 즉,

$0 < x < 1$ 에서 $a \cos \pi x = \frac{1}{a} \sin \pi x$ 의 해가 $\frac{1}{3}$ 이므로

$$a \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{a} \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \therefore a^2 = \sqrt{3}$$

삼각형 ABP의 넓이가 최소가 되는 경우는 곡선 $y = a \cos \pi x$ 위의 점 P의 y 좌표가 가장 작은 점 $(1, -a)$ 일 때이고 이때의 삼각형 ABP의 넓이는

$$S = \frac{1}{2} \times \frac{4}{3} \times \frac{3}{2} a = a$$

$$\therefore S^2 = a^2 = \sqrt{3}$$

$$\therefore S^2 \times a^2 = 3$$

53-4. ⑤

$f(x) = (x^2 - x)(x - k)$ 에서

$$f'(x) = (2x - 1)(x - k) + (x^2 - x)$$

$$f'(0) = k, f'(k) = k^2 - k$$

곡선 $y = f(x)$ 위의 점 $(0, 0)$ 에서의 접선의 방정식은

$$y = kx$$

곡선 $y = f(x)$ 위의 점 $(k, 0)$ 에서의 접선의 방정식은

$$y = (k^2 - k)(x - k)$$

두 직선의 교점의 x 좌표가 6이므로

$$kx = (k^2 - k)(x - k)$$

에서

$$6k = (k^2 - k)(6 - k)$$

$$k^3 - 7k^2 + 12k = k(k - 3)(k - 4) = 0$$

$$k > 1 \text{이므로 } k = 3 \text{ 또는 } k = 4$$

따라서 모든 k 의 값의 합은 $3 + 4 = 7$

53-5. ④

A(0, 1)이므로 B(p, q) ($p > 0$)이라 할 때,

직선 AB의 기울기는 $\frac{q-1}{p}$

직선 AD의 기울기가 $\frac{4-1}{2-0} = \frac{3}{2}$ 이다.

직선 AD의 기울기가 $\frac{3}{2}$ 이므로 직선 AB의 기울기가 $-\frac{2}{3}$ 이고

$$\frac{q-1}{p} = -\frac{2}{3}, q = -\frac{2}{3}p + 1$$

$$\overline{AB} = \sqrt{(p-0)^2 + \left(-\frac{2}{3}p\right)^2} = \left|\frac{\sqrt{13}}{3}\right|p$$

$$\overline{AD} = \sqrt{(2-0)^2 + (4-1)^2} = \sqrt{13}$$

에서 $\overline{AB} = \overline{AD}$ 이므로 $p = 3$

$$\therefore q = -1$$

따라서 점 B는 점 A를 x 축의 방향으로 3만큼, y 축의 방향으로 -2 만큼 평행이동한 점이고,

사각형 ABCD가 정사각형이므로 점 C는 점 D를 x 축의 방향으로 3만큼, y 축의 방향으로 -2 만큼 평행이동한 점이다.

따라서 $C(5, 2)$

이고 곡선 $y = g(x)$ 가 두 점 $B(3, -1)$, $C(5, 2)$ 을 지나므로

$$-1 = 2^{3-a} + b, \quad 2 = 2^{5-a} + b$$

이 두 식을 연립하여 풀면

$$a = 3, \quad b = -2 \text{이고,}$$

$$g(x) = 2^{x-3} - 2$$

$$\therefore g(2a-b) = g(8) = 2^{8-3} - 2 = 30$$

53-6. ④

점 E가 선분 AB를 2:1로 내분하는 점이므로

$$\overline{BE} = 2 \text{이고}$$

$$\cos \alpha = \frac{1}{8}, \quad \cos \beta = \frac{5\sqrt{2}}{8} \text{에서}$$

$$\sin \alpha = \frac{3\sqrt{7}}{8}, \quad \sin \beta = \frac{\sqrt{14}}{8}$$

이고 삼각형 BCE에서 사인법칙에 의하여

$$\frac{\overline{CE}}{\sin \alpha} = \frac{\overline{BE}}{\sin \beta}$$

$$\text{이므로 } \overline{CE} = 3\sqrt{2}$$

삼각형 BCE에서 코사인법칙에 의하여

$$\cos \alpha = \frac{4 + \overline{BC}^2 - 18}{2 \cdot 2 \cdot \overline{BC}} = \frac{1}{8}$$

$$\therefore \overline{BC} = 4$$

한편, $\angle EBF = \angle CDF$ 이고

$$\angle BFE = \angle DFC \text{이므로}$$

삼각형 BEF와 삼각형 DCF는 서로 닮음이다.

$$\overline{BE} : \overline{DC} = 1 : 3 \text{이므로}$$

$$\overline{EF} : \overline{CF} = 1 : 3 \text{ 따라서 } \overline{CE} : \overline{CF} = 3 : 4 \text{이므로}$$

$$\overline{CF} = \frac{9}{4} \sqrt{2}$$

따라서 삼각형 BCF의 넓이는

$$\frac{1}{2} \times \overline{BC} \times \overline{CF} \times \sin \beta$$

$$= \frac{1}{2} \times 4 \times \frac{9}{4} \sqrt{2} \times \frac{\sqrt{14}}{8} = \frac{9}{8} \sqrt{7}$$

53-7. ⑤

$$a_1 = 3, \quad a_2 = t, \quad a_3 = 1, \quad a_4 = t - 2$$

모든 자연수 n 에 대하여 $a_{n+4} = 2a_n$ 이므로

$$|a_{n+4}| = 2|a_n|$$

$$|a_5| + |a_6| + |a_7| + |a_8| = 2(|a_1| + |a_2| + |a_3| + |a_4|)$$

$$\begin{aligned} |a_9| + |a_{10}| + |a_{11}| + |a_{12}| &= 2(|a_5| + |a_6| + |a_7| + |a_8|) \\ &= 4(|a_1| + |a_2| + |a_3| + |a_4|) \end{aligned}$$

$$\vdots$$

$$|a_{17}| + |a_{18}| + |a_{19}| + |a_{20}| = 16(|a_1| + |a_2| + |a_3| + |a_4|)$$

이므로

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{20} |a_k| &= (1+2+4+8+16) \sum_{k=1}^4 |a_k| \\ &= 31(|a_1| + |a_2| + |a_3| + |a_4|)\end{aligned}$$

$t < 0$ 일 때, $a_2 < 0$, $a_4 < 0$

$0 \leq t < 2$ 일 때, $a_2 \geq 0$, $a_4 < 0$

$t \geq 2$ 일 때, $a_2 \geq 0$, $a_4 \geq 0$

이므로 각각에 경우에 대하여 t 의 값을 구해 보면

i) $t < 0$ 일 때

$$\begin{aligned}|a_1| + |a_2| + |a_3| + |a_4| \\ = 3 - t + 1 - (t - 2) = -2t + 6\end{aligned}$$

$$\sum_{k=1}^{20} |a_k| = 31 \cdot (-2t + 6) = 248 \text{에서 } t = -1$$

ii) $0 \leq t < 2$ 일 때

$$\begin{aligned}|a_1| + |a_2| + |a_3| + |a_4| \\ = 3 + t + 1 - (t - 2) = 6\end{aligned}$$

$$\sum_{k=1}^{20} |a_k| = 31 \cdot 6 = 186 \text{이므로 조건을 만족시키지 않는다.}$$

iii) $t \geq 2$ 일 때

$$\begin{aligned}|a_1| + |a_2| + |a_3| + |a_4| \\ = 3 + t + 1 + (t - 2) = 2t + 2\end{aligned}$$

$$\sum_{k=1}^{20} |a_k| = 31 \cdot (2t + 2) = 248 \text{에서 } t = 3$$

i) ~ iii)에 의하여 모든 t 의 값의 합은

$$-1 + 3 = 2$$

53-8. ⑤

함수 $g(x)$ 가 실수 전체의 집합에서 연속이므로

$$\lim_{x \rightarrow 0+} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0-} g(x) = g(0) = a$$

$$\therefore f(0) = a$$

함수 $g(x)$ 가 실수 전체의 집합에서 미분가능하므로

$$\lim_{h \rightarrow 0+} \frac{g(h) - g(0)}{h} = f'(0),$$

$$\lim_{h \rightarrow 0-} \frac{g(h) - g(0)}{h} = -2$$

$$\therefore f'(0) = -2$$

따라서 곡선 $y = f(x)$ 는 점 $(0, a)$ 에서 직선 $y = -2x + a$ 에 접한다.

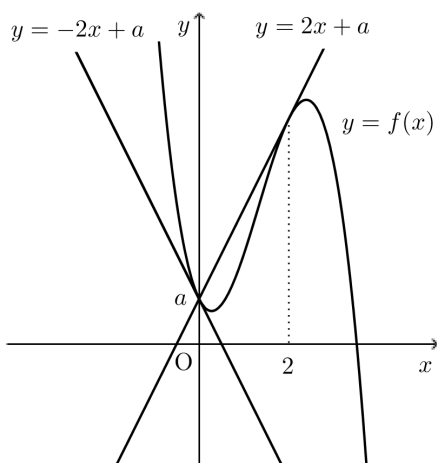
한편, 조건 (나)를 만족시키려면 $x > 0$ 에서

$$g(x) - g(-x) = f(x) - (2x + a) \geq 0$$

이고 $x > 0$ 에서

$f(x) \geq 2x + a$ 를 만족시키는 x 가 2뿐이므로

그림과 같이 함수 $y = f(x)$ 의 그래프는 직선 $y = 2x + a$ 와 점 $(2, a + 4)$ 에서 접해야 한다.



함수 $y = f(x)$ 의 그래프가 직선 $y = 2x + a$ 와 x 좌표가 0인 점에서 만나고, x 좌표가 2인 점에서 접하므로

$$f(x) - (2x + a) = bx(x-2)^2 \quad (b \neq 0)$$

로 놓을 수 있고

$$f(x) = bx(x-2)^2 + 2x + a$$

에서

$$f'(x) = b(x-2)^2 + 2bx(x-2) + 2$$

이다. 이때 $f'(0) = -2$ 이므로

$$f'(0) = 4b + 2 = -2$$

$$\therefore b = -1$$

$$f'(x) = -(x-2)^2 - 2x(x-2) + 2$$

$$\therefore f'(1) = 3$$

확률과 통계

53-9. ③

$a \times b \times c$ 가 9의 배수가 되려면

a, b, c 중 3의 배수의 수가 2개이거나 3개이어야 한다.

i) a, b, c 중 3의 배수의 수가 2개일 확률

$${}_3C_2 \left(\frac{1}{3}\right)^2 \left(\frac{2}{3}\right) = \frac{2}{9}$$

ii) a, b, c 가 모두 3의 배수일 확률

$${}_3C_3 \left(\frac{1}{3}\right)^3 = \frac{1}{27}$$

i), ii)에 의하여 구하는 확률은

$$\frac{2}{9} + \frac{1}{27} = \frac{7}{27}$$

53-10. ②

6명의 학생이 일렬로 앉는 경우의 수는 $6! = 720$

조건에 따라 6명의 학생이 앉는 경우의 수는 다음과 같이 나누어 생각할 수 있다.

i) A가 B가 아닌 두 여학생과 이웃하여 앉고, B가 A가 아닌 두 남학생과 이웃하여 앉는 경우

A의 양옆에 앉는 두 여학생의 자리를 정하는 방법의 수는

$${}_2P_2 = 2 \cdots \textcircled{㉠}$$

B의 양옆에 앉는 두 남학생의 자리를 정하는 방법의 수는

$${}_2P_2 = 2 \cdots \textcircled{㉡}$$

㉠, ㉡에서 정하는 두 그룹의 순서를 정하는 방법의 수는

$$2! = 2$$

따라서 6명의 학생이 앉는 경우의 수는

$$2 \times 2 \times 2 = 8$$

ii) B가 아닌 여학생, A, B, A가 아닌 남학생 순으로 앉는 경우

A 옆에 앉는 B가 아닌 여학생과 B 옆에 앉는 A가 아닌 남학생을 정하는 방법의 수는

$$2 \times 2 = 4 \cdots \textcircled{㉢}$$

㉢에서 정한 한 그룹과 나머지 2명의 순서를 정하는 방법의 수는

$$3! = 6$$

따라서 6명의 학생이 앉는 경우의 수는

$$4 \times 6 = 24$$

iii) A가 아닌 남학생, B, A, B가 아닌 여학생 순으로 앉는 경우

B 옆에 앉는 A가 아닌 남학생과 A 옆에 앉는 B가 아닌 여학생을 정하는 방법의 수는

$$2 \times 2 = 4 \cdots \textcircled{㉣}$$

㉣에서 정한 한 그룹과 나머지 2명의 순서를 정하는 방법의 수는

$$3! = 6$$

따라서 6명의 학생이 앉는 경우의 수는

$$4 \times 6 = 24$$

i), ii), iii)에서 조건에 맞도록 6명의 학생이 앉는 경우의 수는

$$8 + 24 + 24 = 56$$

따라서 구하는 확률은

$$\frac{56}{720} = \frac{7}{90}$$

53-11. ①

$f(x+20) = f(60-x)$ 에 x 대신 $x+20$ 을 대입하면

$$f(x+40) = f(40-x)$$

따라서 함수 $y = f(x)$ 의 그래프는 $x = 40$ 에 대하여 대칭이고

$$m = 40$$

$N(40, \sigma^2)$ 을 따르는 모집단에서 크기 16인 표본을

임의추출하여 구한 표본평균을 $\bar{X}$ 라 하면

$\bar{X}$ 는 정규분포 $N\left(40, \left(\frac{\sigma}{4}\right)^2\right)$ 을 따른다.

$$\text{이때 } V(\bar{X}) = \frac{\sigma^2}{16} = 4 \text{ 이므로 } \sigma = 8$$

$$\therefore P(36 \leq X \leq 48)$$

$$= P\left(\frac{36-40}{8} \leq Z \leq \frac{48-40}{8}\right)$$

$$= P(-0.5 \leq Z \leq 1)$$

$$= P(-0.5 \leq Z \leq 0) + P(0 \leq Z \leq 1)$$

$$\begin{aligned}
 &= P(0 \leq Z \leq 0.5) + P(0 \leq Z \leq 1) \\
 &= 0.1915 + 0.3413 \\
 &= 0.5328
 \end{aligned}$$

53-12. 63

12개의 사탕중 A, B, C, D의 개수를

각각 a, b, c, d 라 하자.

$$(0 \leq a \leq 2, 0 \leq b \leq 2, 1 \leq c \leq 12, 3 \leq d \leq 12)$$

$$a + b + c + d = 12 \text{에서}$$

$$c' + 1 = c, d' + 3 = d$$

으로 놓으면, c', d' 는 모두 정수이고,

$$0 \leq c' \leq 11, 0 \leq d' \leq 9 \text{이다.}$$

따라서

$$a + b + c' + d' = 8 \quad \cdots \textcircled{1}$$

$$a + b \leq 4 \text{이므로}$$

$a + b$ 의 값에 따라 순서쌍 (c', d') 의 개수를 구하면

i) $a + b = 0$ 인 경우

a, b 의 모든 순서쌍 (a, b) 는 $(0, 0)$ 이므로 그 개수는 1

$c' + d' = 8$ 을 만족시키는 c', d' 의 순서쌍 (c', d') 의 개수는

$${}_2H_8 = {}_9C_8 = 9$$

따라서 ①을 만족시키는 a, b, c', d' 의 순서쌍

(a, b, c', d') 의 개수는 9

ii) $a + b = 1$ 인 경우

a, b 의 모든 순서쌍 (a, b) 는 $(1, 0), (0, 1)$ 이므로

그 개수는 2

$c' + d' = 7$ 을 만족시키는 c', d' 의 순서쌍 (c', d') 의 개수는

$${}_2H_7 = {}_8C_7 = 8$$

따라서 ①을 만족시키는 a, b, c', d' 의 순서쌍

(a, b, c', d') 의 개수는 $2 \times 8 = 16$

iii) $a + b = 2$ 인 경우

a, b 의 모든 순서쌍 (a, b) 는 $(2, 0), (1, 1), (0, 2)$ 이므로

그 개수는 3

$c' + d' = 6$ 을 만족시키는 c', d' 의 순서쌍 (c', d') 의 개수는

$${}_2H_6 = {}_7C_6 = 7$$

따라서 ①을 만족시키는 a, b, c', d' 의 순서쌍

(a, b, c', d') 의 개수는 $3 \times 7 = 21$

iv) $a + b = 3$ 인 경우

a, b 의 모든 순서쌍 (a, b) 는 $(2, 1), (1, 2)$ 이므로

그 개수는 2

$c' + d' = 5$ 을 만족시키는 c', d' 의 순서쌍 (c', d') 의 개수는

$${}_2H_5 = {}_6C_5 = 6$$

따라서 ①을 만족시키는 a, b, c', d' 의 순서쌍

(a, b, c', d') 의 개수는 $2 \times 6 = 12$

v) $a+b=4$ 인 경우

a, b 의 모든 순서쌍 (a, b) 는 $(2, 2)$ 이므로

그 개수는 1

$c'+d'=4$ 를 만족시키는 c', d' 의 순서쌍 (c', d') 의 개수는

$${}_2H_4 = {}_5C_4 = 5$$

따라서 ㉠을 만족시키는 a, b, c', d' 의 순서쌍

(a, b, c', d') 의 개수는 $1 \times 5 = 5$

i)~v)에 의하여 ㉠을 만족시키는 a, b, c', d' 의 순서쌍 (a, b, c', d') 의 개수는

$$9 + 16 + 21 + 12 + 5 = 63$$

미적분

53-9. 50

$f(x) = ax \ln x + b$ 이므로

$$f'(x) = a \ln x + ax \cdot \frac{1}{x} = a \ln x + a$$

조건 (가)에서 $\lim_{x \rightarrow e} \frac{f(x) - f(e)}{x - e} = f'(e) = 4$ 이므로

$$f'(e) = a + a = 2a = 4 \text{에서 } a = 2$$

$$\therefore f(x) = 2x \ln x + b$$

조건 (나)에서

$$\begin{aligned} \int_1^e f(x) dx &= \int_1^e (2x \ln x + b) dx \\ &= \int_1^e 2x \ln x dx + \int_1^e b dx \\ &= \left[x^2 \ln x \right]_1^e - \int_1^e x dx + \left[bx \right]_1^e \\ &= e^2 - \left[\frac{1}{2} x^2 \right]_1^e + b(e-1) \\ &= \frac{1}{2} e^2 + be - b + \frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$\frac{1}{2} e^2 + be - b + \frac{1}{2} = \frac{1}{2} e(e+1)$$

$$\text{이므로 } b = \frac{1}{2}$$

$$\therefore 20(a+b) = 20 \left(2 + \frac{1}{2} \right) = 50$$

53-10. 25

$$\int_0^{2x} f'(t) dt = 1 - \cos \pi x \text{에서}$$

$$f(2x) - f(0) = 1 - \cos \pi x$$

조건 (가)에서 $f(0) = 0$ 이므로 $f(2x) = 1 - \cos \pi x$

$$\text{즉, } f(x) = 1 - \cos \frac{\pi}{2} x$$

$$g(x) = |x^3 - n^3| f(x)$$

에서 $x^2 + nx + n^2 = \left(x + \frac{n}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}n^2$ 이므로

$$g(x) = |x^3 - n^3| f(x) = |x - n|(x^2 + nx + n^2)f(x)$$

이때 함수 $g(x)$ 가 $x = n$ 에서 미분가능하려면

$g'(n)$ 의 값이 존재해야 하므로

$$\lim_{x \rightarrow n-} \frac{g(x) - g(n)}{x - n} = \lim_{x \rightarrow n+} \frac{g(x) - g(n)}{x - n} \text{ 이어야 한다.}$$

$$\begin{aligned} & \lim_{x \rightarrow n-} \frac{g(x) - g(n)}{x - n} \\ &= \lim_{x \rightarrow n-} \frac{|x - n|(x^2 + nx + n^2)f(x)}{x - n} \\ &= \lim_{x \rightarrow n-} \frac{-(x - n)(x^2 + nx + n^2)f(x)}{x - n} \\ &= \lim_{x \rightarrow n-} \{-(x^2 + nx + n^2)f(x)\} = -3n^2f(n) \quad \cdots \textcircled{㉑} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \lim_{x \rightarrow n+} \frac{g(x) - g(n)}{x - n} \\ &= \lim_{x \rightarrow n+} \frac{|x - n|(x^2 + nx + n^2)f(x)}{x - n} \\ &= \lim_{x \rightarrow n+} \frac{(x - n)(x^2 + nx + n^2)f(x)}{x - n} \\ &= \lim_{x \rightarrow n+} (x^2 + nx + n^2)f(x) = 3n^2f(n) \quad \cdots \textcircled{㉒} \end{aligned}$$

$$\textcircled{㉑}, \textcircled{㉒} \text{에서 } \lim_{x \rightarrow n-} \frac{g(x) - g(n)}{x - n} = \lim_{x \rightarrow n+} \frac{g(x) - g(n)}{x - n} \text{ 이므로}$$

$$-3n^2f(n) = 3n^2f(n)$$

$$\text{즉, } f(n) = 0 \text{ 이므로 } f(n) = 1 - \cos \frac{\pi}{2}n = 0$$

$\cos \frac{\pi}{2}n = 1$ 을 만족시키는 100 이하의 자연수 n 은

4, 8, 12, ..., 100이고, 그 개수는 25이다.

따라서 함수 $g(x)$ 가 실수 전체의 집합에서 미분가능하도록 하는 100 이하의 자연수 n 의 개수는 25이다.

53-11. 54

등비수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항을 a , 공비를 r ($0 < r < 1$)이라 하면 조건 (나)에서

$$50 \sum_{n=1}^{\infty} a_{2n-1} < \frac{5}{3} \sum_{n=1}^{\infty} (a_n)^2 < \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n \right)^2 \text{ 에서}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_{2n-1} = \frac{a}{1-r^2},$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n)^2 = \frac{a^2}{1-r^2}$$

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n \right)^2 = \frac{a^2}{(1-r)^2}$$

이므로

$$\frac{50a}{1-r^2} < \frac{5a^2}{3(1-r^2)} < \frac{a^2}{(1-r)^2}$$

이다.

$$\frac{50a}{1-r^2} < \frac{5a^2}{3(1-r^2)} \text{에서}$$

$$a^2 - 30a > 0, a > 30 \cdots \textcircled{7}$$

$$\frac{5a^2}{3(1-r^2)} < \frac{a^2}{(1-r)^2} \text{에서}$$

$$3(1-r^2) > 5(1-r)^2$$

$$4r^2 - 5r + 1 < 0,$$

$$(4r-1)(r-1) < 0 \text{에서 } r \text{이 양수이므로 } r > \frac{1}{4} \cdots \textcircled{8}$$

조건 (나)를 만족시키려면

a 가 자연수이고, ar , ar^2 이 모두 자연수이므로

r , r^2 은 유리수이다.

두 조건 ⑦, ⑧을 만족시키는 a , r 을 찾아보자.

30이상의 자연수 a 에 대하여 생각해보면,

a 는 제곱수를 양의 약수로 가져야 한다.

이 수는 32, 36, 40, ...이다.

$a = 32$ 일 때, ar , ar^2 이 모두 자연수가 되도록 하는 r 은

$$\frac{1}{2} \text{ 이고 이때}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \frac{32}{1-\frac{1}{2}} = 64$$

$a = 36$ 일 때, $r = \frac{1}{2}$, $r = \frac{1}{3}$ 이 될 수 있고 이때 각각

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \frac{36}{1-\frac{1}{2}} = 72, \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n = \frac{36}{1-\frac{1}{3}} = 54$$

$$a = 40 \text{일 때, } r = \frac{1}{2} \text{이 될 수 있고 } \sum_{n=1}^{\infty} a_n = \frac{40}{1-\frac{1}{2}} = 80$$

$$\text{그런데 } \sum_{n=1}^{\infty} a_n = \frac{a}{1-r} < 54 \text{에서}$$

$$r > \frac{1}{4} \text{이므로 } a < \frac{81}{2}$$

즉, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n < 54$ 가 되려면 a 가 40이하인 자연수여야 한다.

따라서 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 의 값이 54보다 작도록 하는 순서쌍 (a, r) 은 존재하지 않는다.

따라서 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 의 최솟값은 $a = 36$, $r = \frac{1}{3}$ 일 때 54이다.

53-12. 72

$$0 < x < \frac{\pi}{6}, \quad \frac{5}{6}\pi < x < 2\pi \text{일 때}$$

$$\left| \sin x - \frac{1}{2} \right| = -\sin x + \frac{1}{2},$$

$$\frac{\pi}{6} \leq x \leq \frac{5}{6}\pi \text{일 때,}$$

$$\left| \sin x - \frac{1}{2} \right| = \sin x - \frac{1}{2}$$

i) $0 < x < \frac{\pi}{6}$ 일 때,

$$f(x) = -k \left(\sin x - \frac{1}{2} \right) - \cos x$$

$$f'(x) = -k \cos x + \sin x$$

$$k > \frac{\sqrt{3}}{3} \text{ 이므로 } f'(x) < 0$$

ii) $\frac{\pi}{6} \leq x \leq \frac{5}{6}\pi$ 일 때,

$$f(x) = k \left(\sin x - \frac{1}{2} \right) - \cos x$$

$$f'(x) = k \cos x + \sin x$$

$$\tan \alpha = -k \left(\frac{\pi}{6} < \alpha < \frac{5}{6}\pi \right)$$

인 α 에 대하여 $\frac{\pi}{6} < x < \alpha$ 에서 $f'(x) > 0$

$\alpha < x < \frac{5}{6}\pi$ 에서 $f'(x) < 0$

iii) $\frac{5}{6}\pi < x < 2\pi$ 일 때,

$$f(x) = -k \left(\sin x - \frac{1}{2} \right) - \cos x$$

$$f'(x) = -k \cos x + \sin x$$

$$\tan \beta = k \left(\frac{5}{6}\pi < \beta < 2\pi \right)$$

인 β 에 대하여 $\frac{5}{6}\pi < x < \beta$ 에서 $f'(x) > 0$

$\beta < x < 2\pi$ 에서 $f'(x) < 0$

i)~iii)에 의하여 $0 < x < 2\pi$ 에서 함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	0	...	$\frac{\pi}{6}$	...	α	...	$\frac{5}{6}\pi$
$f'(x)$		-		+	0	-	
$f(x)$		$\searrow$	극소	$\nearrow$	극대	$\searrow$	극소

x	$\frac{5}{6}\pi$	...	β	...	2π
$f'(x)$		+	0	-	
$f(x)$	극소	$\nearrow$	극대	$\searrow$	

따라서 $\alpha_1 = \frac{\pi}{6}$, $\alpha_2 = \alpha$, $\alpha_3 = \frac{5}{6}\pi$, $\alpha_4 = \beta$ 이므로

$$\tan(\alpha_1) \times \tan(\alpha_2) \times \tan(\alpha_3) \times \tan(\alpha_4)$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{3} \times (-k) \times \left(-\frac{\sqrt{3}}{3} \right) \times k$$

$$= \frac{k^2}{3} = 24$$

$$\therefore k^2 = 72$$

Day. 54

수학1, 수학2

54-1. ③

$$f(1) = 2 \text{이고}$$

$$f'(x) = 3x^2 - 8x + 2 \text{에서 } f'(1) = -3 \text{이므로}$$

곡선 $y = f(x)$ 위의 점 $(1, f(1))$ 에서의 접선의 방정식은
 $y = -3(x-1) + 2,$

$$y = -3x + 5$$

이 직선의 y 절편이 5이므로 $a = 5$

$$\text{방정식 } f'(x) = a,$$

즉 방정식 $f'(x) = 5$ 에서

$$3x^2 - 8x + 2 = 5,$$

$$3x^2 - 8x - 3 = 0$$

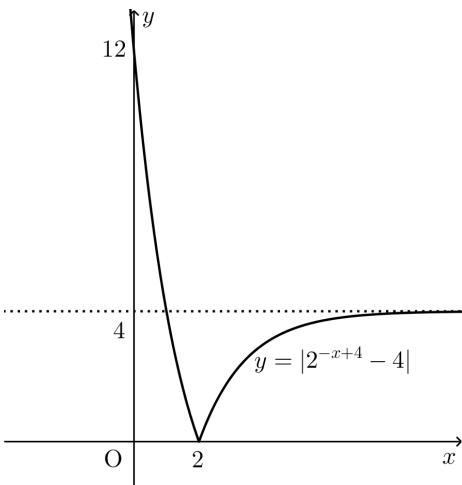
$$(3x+1)(x-3) = 0 \quad x = -\frac{1}{3} \text{ 또는 } x = 3$$

따라서 방정식 $f'(x) = a$ 의 모든 실근의 곱은

$$\left(-\frac{1}{3}\right) \times 3 = -1$$

54-2. 14

곡선 $y = |2^{-x+4} - 4|$ 의 그래프는 그림과 같다.



자연수 n 에 대하여 직선 $y = n$ 이 곡선 $y = |2^{-x+4} - 4|$ 과 제1사분면에서 만나는 점의 개수는

$1 \leq n \leq 3$ 일 때, 2이므로 $a_n = 2$

$4 \leq n \leq 11$ 일 때, 1이므로 $a_n = 1$

$n \geq 12$ 일 때, 0이므로 $a_n = 0$

따라서 구하는 값은

$$\sum_{n=1}^{20} a_n = 2 \times 3 + 1 \times 8 = 14$$

54-3. 73

$n = 1, 2, 3, \dots$ 일 때, 주어진 두 수열에 차례로 대입해 보면

$n = 1$ 일 때,

$$a_2 = 4b_1 = -\frac{4}{3}, b_2 = \frac{1}{2} - \frac{1}{a_1} = \frac{3}{10}$$

$n = 2$ 일 때,

$$a_3 = 4b_2 = \frac{6}{5}, b_3 = \frac{1}{2} - \frac{1}{a_2} = \frac{5}{4}$$

$n = 3$ 일 때,

$$a_4 = 4b_3 = 5, b_4 = \frac{1}{2} - \frac{1}{a_3} = -\frac{1}{3}$$

따라서 모든 자연수 n 에 대하여

$a_{n+3} = a_n, b_{n+3} = b_n$ 이다.

$$\begin{aligned} & \sum_{n=1}^3 (a_n + b_n) \\ &= \left(5 - \frac{4}{3} + \frac{6}{5}\right) + \left(-\frac{1}{3} + \frac{3}{10} + \frac{5}{4}\right) \\ &= \frac{73}{12} \end{aligned}$$

$$\sum_{n=1}^3 (a_n + b_n) = \sum_{n=4}^6 (a_n + b_n) = \dots = \sum_{n=34}^{36} (a_n + b_n)$$

이므로

$$\sum_{n=1}^{36} (a_n + b_n) = 12 \sum_{n=1}^3 (a_n + b_n) = 12 \times \frac{73}{12} = 73$$

54-4. ⑤

함수 $xf(x)$ 의 한 부정적분을 $F(x)$ 라 하자.

$$\begin{aligned} & \lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{x-2} \int_2^x tf(t)dt \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{F(x) - F(2)}{x-2} \\ &= F'(2) = 2f(2) = 20 \end{aligned}$$

에서

$$2f(2) = 2(4 + 2k + 2) = 20$$

$$\therefore k = 2$$

$$f(x) = x^2 + 2x + 2 \text{에서}$$

$$f'(x) = 2x + 2$$

따라서

$$\begin{aligned} & \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2) - f(2-h)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2-h) - f(2)}{-h} = f'(2) \\ & \therefore f'(2) = 4 + 2 = 6 \end{aligned}$$

54-5. ③

$\overline{OP} = \frac{20}{9}$ 이고 삼각형 OPB의 넓이가 10이므로

$$\frac{1}{2} \times \overline{OP} \times 2b = 10$$

$$\frac{1}{2} \times \frac{20}{9} \times 2b = 10$$

$$\therefore b = \frac{9}{2}$$

선분 AB에서

$$(\text{점 B의 } y\text{좌표}) - (\text{점 P의 } y\text{좌표}) = 2b,$$

$$(\text{점 P의 } y\text{좌표}) - (\text{점 B의 } y\text{좌표}) = b$$

이므로 점 P는 선분 AB를 1:2로 내분하는 점이다.

점 A의 x 좌표는

$$\log_a(x+1) = -b$$

$$x+1 = a^{-b}, x = a^{-b} - 1$$

에서 $a^{-b} - 1$

점 B의 x 좌표는

$$\log_a(x+1) = 2b$$

$$x+1 = a^{2b}, x = a^{2b} - 1$$

에서 $a^{2b} - 1$

점 P의 x 좌표가 $\frac{20}{9}$ 이고 점 P가 선분 AB를 1:2로 내분하는

점이므로

$$\frac{1}{3} \{ 2 \cdot (a^{-b} - 1) + (a^{2b} - 1) \} = \frac{20}{9}$$

$$a^{2b} + 2 \cdot a^{-b} - \frac{29}{3} = 0$$

$a^b = t$ 로 놓으면 $a > 1, b = \frac{9}{2}$ 이므로 $a^b = t > 1$

$$t^2 + 2t^{-1} - \frac{29}{3} = 0$$

$$3t^3 - 29t + 6 = 0, (t-3)(3t^2 + 9t - 2) = 0$$

$$t = 3 \text{ 또는 } t = \frac{-9 \pm \sqrt{105}}{6} \text{ 에서}$$

$t > 1$ 이므로 $t = 3$

따라서 $a^b = 3$ 이므로 $a^{\frac{9}{2}} = 3$

$$\therefore a^3 = 3^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{9}$$

54-6. ③

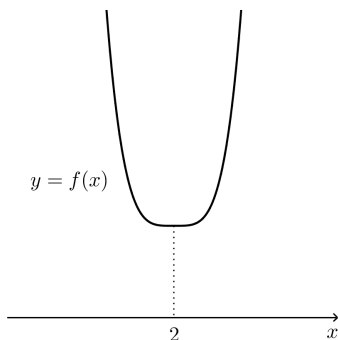
조건 (가)에서 최고차항의 계수가 1인 사차함수 $f(x)$ 는

$f(2-x) = f(2+x)$ 이므로 함수 $y = f(x)$ 의 그래프는 직선

$x = 2$ 에 대하여 대칭이다. 이 경우 다음과 같은 경우가 존재한다.

i) $f(x)$ 가 $x = 2$ 에서 극소(최소)인 경우

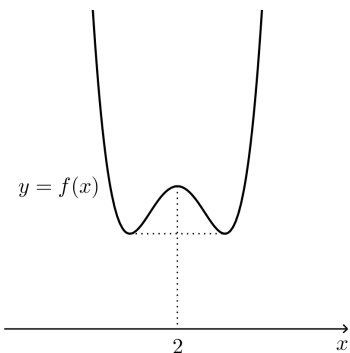
함수 $y = f(x)$ 의 그래프는 그림과 같다.



이때 $f(x) - p = 0$ 의 서로 다른 실근의 개수가 2가 되도록 하는 실수 p 의 최솟값이 존재하지 않으므로 조건 (나)를 만족시키지 않는다.

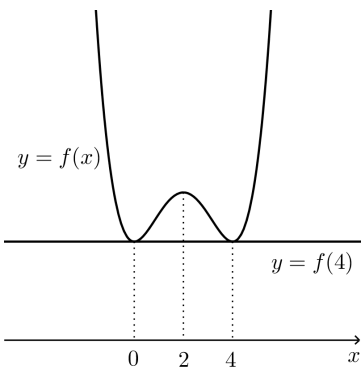
ii) $f(x)$ 가 $x=2$ 에서 극대인 경우

함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 그림과 같다.



조건 (나)를 만족시키려면

$x=4$ 에서 $f(x)$ 가 극소이어야 한다.



이때, $f(0) = f(4)$ 이고, $x=0$, $x=4$ 에서

함수 $y=f(x)$ 의 그래프가 직선 $y=f(4)$ 에 접하므로

$$f(x) = x^2(x-4)^2 + f(4)$$

$$f'(x) = 2x(x-4)^2 + 2x^2(x-4)$$

$$\therefore f'(1) = 12$$

54-7. ④

$\overline{BE} = 6$ 이고 삼각형 ABE가 $\angle BAE = \frac{\pi}{2}$ 인 직각삼각형이므로

$$\overline{AB} = \sqrt{\overline{BE}^2 - \overline{AE}^2}$$

$$= \sqrt{36 - 24} = 2\sqrt{3}$$

$\angle ABE = \theta$ 라 할 때,

$$\cos \theta = \frac{\overline{AB}}{\overline{BE}} = \frac{2\sqrt{3}}{6} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

삼각형 ABC에서 코사인법칙에 의하여

$$\overline{AC} = \sqrt{\overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 - 2 \cdot \overline{AB} \cdot \overline{BC} \cdot \cos \theta}$$

$$= \sqrt{12 + 100 - 2 \cdot 2\sqrt{3} \cdot 10 \cdot \frac{\sqrt{3}}{3}} = 6\sqrt{2}$$

삼각형 ABC에서 사인법칙에 의하여

$$\frac{\overline{BC}}{\sin(\angle BAC)} = \frac{\overline{AC}}{\sin \theta}$$

이고 $\sin\theta = \frac{\sqrt{6}}{3}$ 이므로

$$\frac{10}{\sin(\angle BAC)} = \frac{6\sqrt{2}}{\frac{\sqrt{6}}{3}}$$

$$\therefore \sin(\angle BAC) = \frac{5}{9}\sqrt{3}$$

삼각형 ABD가 반지름의 길이가 3인 원에 내접하므로
사인법칙에 의하여

$$\begin{aligned}\overline{BD} &= 2 \times 3 \times \sin(\angle BAC) \\ &= 2 \times 3 \times \frac{5}{9}\sqrt{3} = \frac{10}{3}\sqrt{3}\end{aligned}$$

54-8. 55

모든 실수 x 에 대하여 $f(x) \geq 0$ 이면

$$x < a \text{ 일 때, } \int_a^x f(t) dt < 0,$$

$$x \geq a \text{ 일 때, } \int_a^x f(t) dt \geq 0$$

이므로 모든 실수 x 에 대하여 $(x-a) \int_a^x f(t) dt \geq 0$ 이 될 수

없으므로 조건 (가)를 만족시키지 않는다.

따라서 방정식 $f(x) = 0$ 은 서로 다른 두 실근을 갖는다.

이 두 실근을 α, β ($\alpha < \beta$)라 하면

$f(x) = (x-\alpha)(x-\beta)$ 이다.

i) $a \geq \beta$ 일 때,

모든 실수 x 에 대하여

$$(x-a) \int_a^x f(t) dt \geq 0$$

이 성립하려면 $x < a$ 인 모든 실수 x 에 대하여

$$\int_a^x f(t) dt \leq 0$$

이므로

$$\int_a^\alpha f(t) dt \leq 0, \int_\alpha^a f(t) dt \geq 0 \text{ 이 되어야 한다.}$$

$$\begin{aligned}\int_\alpha^a f(t) dt &= \int_\alpha^a (t-\alpha)(t-\beta) dt \\ &= \frac{1}{6}(a-\alpha)^2(2a+\alpha-3\beta)\end{aligned}$$

에서 $2a+\alpha-3\beta \geq 0$

$$a \geq \frac{3\beta-\alpha}{2} \dots \textcircled{7}$$

ii) $\alpha \leq a < \beta$ 일 때,

$x > a$ 에서 $\int_a^x f(x) dx \leq 0$ 인 x 가 존재하므로

모든 실수 x 에 대하여

$$(x-a) \int_a^x f(t) dt \geq 0$$

를 만족시키는 a 는 존재하지 않는다.

iii) $a < \alpha$ 일 때,

모든 실수 x 에 대하여

$$(x-a) \int_a^x f(t)dt \geq 0$$

이 성립하려면 $x > a$ 인 모든 실수 x 에 대하여

$$\int_a^x f(t)dt \geq 0$$

이므로

$$\int_a^\beta f(t)dt \geq 0 \text{이 되어야한다.}$$

$$\begin{aligned} \int_a^\beta f(t)dt &= \int_a^\beta (t-\alpha)(t-\beta)dt \\ &= -\frac{1}{6}(a-\beta)^2(2a-3\alpha+\beta) \end{aligned}$$

에서 $2a-3\alpha+\beta \leq 0$

$$a \leq \frac{3\alpha-\beta}{2}$$

i) ~ iii)에서

$$a \geq \frac{3\beta-\alpha}{2} \text{ 또는 } a \leq \frac{3\alpha-\beta}{2}$$

조건을 만족시키는 양수 a 의 최솟값이 10이므로

$$\frac{3\beta-\alpha}{2} = 10, \frac{3\alpha-\beta}{2} \leq 0 \dots \textcircled{7}$$

이다. 한편 조건 (나)에서

iv) $a \geq \beta$

일 때, 모든 실수 x 에 대하여

$$\int_a^x (t-a)f(t)dt \geq 0$$

이 성립하려면 $x < a$ 에서

$$\int_x^a (t-a)(t-\alpha)(t-\beta)dt \leq 0$$

이므로

$$a-\beta \geq \beta-\alpha$$

에서 $a \geq 2\beta-\alpha$

v) $\alpha < a < \beta$ 일 때,

$x > a$ 에서 $\int_a^x (t-a)f(t)dx \leq 0$ 인 x 가 존재하므로

모든 실수 x 에 대하여

$$\int_a^x (t-a)f(t)dt \geq 0$$

를 만족시키는 a 는 존재하지 않는다.

vi) $a < \alpha$ 일 때,

모든 실수 x 에 대하여

$$\int_a^x (t-a)f(t)dt \geq 0$$

이 성립하려면 $x > a$ 에서

$$\int_a^x (t-a)(t-\alpha)(t-\beta)dt \geq 0$$

이므로

$$\alpha - a \geq \beta - \alpha$$

$$\text{에서 } a \leq 2\alpha - \beta$$

iv)~vi. 에서

$$a \geq 2\beta - \alpha \text{ 또는 } a \leq 2\alpha - \beta$$

조건을 만족시키는 음수 a 의 최댓값이 -5 이므로

$$2\beta - \alpha \geq 0, 2\alpha - \beta = -5 \quad \cdots \textcircled{L}$$

$\textcircled{I}, \textcircled{L}$ 에 의하여

$$\alpha = 1, \beta = 7 \text{이므로}$$

$$f(x) = (x-1)(x-7)$$

$$\therefore f(12) = 11 \times 5 = 55$$

[참고]

$f(x) = (x-\alpha)(x-\beta)$ 에 대하여

$k > \beta$ 일 때,

$$\int_{\alpha}^{\beta} |f(x)| dx = \int_{\beta}^k |f(x)| dx$$

$$\text{이면 } k - \beta = \frac{1}{2}(\beta - \alpha), \text{ 즉 } k = \frac{3}{2}\beta - \frac{1}{2}\alpha$$

$k < \alpha$ 일 때,

$$\int_{\alpha}^{\beta} |f(x)| dx = \int_k^{\alpha} |f(x)| dx$$

$$\text{이면 } \alpha - k = \frac{1}{2}(\beta - \alpha), \text{ 즉 } k = \frac{3}{2}\alpha - \frac{1}{2}\beta$$

확률과 통계

54-9. ②

연속확률변수의 정의에 의하여

세 점 $(-a, 0)$, $(2a, 0)$, $(0, 1)$ 을 꼭짓점으로 하는 삼각형의 넓이가 1이므로

$$\frac{1}{2} \times 3a \times 1 = 1, a = \frac{2}{3}$$

$$\begin{aligned} P(A \cap B) &= P\left(0 \leq X \leq \frac{1}{2}\right) \\ &= \frac{1}{2} \times \left(1 + \frac{5}{8}\right) \times \frac{1}{2} = \frac{13}{32} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(A^c \cap B) &= P\left(-\frac{1}{2} \leq X \leq 0\right) \\ &= \frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{4} + 1\right) \times \frac{1}{2} = \frac{5}{16} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(B) &= P(A \cap B) + P(A^c \cap B) \\ &= \frac{13}{32} + \frac{5}{16} = \frac{23}{32} \end{aligned}$$

$$\therefore P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{13}{32}}{\frac{23}{32}} = \frac{13}{23}$$

54-10. ⑤

네 개의 문자를 중복을 허락하여 나열하는 경우의 수는

$$4^4 = 256$$

네 개의 문자를 각각 한 개씩 사용하여 나열하는 경우의 수는

$$4! = 24$$

두 번 이상 나오는 문자가 존재하는 경우의 수는 네 개의 문자를 중복하여 나열하는 경우의 수에서 네 개의 문자를 각각 한 개씩 사용하여 나열하는 경우의 수를 뺀 것과 같다.

따라서 구하는 경우의 수는

$$256 - 24 = 232$$

54-11. 19

$P(X \geq 10) \leq P(X \leq 16)$ 에서

$m - 10 \leq 16 - m$ 이므로

$$m \leq 13$$

$P(X \leq 16) \leq P(X \geq 8)$ 에서

$16 - m \leq m - 8$ 이므로

$$m \geq 12$$

따라서 $m = 12$ 또는 $m = 13$

정규분포 $N(m, \sigma^2)$ 를 따르는 모집단에서 크기가 4인 표본을 임의추출하여 구한 표본평균이 확률변수 $\bar{X}$ 이므로 확률변수

$\bar{X}$ 는 정규분포 $N\left(m, \left(\frac{\sigma}{2}\right)^2\right)$ 을 따른다. 이때

$$P(\bar{X} \geq 18) \geq P(\bar{X} \leq 7)$$

에서 $18 - m \leq m - 7$ 이므로

$$2m \geq 25, m \geq \frac{25}{2}$$

$$\therefore m = 13$$

$$\begin{aligned} P(\bar{X} \leq 7) &= P\left(Z \leq \frac{7-13}{\frac{\sigma}{2}}\right) \\ &= P\left(Z \leq -\frac{12}{\sigma}\right) \end{aligned}$$

이때

$$\begin{aligned} P(Z \leq -2) &= 0.5 - P(-2 \leq Z \leq 0) \\ &= 0.5 - 0.4772 = 0.0228 \end{aligned}$$

$$\text{이므로 } -\frac{12}{\sigma} = -2$$

$$\therefore \sigma = 6$$

$$\therefore m + \sigma = 13 + 6 = 19$$

54-12. 140

i) 첫 번째 자리에 a 가 있고, 마지막 자리에 a 가 있는 경우

$$\square b \square b \square b \square b \square b \square b \square$$

에서 $\square$ 에는 적어도 하나의 a 가 들어간다.

첫 번째 자리부터 각각의 $\square$ 에 들어가는 a 의 수를

$x_1, x_2, \dots, x_7$ 이라 하면

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 = 9$$

이때 $x_1, x_2, \dots, x_7$ 이 자연수이므로

$$x_1 = x_1' + 1, x_2 = x_2' + 1, \dots, x_7 = x_7' + 1$$

$$x_1' + x_2' + x_3' + x_4' + x_5' + x_6' + x_7' = 2$$

이고 $x_1', x_2', \dots, x_7'$ 이 음이 아닌 정수이므로

구하는 경우의 수는

$${}_7H_2 = {}_8C_2 = 28$$

ii) 첫 번째 자리에 a 가 있고, 마지막 자리에 a 가 없는 경우

$$\square b \square b \square b \square b \square b \square b$$

에서 $\square$ 에는 적어도 하나의 a 가 들어간다.

첫 번째 자리부터 각각의 $\square$ 에 들어가는 a 의 수를

$$x_1, x_2, \dots, x_6$$
이라 하면

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 = 9$$

이때 $x_1, x_2, \dots, x_6$ 이 자연수이므로

$$x_1 = x_1' + 1, x_2 = x_2' + 1, \dots, x_6 = x_6' + 1$$

$$x_1' + x_2' + x_3' + x_4' + x_5' + x_6' = 3$$

이고 $x_1', x_2', \dots, x_6'$ 이 음이 아닌 정수이므로

구하는 경우의 수는

$${}_6H_3 = {}_8C_3 = 56$$

iii) 첫 번째 자리에 b 가 있고, 마지막 자리에 a 가 있는 경우

$$b \square b \square b \square b \square b \square b$$

에서 $\square$ 에는 적어도 하나의 a 가 들어간다.

첫 번째 자리부터 각각의 $\square$ 에 들어가는 a 의 수를

$$x_1, x_2, \dots, x_6$$
이라 하면

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 = 9$$

이때 $x_1, x_2, \dots, x_6$ 이 자연수이므로

$$x_1 = x_1' + 1, x_2 = x_2' + 1, \dots, x_6 = x_6' + 1$$

$$x_1' + x_2' + x_3' + x_4' + x_5' + x_6' = 3$$

이고 $x_1', x_2', \dots, x_6'$ 이 음이 아닌 정수이므로

구하는 경우의 수는

$${}_6H_3 = {}_8C_3 = 56$$

i)~iii)에 의하여 구하는 경우의 수는

$$28 + 56 + 56 = 140$$

미적분

54-9. ②

조건 (가)에서

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x)}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{ae^{2x} + be^x + c}{x-2} = 0 \text{이므로}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 0 \text{에서 } f(2) = 0 \text{이므로}$$

$$ae^4 + be^2 + c = 0 \quad \cdots \textcircled{1}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x)}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x-2} = f'(2) = 0$$

$$f'(x) = 2ae^{2x} + be^x \text{에서}$$

$$f'(2) = 2ae^4 + be^2 = 0 \quad \dots \textcircled{L}$$

㉠, ㉡에 의하여

$$b = -2ae^2, \quad c = ae^4$$

따라서

$$f(x) = ae^{2x} - 2ae^2e^x + ae^4 = a(e^x - e^2)^2$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} a(e^x - e^2)^2 = ae^4 = 1 \text{ 이므로 } a = e^{-4} \text{ 이다.}$$

따라서

$$f(x) = \frac{1}{e^4} (e^x - e^2)^2 = e^{2x-4} - 2e^{x-2} + 1$$

이때

$$f'(x) = 2e^{x-4}(e^x - e^2)$$

이므로 $x \geq 2$ 에서 $f(x)$ 는 증가한다.

또한 $f(2 + \ln 2) = 1$ 이므로

$$2 \leq x < 2 + \ln 2 \text{에서 } f(x) - 1 < 0,$$

$$x \geq 2 + \ln 2 \text{에서 } f(x) - 1 \geq 0$$

따라서

$$\begin{aligned} & \int_2^{2+\ln 3} |f(x) - 1| dx \\ &= \int_2^{2+\ln 2} \{-f(x) + 1\} dx + \int_{2+\ln 2}^{2+\ln 3} \{f(x) - 1\} dx \\ &= \int_2^{2+\ln 2} (-e^{2x-4} + 2e^{x-2}) dx + \int_{2+\ln 2}^{2+\ln 3} (e^{2x-4} - 2e^{x-2}) dx \\ &= \left[-\frac{1}{2}e^{2x-4} + 2e^{x-2} \right]_2^{2+\ln 2} + \left[\frac{1}{2}e^{2x-4} - 2e^{x-2} \right]_{2+\ln 2}^{2+\ln 3} \\ &= (-2 + 4) - \left(-\frac{1}{2} + 2 \right) + \left(\frac{9}{2} - 6 \right) - (2 - 4) \end{aligned}$$

54-10. ㉡

급수의 성질에 의하여

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n - 2)^2 \text{의 값이 존재하므로}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - 2) = 0$$

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 2, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} a_{n+1} = 2$$

조건 (나)에서

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n)^2 = \lim_{n \rightarrow \infty} (4a_{n+1} - k) = 4 \lim_{n \rightarrow \infty} a_{n+1} - k$$

$$4 = 8 - k$$

$$\text{이므로 } k = 4$$

모든 자연수 n 에 대하여

$$a_n^2 = 4a_{n+1} - 4 \text{에서}$$

$$a_n^2 - 4a_n + 4 = 4a_{n+1} - 4a_n$$

$$(a_n - 2)^2 = 4(a_{n+1} - a_n) \text{이므로 조건 (가)에서}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n - 2)^2$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{n=1}^{\infty} 4(a_{n+1} - a_n) \\
&= 4 \lim_{n \rightarrow \infty} \{(a_2 - a_1) + (a_3 - a_2) + \cdots + (a_{n+1} - a_n)\} \\
&= 4 \lim_{n \rightarrow \infty} (a_{n+1} - a_1) \\
&= 4 \lim_{n \rightarrow \infty} a_{n+1} - 4a_1 = 8 - 4a_1 = 16 \\
&\therefore a_1 = -2
\end{aligned}$$

54-11. ②

삼각형 OPQ에 대하여

$\angle POQ = \theta$ 라 하자.

점 P의 좌표가 $\left(\cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right), \sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)\right)$, 즉 $(\sin\theta, \cos\theta)$ 이므로

$$\tan\theta = \frac{t}{e^{2t} - 1} \text{이다.}$$

이때

$$\overline{OP} = \sqrt{t^2 + (e^{2t} - 1)^2}$$

이므로

$$\begin{aligned}
S(t) &= \frac{1}{2} \overline{OP}^2 \tan\theta \\
&= \frac{1}{2} \cdot \{t^2 + (e^{2t} - 1)^2\} \cdot \frac{t}{e^{2t} - 1} \\
&= \frac{t \{t^2 + (e^{2t} - 1)^2\}}{2(e^{2t} - 1)} \\
\therefore \lim_{t \rightarrow 0+} \frac{S(t)}{t^2} &= \lim_{t \rightarrow 0+} \frac{t \{t^2 + (e^{2t} - 1)^2\}}{2t^2(e^{2t} - 1)} \\
&= \frac{1}{2} \times \lim_{t \rightarrow 0+} \frac{t^2 + (e^{2t} - 1)^2}{t^2} \times \lim_{t \rightarrow 0+} \frac{t}{(e^{2t} - 1)} \\
&= \frac{1}{2} \times \lim_{t \rightarrow 0+} \left\{1 + 4 \left(\frac{e^{2t} - 1}{2t}\right)^2\right\} \times \lim_{t \rightarrow 0+} \frac{1}{2} \left(\frac{2t}{e^{2t} - 1}\right) \\
&= \frac{1}{2} \times (1 + 4) \times \frac{1}{2} = \frac{5}{4}
\end{aligned}$$

54-12. ①

$$g(x) = \pi^2 x \int_0^x f(t) dt - \pi^2 \int_0^x t f(t) dt \text{에서}$$

$$\begin{aligned}
g'(x) &= \pi^2 \int_0^x f(t) dt + \pi^2 x f(x) - \pi^2 x f(x) \\
&= \pi^2 \int_0^x f(t) dt
\end{aligned}$$

$$g''(x) = \pi^2 f(x) = \pi^2 \cos(2\pi x)$$

이고 $g'(0) = 0$, $g(0) = 0$ 이므로

$$g'(x) = \int \pi^2 \cos(2\pi x) dx = \frac{\pi}{2} \sin(2\pi x)$$

$$g(x) = \int \frac{\pi}{2} \sin(2\pi x) dx = -\frac{1}{4} \cos(2\pi x) + \frac{1}{4}$$

이다.

함수 $h(x)$ 는 $x=a$ 에서 미분가능할 때,

함수 $h(x)$ 는 $x=a$ 에서 연속이고

$$\lim_{x \rightarrow a-} h(x) = g(a)$$

$$\lim_{x \rightarrow a+} h(x) = h(a) = f(0) - g(a)$$

에서

$$\lim_{x \rightarrow a-} h(x) = \lim_{x \rightarrow a+} h(x) = h(a)$$

$$\text{이므로 } g(a) = f(0) - g(a)$$

$$f(0) = 1 \text{ 이므로}$$

$$2g(a) = 1, g(a) = \frac{1}{2} \quad \cdots \textcircled{7}$$

함수 $h(x)$ 가 $x=a$ 에서 미분가능하므로

$$\begin{aligned} \lim_{p \rightarrow 0-} \frac{h(a+p) - h(a)}{p} &= \lim_{p \rightarrow 0-} \frac{g(a+p) - g(a)}{p} \\ &= g'(a) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lim_{p \rightarrow 0+} \frac{h(a+p) - h(a)}{p} &= \lim_{p \rightarrow 0+} \frac{f(p) - g(a) - f(0) + g(a)}{p} \\ &= \lim_{p \rightarrow 0+} \frac{f(p) - f(0)}{p} \\ &= f'(0) \end{aligned}$$

$$\text{이때 } f'(x) = -2\pi \sin(2\pi x)$$

$$\text{에서 } f'(0) = 0 \text{ 이고}$$

$$g(a) = \frac{1}{2} \text{ 에서 } -\frac{1}{4} \cos(2\pi a) + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$$

$$\cos(2\pi a) = -1 \text{ 이므로}$$

$$g'(a) = \frac{\pi}{2} \sin(2\pi a) = 0 \text{ 이다.}$$

$$\text{따라서 } g'(a) = f'(0) \text{ 이므로}$$

$$\lim_{p \rightarrow 0-} \frac{h(a+p) - h(a)}{p} \text{의 값과 } \lim_{p \rightarrow 0+} \frac{h(a+p) - h(a)}{p} \text{의 값이}$$

서로 같으므로 $x=a$ 에서 함수 $h(x)$ 는 미분가능하다.

$$\text{따라서 } \textcircled{7} \text{의 조건 } g(a) = \frac{1}{2}$$

을 만족시키면 함수 $h(x)$ 가 $x=a$ 에서 미분가능하고, 함수 $h(x)$ 가 실수 전체의 집합에서 미분가능하다.

$$g(a) = -\frac{1}{4} \cos(2\pi x) + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$$

$$\text{에서 } \cos(2\pi a) = -1$$

따라서 이를 만족시키는 양수 a 를 작은 수부터 크기순으로

$$\text{나열하면 } \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2}, \dots$$

$$\text{이므로 } a_n = \frac{2n-1}{2} \text{ 이다.}$$

$$\text{따라서 } \sum_{k=1}^m a_k = \sum_{k=1}^m \frac{2k-1}{2} = \frac{m^2}{2} = 18$$

$$\therefore m = 6$$