백일대장

수능 역전을 위한 백일 전략서

07

정답 및 해설

100人대장

Day. 43

수학1, 수학2

43-1. ③

수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공비를 r(r는 양수)라 하자.

$a_n = ar^{n-1}$($a \neq 0$. 라 할 때,

$a_1 + a_2 = a + ar = a(1+r)$

$a_3 = ar^2$이므로

$a(1+r) = \dfrac{3}{4}ar^2$

$3r^2 = 4(1+r)$, $3r^2 - 4r - 4 = (3r+2)(r-2) = 0$

공비가 양수이므로 $r = 2$

$$\sum_{k=1}^{7}(k + a_k) = \frac{7 \cdot 8}{2} + \frac{a(2^7 - 1)}{2-1} = 409$$

$$= 28 + 127a = 409$$

$381 = 127a$이므로 $a = 3$

따라서 구하는 값은 $a_2 = ar = 6$이다.

43-2. ③

i) $x \geq 2a$일 때, $f'(x) = 3x^2 + 12x + 15 > 0$이므로 함수 $f(x)$는 증가한다.

ii) $x \leq 2a$일 때, $f'(x) = 3(x+5)(x-1)$이므로 함수 $f(x)$가 증가하려면 $2a \leq -5$, $a \leq -\dfrac{5}{2}$

따라서 정수 a의 최댓값은 -3이다.

43-3. ⑤

점 A와 점 B를 이은 직선이 y축과 만나는 점을 점 C라 하자.

삼각형 OAB가 $\angle \mathrm{AOB} = \dfrac{\pi}{6}$인 이등변삼각형이므로

$\angle \mathrm{OAC} = \dfrac{\pi}{3}$이다.

따라서 삼각형 OAB는 $\overline{\mathrm{OA}} = 2$이고 $\angle \mathrm{OAC} = \dfrac{\pi}{3}$인

직각삼각형이므로 점 A의 좌표는 $(-1, \sqrt{3})$이다.

$a^{-1} = \sqrt{3}$

$a = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$이다.

점 A의 좌표는 $(-1, \sqrt{3})$이므로

점 B의 좌표는 $(-3, \sqrt{3})$이다.

$a^{-3} + b = \sqrt{3}$

$a = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$이므로

$$\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^{-3}+b=\sqrt{3}$$

$b=-2\sqrt{3}$ 이다.

따라서 $a^2\times b^2$의 값은

$$\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^{2}\times(-2\sqrt{3})^2=4 \text{ 이다.}$$

43-4. 38

조건에서

$\int_0^2 f(t)dt\neq 0$이라 하면

$$\lim_{x\to2}\frac{\int_0^x f(t)dt+f(x)-f(2)}{\int_0^x f(t)dt-f(x)+f(2)}=1\text{이므로 조건에 모순이다.}$$

따라서 $\int_0^2 f(t)dt=0$ $\cdots$ ㉠

$$F(x)=\int_0^x f(t)dt+f(x)-f(2)$$

$$G(x)=\int_0^x f(t)dt-f(x)+f(2)$$

라 하면

$$\lim_{x\to2}\frac{\int_0^x f(t)dt+f(x)-f(2)}{\int_0^x f(t)dt-f(x)+f(2)}=\lim_{x\to2}\frac{F(x)}{G(x)}=\frac{F'(2)}{G'(2)}=2$$

$F'(2)=f(2)+f'(2),\ G'(2)=f(2)-f'(2)$

$f(2)+f'(2)=2(f(2)-f'(2))$

$f(2)=3f'(2)$ $\cdots$ ㉡

$f(x)=x^2+ax+b$로 놓고

㉠, ㉡ 조건에 맞는 $a,\ b$를 잡으면

$$a=-\frac{14}{3},\ b=\frac{10}{3}$$

$$f(x)=x^2-\frac{14}{3}x+\frac{10}{3}$$

$f(-4)=38$

43-5. ⑤

$f(x)$가 $x=-1,\ x=1$에서 연속이므로

$f(x)=(x^2-1)(x+a)+2x+1$로 둘 수 있다.

함수 $g(x)$가 실수 전체의 집합에서 역함수가 존재하므로

$-1<x<1$에서 $g(x)$가 증가해야 한다.

$f'(x)=2x(x+a)+(x^2-1)+2=3x^2+2ax+1$에서

$-1<x<1$에서 $f'(x)\geq 0$이 되도록 하는 a의 범위는

$-\sqrt{3}\leq a\leq\sqrt{3}$ 이다.

$f(0)=-a+1$에서 $a=-\sqrt{3}$일 때,

$f(0)$는 최댓값 $1+\sqrt{3}$을 갖는다.

43-6. ①

수열 $\{b_n\}$의 첫째항을 b, 공차를 d라 하면

$b_n = b+(n-1)d$ 이므로

$nb_n = bn+n(n-1)d = dn^2+(b-d)n$이다.

즉, 수열 $\{3^{a_n}\}$은 첫째항이 b이고

공차가 $2d$인 등차수열이므로

$3^{a_n} = b+(n-1)\times 2d$이다.

$a_2 = 2,\ a_{20} = 4$에서 $3^{a_2} = b+2d = 9$

$3^{a_{20}} = b+38d = 81$

이므로 이를 연립하면 $b=5,\ d=2$이다.

즉, $3^{a_n} = 4n+1$이다.

$$\sum_{n=1}^{10}\frac{1}{3^{a_n+a_{n+1}}} = \sum_{n=1}^{10}\frac{1}{(4n+1)(4n+5)}$$

$$= \frac{1}{4}\sum_{n=1}^{10}\left(\frac{1}{4n+1}-\frac{1}{4n+5}\right) = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{45}\right) = \frac{2}{45}$$ 이다.

43-7. ③

삼각형 CPQ에 외접하는 원의 넓이가 $\frac{16}{7}\pi$이므로

외접원의 반지름은 $\frac{4\sqrt{7}}{7}$ 이다.

사인법칙을 이용하면 $\sin(\angle \mathrm{CPQ}) = \frac{3\sqrt{7}}{8}$ 이고

$\cos(\angle \mathrm{CPQ}) = -\frac{1}{8}$ 또는 $\cos(\angle \mathrm{CPQ}) = \frac{1}{8}$에서

$\angle \mathrm{BPQ} < \frac{\pi}{2}$ 이므로 $\cos(\angle \mathrm{CPQ}) = -\frac{1}{8}$이다.

이를 이용하면 $\overline{\mathrm{PB}} = \overline{\mathrm{PC}} = \overline{\mathrm{PQ}} = 2$이다.

또한 삼각형 BCQ에 외접하는 원을 생각하면

직선 BQ와 직선 AC는 서로 수직이므로

$\overline{\mathrm{BQ}} = \sqrt{7}$, $\overline{\mathrm{AQ}} = 2$, $\sin(\angle \mathrm{BAC}) = \frac{\sqrt{7}}{\sqrt{11}}$

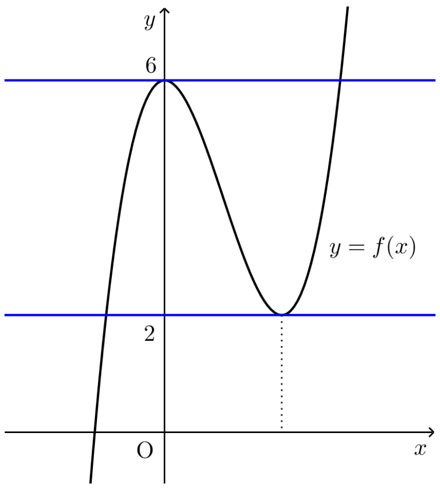
삼각형 ABC에 외접하는 원의 반지름의 길이는

$$\frac{4}{2\times\frac{\sqrt{7}}{\sqrt{11}}} = \frac{2\sqrt{11}}{\sqrt{7}}$$

따라서 외접하는 원의 넓이는 $\frac{44}{7}\pi$이다.

43-8. ②

함수 $y=f(x)$의 그림은 다음과 같다.



$n(A)=5$가 되려면 방정식 $g(x)=0$의
한 근이 2 또는 6이 되어야 하고
나머지 한 근은 2보다 크고 6보다 작은 수가 되어야 한다.
즉 방정식 $g(x)=0$의 근을 α, β라 하면
($\alpha<\beta$, α, β는 자연수))
$(\alpha, \beta)=(2, 3), (2, 4), (2, 5), (3, 6), (4, 6), (5, 6)$
이고 각각의 (α, β)는 두 정수 a, b에 대한 하나의 순서쌍
(a, b)에 대응하므로 순서쌍 (a, b)의 개수는 6이다.

확률과 통계

43-9. ①

4번째 시행 후 점 P의 좌표가 $(5, 6)$이 되려면
주사위를 던져 나온 홀수의 합이 5, 짝수의 합이 6이어야 한다.
i) 홀수 : 5 짝수 : 2, 2, 2
순서를 고려한 경우의 수는 4가지이다.
ii) 홀수 : 1, 1, 3 짝수 : 6
순서를 고려한 경우의 수는 $\frac{4!}{2!}$가지이다.

따라서 확률은 $\dfrac{4+\frac{4!}{2!}}{6^4}=\dfrac{1}{81}$이다.

43-10. ④

$f(0)=\mathrm{P}(25\le X\le 35)$
$f(4)=\mathrm{P}(65\le X\le 75)$
에서 정규분포표는 대칭이므로
$X=\dfrac{35+65}{2}=50$ 대칭이다.
$f(1)=\mathrm{P}(35\le \mathrm{X}\le 45)$
$z(1.5)-z(0.5)=0.2417$
$\left|\dfrac{35-50}{\text{표준편차}}\right|=1.5$이므로
따라서 표준편차는 10이다.
$f(2)=0.3830$ 이다.

43-11. ②

빨간 구슬을 기준으로 양쪽에 놓이는 구슬의 개수 $(a,\ b)$로 가능한 순서쌍은

$a>b$	$a=b$	$a<b$
$(4,\ 3)$, $(4,\ 2)$, $(4,\ 1)$, $(4,\ 0)$	$(4,\ 4)$	$(3,\ 4)$, $(2,\ 4)$, $(1,\ 4)$, $(0,\ 4)$
$(3,\ 2)$, $(3,\ 1)$ $(3,\ 0)$	$(3,\ 3)$	$(2,\ 3)$, $(1,\ 3)$, $(0,\ 3)$
$(2,\ 1)$, $(2,\ 0)$	$(2,\ 2)$	$(1,\ 2)$, $(0,\ 2)$
$(1,\ 0)$	$(1,\ 1)$	$(0,\ 1)$
	$(0,\ 0)$	

따라서 양쪽의 경우가 대칭이므로 전체 경우에서 $a=b$인 경우를 제외한 뒤 2로 나누면 된다.

전체 경우의 수 : $\dfrac{9!}{4!4!}=9\times70=630$

$a=b=4$: $1\times1=1$

$a=b=3$: $\dfrac{4!}{3!}\times\dfrac{4!}{3!}=16$

$a=b=2$: $\dfrac{4!}{2!2!}\times\dfrac{4!}{2!2!}=36$

$a=b=1$: $\dfrac{4!}{3!}\times\dfrac{4!}{3!}=16$

$a=b=0$: $1\times1=1$

따라서 $\dfrac{630-(1+16+36+16+1)}{2}=280$이다.

(※ $\displaystyle\sum_{k=0}^{4}\left({}_4C_k\right)^2={}_8C_4=70$을 이용해서 계산할 수도 있다.)

[다른 풀이]

빨간 구슬이 6, 7, 8, 9번째에 놓이는 경우와 같다.

$4\times\dfrac{8!}{4!4!}=280$

43-12. ①

조건 (나)에서 $abc\neq0$이므로 $a,\ b,\ c$는 자연수이다.

$a+b$는 4의 배수이므로

i) $a+b=4,\ c+d+e=8$

ii) $a+b=8,\ c+d+e=4$

두가지 경우로 나뉜다.

i) $a+b=4,\ c+d+e=8$인 경우

${}_2H_2\times\left({}_3H_7-{}_3H_5\right)=45$

ii) $a+b=8,\ c+d+e=4$인 경우

${}_2H_6\times\left({}_3H_3-{}_3H_1\right)=49$

따라서 정답은 $45+49=94$이다.

미적분

43-9. ③

$y=(x^2-2x+2)e^x+e^t$와 접선이 만나는 점을

$(k,\ (k^2-2k+2)e^k+e^t)$라 하자

이때 $t=a$에서 접선은 원점을 지나고 기울기가 $4e^2$이므로

$y'=(x^2)e^x$

$(k^2)e^k=4e^2$

$(k^2)e^k=\dfrac{(k^2-2k+2)e^k+e^t}{k}$ 이다.

$(k^2)e^k=4e^2$ 에서 $k=2$ 이고

$(k^2)e^k=\dfrac{(k^2-2k+2)e^k+e^a}{k}$ 에서

$k=2$를 대입하면 $a=\ln 6+2$이다.

위 식에 양변에 k를 곱해준 후 정리하여 미분하면

$(k^3)e^k=(k^2-2k+2)e^k+e^t$

$(k^3-k^2+2k-2)e^k=e^t$

$(k^3+2k^2)e^k dk = e^t dt$ 이다.

$\dfrac{dk}{dt}=\dfrac{e^t}{e^k(k^3+2k^2)}$ 이므로

$f'(a)=(k^2e^k)'\dfrac{e^t}{(k^3+2k^2)e^k}$ 이다.

$k=2$와 $a=\ln 6+2$ 를 대입하면

$f'(a)=3e^2$이다.

43-10. ③

입체도형의 부피는 $\displaystyle\int_{-1}^{1}(1-x^2)\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)dx$이다.

$$\int_{-1}^{1}(1-x^2)\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)dx$$

$$=\int_{-1}^{1}\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)dx-\int_{-1}^{1}x^2\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)dx$$

$\displaystyle\int_{-1}^{1}\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)dx=\frac{4}{\pi}$ 이고

$\displaystyle\int_{-1}^{1}x^2\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)dx=\frac{4}{\pi}-\frac{32}{\pi^3}$

이므로

$$\int_{-1}^{1}\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)dx-\int_{-1}^{1}x^2\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)dx=\frac{32}{\pi^3}$$

43-11. 11

점 $\mathrm{P}(e^k,\ k)$, $\mathrm{R}(e^k,\ 3t+k)$, $\mathrm{Q}(e^{k-3t},\ k)$에서

넓이는 $\dfrac{1}{2}\times 3t\times e^k(1-e^{-3t})=t^2$이고

$e^k=\dfrac{2}{3}\times\dfrac{t^2}{t(1-e^{-3t})}$ 이다.

따라서 $\lim_{t \to 0+} e^{f(t)} = \frac{2}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{2}{9}$

$\frac{q}{p} = \frac{2}{9}$이므로

$p+q=11$이다.

43-12. ①

$f(x)$가 연속이므로 정수 n에 대하여 구간 $[2n,\ 2n+1]$에서

$f(x)=2\sin(\pi x)$ 또는 $f(x)=-2\sin(\pi x)$ 이고, 구간

$[2n-1,\ 2n]$에서 $f(x)=0$이다.

$\int_0^x f(t) \times \{|(t-2)(t-6)|-(t-2)(t-6)\}dt \geq 0$를

만족시키기 위해서는

구간 $[2,\ 3]$에서 $f(x)=2\sin(\pi x)$이고 구간 $[4,\ 5]$에서

$f(x)=2\sin(\pi x)$이다.

$\int_8^x f(t) \times \{|(t-2)(t-6)|+(t-2)(t-6)\}dt \geq 0$를

만족시키기 위해서는

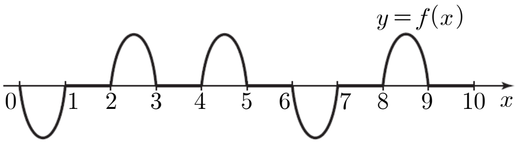
$x \geq 8$인 x를 생각하면 구간 $[8,\ 9]$에서

$f(x)=2\sin(\pi x)$이다.

또한 $x \leq 8$인 x를 생각하면 구간 $[6,\ 7]$에서

$f(x)=-2\sin(\pi x)$이고 구간 $[0,\ 1]$에서

$f(x)=-2\sin(\pi x)$이다. 이를 종합하면 $f(x)$의 그래프는 아래 그림과 같다.



이러한 $f(x)$에 대하여 $\int_0^{10} xf(x)dx$를 계산하기 위해 다음의 계산을 보자.

$$\int_0^1 x\sin(\pi x)dx = \left[-\frac{1}{\pi}x\cos(\pi x)\right]_0^1 + \int_0^1 \frac{1}{\pi}\cos(\pi x)dx = \frac{1}{\pi}$$

이고

$\int_0^1 \sin(\pi x)dx = \frac{2}{\pi}$이므로 정수 n에 대하여

$$\int_{2n}^{2n+1} x\sin(\pi x)dx = \int_0^1 (x+2n)\sin(\pi x)dx = \frac{4n+1}{\pi}$$

이다.

따라서

$$\int_0^{10} xf(x)dx = 2\times\left(-\frac{1}{\pi}+\frac{5}{\pi}+\frac{9}{\pi}-\frac{13}{\pi}+\frac{17}{\pi}\right) = \frac{34}{\pi}$$ 이다.

Day. 44

수학1, 수학2

44-1. 138

$a_{n+1}+a_{n+3}=6n-4=2(3n-2)=2a_{n+2}$이므로

$a_{n+2}=3n-2$이다.

따라서 등차수열 $\{a_n\}$은 첫째항이 -5이고 공차가 3인 등차수열이다.

$$\sum_{n=1}^{12} a_n=\frac{12}{2}(-5+28)=6\times 23=138\text{이다.}$$

44-2. ④

점 P의 속도는 $v_1(t)=3t^2+4t-3$이므로

점 P의 위치는 $p_1(t)=t^3+2t^2-3t$ 이다.

점 P가 출발한 후 원점으로 돌아오는 순간은

$p_1(t)=t^3+2t^2-3t=t(t+3)(t-1)$ 이므로

$t=1$ 이다.

$t=1$에서 $v_2(1)=|a-4|$이므로

Q의 속력, $v_2(t)=|at-4|$ 이 최소가 되도록 하는

양수 a 값은 4이다.

따라서 시각 $t=0$에서 $t=4$까지 점 Q가 움직인 거리는

$$\int_0^4 |4t-4|\,dt=\int_0^1 (4-4t)\,dt+\int_1^4 (4t-4)\,dt$$

$$=2+18=20\text{이다.}$$

44-3. ⑤

$y=27^{ax}+3$을 $y=x$에 대하여 대칭시키면

$x=27^{ay}+3$

$x-3=27^{ay}$

$3^{3ay}=x-3,\ 3ay=\log_3(x-3)$

$y=\dfrac{1}{3a}\log_3(x-3)$이다.

문제에서 함수 $y=27^{ax}+3$의 그래프와 직선 $y=x$ 대칭인 함수는

$y=a\log_5(x+b)$이라 하였으므로

$a\log_5(x+b)=\dfrac{1}{3a}\log_3(x-3)$이다.

$3^{3a}=5^{\frac{1}{a}},\ 3^{3a^2}=5\ \ a^2=\dfrac{1}{3}\log_3 5$이고

$b=-3$이므로

$a^2b^2=3\log_3 5$이다.

44-4. ②

$$\frac{1}{a_n a_{n+1}} = \frac{1}{a_{n+1} - a_n}\left(\frac{1}{a_n} - \frac{1}{a_{n+1}}\right)$$ 에서

$a_{n+1} - a_n = \frac{1}{n}$ 이므로

$$\frac{1}{a_n a_{n+1}} = n\left(\frac{1}{a_n} - \frac{1}{a_{n+1}}\right)$$ 이다.

$$\sum_{k=1}^{9} \frac{1}{a_k a_{k+1}} = \sum_{k=1}^{9} k\left(\frac{1}{a_k} - \frac{1}{a_{k+1}}\right) = \sum_{k=1}^{9} \frac{1}{a_k} - \frac{9}{a_{10}} = 1$$

이때 $a_{10} = 10$ 이므로

$$\sum_{k=1}^{9} \frac{1}{a_k} = 1 + \frac{9}{10} = \frac{19}{10}$$ 이다.

44-5. ③

보조선 PO를 그었을 때

$\angle \mathrm{POQ} = \theta$ 라 하면 두 직선 CP와 OQ가 서로 평행하므로

$\angle \mathrm{OPC} = \theta$ 이다.

이때 삼각형 POQ 에서 코사인법칙에 의해

$$\cos\theta = \frac{6^2 + 6^2 - 4^2}{2 \times 6 \times 6} = \frac{56}{72} = \frac{7}{9}$$ 이다.

$\overline{\mathrm{PC}} = x$ 라 하면

삼각형 OPC에서 코사인법칙에 의해

$$\cos\theta = \frac{7}{9} = \frac{x^2 + 6^2 - 4^2}{2 \times x \times 6} = \frac{20 + x^2}{12x}$$

$$84x = 180 + 9x^2$$

$$3x^2 - 28x + 60 = (3x - 10)(x - 6) = 0$$

이때 $\angle \mathrm{AOQ} < \frac{\pi}{2}$ 이므로 $x = \frac{10}{3}$ 이다.

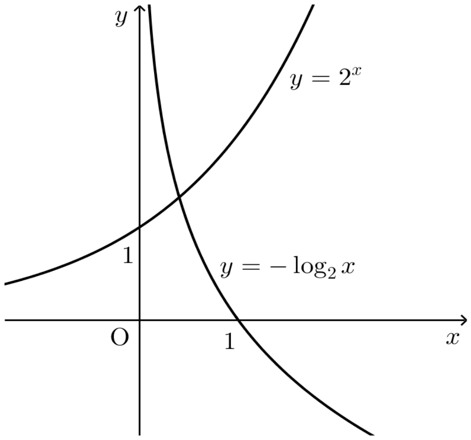
44-6. ④

함수 $y = 2^x$ 의 그래프를 $y = x$ 에 대하여 대칭이동 후,

x 축에 대하여 대칭이동한 그래프는 함수 $y = -\log_2 x$ 의

그래프이다.

두 함수 $y = 2^x$ 와 $y = -\log_2 x$ 의 그래프는 그림과 같다.



$\angle \mathrm{AOB} = 90°$ 이므로 $y_2 < 0$ 이고

직선 OA와 x축이 이루는 각을 α, 직선 OB와 x축이 이루는 각을 β라 하면, $\beta = 90 - \alpha$

한편, 점 C의 좌표를 $\mathrm{C}(\log_2 x_2,\ x_2)$라 하면 점 C는 곡선 $y = 2^x$ 위의 점이고 $\overline{\mathrm{OB}} = \overline{\mathrm{OC}}$이다.

이때, 점 $\mathrm{A}(x_1,\ 2^{x_1})$에 대하여 $\overline{\mathrm{OB}} = 2\overline{\mathrm{OA}}$이므로

$\log_2 x_2 = 2x_1,\ x_2 = 2 \cdot 2^{x_1}$이다.

따라서 $x_1 = 1$이고 직선 OA의 기울기는

$\dfrac{2^{x_1}}{x_1} = \dfrac{2}{1} = 2$이다.

44-7. 10

$$h(x) = f(x) + g(x) = \begin{cases} -x^2 + 5x + 2 & (x < 0) \\ -x^2 + 3x + 1 & (0 \le x < 2) \\ m(x-4) - x + 1 & (2 \le x) \end{cases}$$

함수 $(x^2 + ax + b)\{h(x) + h(x-2)\}$가 실수 전체의 집합에서 연속이므로 $x = 0,\ 2,\ 4$에서도 연속이어야 한다.

i) $x = 0$

$\displaystyle\lim_{x \to 0-}(x^2 + ax + b)\{h(x) + h(x-2)\}$

$= \displaystyle\lim_{x \to 0+}(x^2 + ax + b)\{h(x) + h(x-2)\}$

$b \times (2 - 12) = b \times (1 - 12)$이므로

$b = 0$

ii) $x = 2$

$\displaystyle\lim_{x \to 2-}(x^2 + ax + b)\{h(x) + h(x-2)\}$

$= \displaystyle\lim_{x \to 2+}(x^2 + ax + b)\{h(x) + h(x-2)\}$

$(4 + 2a) \times (3 + 2) = (4 + 2a) \times (-2m - 1 + 1)$

$20 + 10a = -8m - 4am$

iii) $x = 4$

$\displaystyle\lim_{x \to 4-}(x^2 + ax + b)\{h(x) + h(x-2)\}$

$= \displaystyle\lim_{x \to 4+}(x^2 + ax + b)\{h(x) + h(x-2)\}$

$(16 + 4a) \times (-3 + 3) = (16 + 4a) \times (-3 - 2m - 1)$

$0 = (16 + 4a) \times (-4 - 2m)$

$m \ne -2$이므로 $a = -4$ 이다.

조건 ii) $x = 2$에서 얻은 식에 $a = -4$를 대입하면

$-20 = 8m,\ m = -\dfrac{5}{2}$이다.

$m = -\dfrac{5}{2},\ a = -4,\ b = 0$

44-8. 15

주어진 식의 양변에 $x = 0$을 대입하면 $g(0) = 0$이고

주어진 식의 양변을 미분하면

$g'(x) = \{f(x)\}^2 - x^2$ 이다.

이차함수 $f(x)$가 $x = 1$에서 최솟값을 가지므로

$f(x) = x^2 - 2x + a$라 하자 (a는 상수)

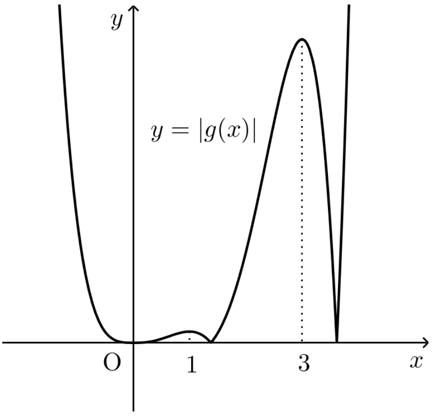
함수 $g'(x)=(x^2-3x+a)(x^2-x+a)$가

$x=0$에서 중근을 가지므로 $a=0$이다.

따라서 $f(x)=x(x-2)$

$g(x)=\dfrac{x^5}{5}-x^4+x^3+C$이고

$g(0)=0$이므로 $C=0$이다.



함수 $y=|g(x)|$의 그래프는 그림과 같고 $|g(1)|=\dfrac{1}{5}$,

$|g(3)|=\dfrac{27}{5}$

곡선 $y=|g(x)|$와 직선 $y=n$이 만나는 점의 개수가 4인

모든 자연수 n은 1, 2, 3, 4, 5이다.

확률과 통계

44-9. 12

이 상자에서 임의로 꺼낸 한 장의 카드에 적혀 있는 수를

확률변수 X라 할 때, 확률변수 X의 확률분포를 표로 나타내면

다음과 같다.

X	0	1	2	4	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\dfrac{4}{n+8}$	$\dfrac{2}{n+8}$	$\dfrac{n}{n+8}$	$\dfrac{2}{n+8}$	1

이 모집단에서 임의추출한 크기가 2인 표본을 $(X_1,\ X_2)$라 하면

$\overline{X}=1$인 경우는

$(0,\ 2),\ (2,\ 0),\ (1,\ 1)$ 이므로

$\mathrm{P}(\overline{X}=1)=\dfrac{2\times2+4\times n+n\times4}{(n+8)^2}=\dfrac{8n+4}{(n+8)^2}$

$\overline{X}=4$인 경우는

$(4,\ 4)$

$\mathrm{P}(\overline{X}=4)=\dfrac{2\times2}{(n+8)^2}=\dfrac{4}{(n+8)^2}$

$\mathrm{P}(\overline{X}=1)=9\times\mathrm{P}(\overline{X}=4)$에서

$8n+4=36$

$n=4$

이때 $E(X)=0\times\frac{4}{12}+1\times\frac{2}{12}+2\times\frac{4}{12}+4\times\frac{2}{12}=\frac{3}{2}$

$E(\overline{X})=E(X)=\frac{3}{2}$이고 $Y=2\overline{X}$이므로

$E(Y)=3$이다.

$a\times n=3\times 4=12$

44-10. ②

전체 경우의 수는 ${}_8C_4=70$이고 이 중에서

$a+b+c+d$가 홀수가 되는 경우의 수는

홀수 3개 짝수 1개, 홀수 1개 짝수 3개

${}_4C_1\times{}_4C_3+{}_4C_3\times{}_4C_1=32$ 이다.

따라서 $a+b+c+d$가 짝수가 되는 경우의 수는

$70-32=38$ 이다.

i) 홀수 4개

$1,\ 3,\ 5,\ 7$

경우의 수 1가지

ii) 홀수 2개, $d=5$

짝수 $=2,\ 4$ 홀수 $=1$또는 3

경우의 수 2가지

iii) 홀수 2개, $d=7$

짝수 $=2,\ 4,\ 6$ 중 2개 홀수 $1,\ 3,\ 5$ 중 1개

경우의 수 9가지

$a+b+c+d$가 짝수일 때, d가 홀수일 확률은

$\frac{12}{38}=\frac{6}{19}$이다.

44-11. 70

i) $f(1)=1$인 경우

경우의 수는 46가지이다.

ii) $f(1)=2$인 경우

경우의 수는 8가지이다,

이때 $f(1)=3,\ 4$인 경우도 같으므로 $8\times 3=24$

따라서 $46+24=70$

44-12. ⑤

경우를 나누어서 구해보면

상자 A, B에 들어갈 공 3개를 선택하는 경우의 수 : ${}_6C_3=20$

상자 A, B중 한 상자에만 공을 넣는 경우의 수 : 2

상자 A, B 모두에 공을 넣는 경우의 수 : $2^3-2=6$

상자 C, D중 한 상자에만 공을 넣는 경우의 수 : 2

상자 C, D 모두에 공을 넣는 경우의 수 : $2^3-2=6$

두 상자에만 공을 넣는 경우의 수 : $20\times 2\times 2=80$

네 개의 상자에 모두 공을 넣는 경우의 수 : $20\times 6\times 6=720$

$80+720=800$이다.

미적분

44-9. ④

$$\sum_{k=1}^{n}(x-k)^2=\sum_{k=1}^{n}(x^2-2kx+k^2)$$

$$=\sum_{k=1}^{n}x^2-2\sum_{k=1}^{n}kx+\sum_{k=1}^{n}k^2$$

$$=nx^2-n(n+1)x+\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$nx^2-n(n+1)x+\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}=\dfrac{n^2(n+1)}{6}$ 에서

$$nx^2-n(n+1)x+\frac{n(n+1)^2}{6}=0$$

$$x^2-(n+1)x+\frac{(n+1)^2}{6}=0$$

이차방정식의 근과 계수의 관계에서

$$\alpha_n+\beta_n=n+1$$

$$\alpha_n\beta_n=\frac{(n+1)^2}{6}$$

따라서 $\alpha_n^2+\beta_n^2=(\alpha_n+\beta_n)^2-2\alpha_n\beta_n=\dfrac{2}{3}(n+1)^2$ 이고

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{(\alpha_n)^2+(\beta_n)^2}{n^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{2}{3}(n+1)^2}{n^2}=\frac{2}{3}$ 이다.

44-10. ③

$\mathrm{P}(f(k),\ 4^{f(k)}-4)$

$\mathrm{Q}(f(k),\ 2^{f(k)}-2)$

에서

$\overline{\mathrm{PQ}}=4^{f(k)}-2^{f(k)}-2$

$\overline{\mathrm{PQ}}=k$ 이므로

$\overline{\mathrm{PQ}}=4^{f(k)}-2^{f(k)}-2=k$

$4^{f(k)}-2^{f(k)}-(k+2)=0$

에서

$$2^{f(k)}=\frac{1+\sqrt{4k+9}}{2}$$

$$f(k)=\log_2\frac{1+\sqrt{4k+9}}{2},$$

$$f(k)-1=\log_2\frac{1+\sqrt{4k+9}}{4}$$

이때, $\dfrac{1+\sqrt{4k+9}}{4}=s+1$

이라 하면 $k\to0+$일 때, $s\to0+$

이고 $k=s^2+6s$

$$\lim_{k\to0+}\frac{f(k)-1}{k}=\lim_{s\to0+}\frac{\log_2(s+1)}{s^2+6s}$$

$$= \lim_{s\to0+}\frac{\log_2(s+1)}{s}\cdot\lim_{s\to0+}\frac{1}{s+6}$$

$$=\frac{1}{6\ln2}$$

$\displaystyle\lim_{k\to0+}\frac{f(k)-1}{k}=\frac{1}{6\ln2}$ 이다.

44-11. 148

$f(1)=1,\ g(1)=2$

$(g\circ f)(x)=2e^{2x-2}$에서 양변을 미분하면

$f'(x)g'(f(x))=4e^{2x-2}$

$f'(1)g'(1)=4$

한편, 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(1,\ 1)$에서의 접선과 x축과 이루는 각이 곡선 $y=g(x)$ 위의 점 $(1,\ 2)$에서의 접선과 x축과 이루는 각의 $\frac{1}{2}$배이므로

$$g'(1)=\frac{2f'(1)}{1-\{f'(1)\}^2}$$

$$\frac{4}{f'(1)}=\frac{2f'(1)}{1-\{f'(1)\}^2}$$

$2-2\{f'(1)\}^2=\{f'(1)\}^2$

$\{f'(1)\}^2=\frac{2}{3},\ \{g'(1)\}^2=24$

$6\left[\{f'(1)\}^2+\{g'(1)\}^2\right]=148$이다.

44-12. 171

구간 $((n-1)\pi,\ n\pi)$에서 $g(x)$의 값을 a_n이라 하자.

$(n=1,\ 2,\ \cdots,\ 10)$

a_n 중 0인 것의 개수를 p개, 1인 것의 개수를 q개, 2인 것의 개수를 r개라 하면 $q+2r=13,\ q+4r=23$이므로

$q=3,\ r=5$이다. 이 중 $\displaystyle\int_0^{10\pi}xf(x)g(x)dx$의 값이 최대가 되도록 하는 경우는

$a_1=a_2=0,\ a_3=a_4=a_5=1,\ a_6=a_7=\cdots=a_{10}=2$인

경우로 이 때, $\displaystyle\int_0^{10\pi}xf(x)g(x)dx=171\pi$를 얻는다.

Day. 45

수학1, 수학2

45-1. 180

음의 실수 x는 $3^{\frac{4}{3}}$의 네제곱근이므로 $x=-3^{\frac{1}{3}}$이고

y는 2의 다섯제곱근 이므로 $y=2^{\frac{1}{5}}$이다.

$x\times y=-3^{\frac{1}{3}}\times 2^{\frac{1}{5}}$이 어떤 자연수의 n제곱근이 되게 하려면

자연수 n은 6과 5의 공배수이어야 한다.

따라서 주어진 범위를 만족하는 n의 값은

$n=30,\ 60,\ 90$이다.

45-2. 6

$f(x)=(x-a)(x^2-x+11)$에서 양변을 미분하면

$f'(x)=(x^2-5x+11)+(x-a)(2x-5)$이다.

미분한 식에 a를 대입하면

$f'(a)=a^2-5a+11$

이때 $f'(a)=5$이므로

$a^2-5a+11=5$

$a^2-5a+6=0$이다.

근과 계수의 관계에 의하여 모든 a의 값의 곱은 6이다.

45-3. 35

$f(4)=-\dfrac{1}{n}\{(4-6)^2-18\}=\dfrac{14}{n}$

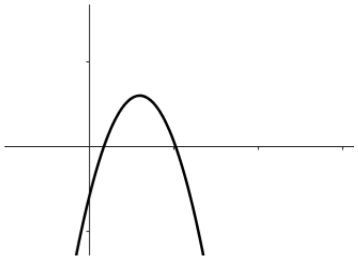
$f(9)=-\dfrac{1}{n}\{(9-6)^2-18\}=\dfrac{9}{n}$

$f(4)>f(9)$이므로

$\log_{f(k)}f(4)>\log_{f(k)}f(9)$을 만족하려면

$f(k)>1$ 이어야한다.

$f(k)>1$을 만족시키는 정수 k의 개수가 7개이므로



$k=3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9$ 에서 만족해야한다.

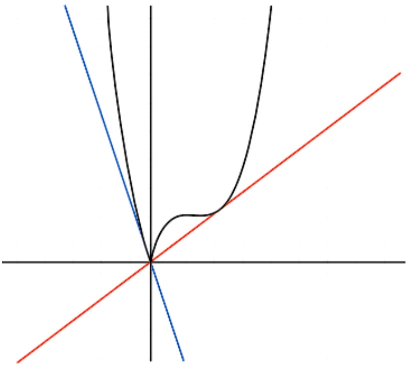
$f(3)>1,\ f(2)\le 1$ 를 만족시키는 n값은

$n=2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8$이다.

따라서 모든 자연수 n의 값의 합은 35이다.

45-4. ①

모든 실수 x에 대하여 부등식 $|x^3-3x^2+3x| \geq kx$ 가 성립할 때 실수 k의 최댓값과 최솟값은 $y=kx$의 그래프가 $y=|x^3-3x^2+3x|$의 그래프와 접할 때 나오게된다.



최댓값 M

$y=x^3-3x^2+3x$와 $y=kx$을 연립한 식

$x^3-3x^2+3x-kx=x(x^2-3x+3-k)$에서

$x^2-3x+3-k=0$이 중근을 가져야 하므로

$M=\frac{3}{4}$

최솟값 m

$y=-x^3+3x^2-3x$와 $y=kx$가 $x=0$에서 접하므로

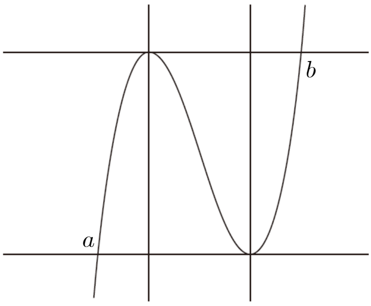
$y'=-3x^2+6x-3$

$m=-3$

$M\times m=\frac{3}{4}\times -3=-\frac{9}{4}$

45-5. 40

조건 (가)와 (나)를 만족시키는 a와 b를 알아내기 위해 그래프를 그려보면



점 a의 x좌표는 -4이고 점 b의 x좌표는 8이므로

함수 $f(x)=(x+1)(x-5)$이고

$f(9)=10\times 4=40$이다.

45-6. ②

$S_k+S_{k+1}=30$ $\cdots$ ㉠

$S_{k+1}+S_{k+2}=57$ $\cdots$ ㉡

에서 ㉡−㉠을 하면

$S_{k+2}-S_k=a_{k+1}+a_{k+2}=27$이고
이때 $a_k+a_{k+1}+a_{k+2}=36$이므로 $a_k=9$이다.
등차수열 $\{a_n\}$의 공차가 d일 때,
$(a_k+a_{k+1}+a_{k+2})-3a_k=3d=9$이고 $d=3$이다.
$a+3(k-1)=9$, $a+3k=12$이고
$S_k+S_{k+1}=30$에서
$\dfrac{2a+3(k-1)}{2}\times k+\dfrac{2a+3k}{2}\times(k+1)=30$이므로
$a(2k+1)=30-3k^2$
$a=-6$, $k=6$
$a_1=-6$이다.

45-7. ②

주어진 조건에 따라
$f(x)=-(x-1)^2(x-a)$
$g(x)=b(x-2)^2$라 하자.
이때 점 P의 y좌표와 점 R의 y좌표가 같으므로 점 P와 점 R은 이차함수 $g(x)$의 축인 $x=2$ 대칭임을 알 수 있다.
따라서 점 P의 x좌표가 0이므로 점 R의 x좌표는 4이다.
$f(0)=g(0)$
$a=4b$이고
$f(4)=g(4)$
$-9(4-a)=4b$이다.
$a=4b$이므로 대입하면
$-9(4-a)=a$
$8a=36$
$a=\dfrac{9}{2}$이고 $b=\dfrac{9}{8}$이다.
$f(x)=-(x-1)^2\left(x-\dfrac{9}{2}\right)=-x^3+\dfrac{13}{2}x^2-10x+\dfrac{9}{2}$
$g(x)=\dfrac{9}{8}x^2-\dfrac{9}{2}x+\dfrac{9}{2}$
$$A-B=\int_0^4\{g(x)-f(x)\}dx$$
$$=\int_0^4\left(x^3-\dfrac{43}{8}x^2+\dfrac{11}{2}x\right)dx=-\dfrac{20}{3}$$

45-8. ①

$\sin(\angle \mathrm{ABC})=a$, $\sin(\angle \mathrm{ACB})=b$라 하자.
두 원 C_1, C_2의 반지름을 각각 r_1, r_2라 할 때
사인법칙에 의하여
$\dfrac{2\sqrt{7}}{a}=2r_1$, $\dfrac{2\sqrt{7}}{b}=2r_2$
$\dfrac{b}{a}=\sqrt{2}$이므로 $r_1:r_2=\sqrt{2}:1$이다.
삼각형 AED와 삼각형 ABD는 $\angle \mathrm{BAD}$를 공통으로 가지고 있으므로 $\overline{\mathrm{BD}}$와 $\overline{\mathrm{DE}}$의 비율은 사인법칙에 의해 반지름의 비율과 같다.

이때 $\overline{DE}=2$이므로 $\overline{BD}=2\sqrt{2}$
삼각형BDE에서 코사인 법칙을 이용해 $\sin(\angle ABC)=a$의 값을 구하면 반지름의 길이까지 구할 수 있다.
$r_1=4\sqrt{2}$, $r_2=4$
넓이의 합은 48π이다.

확률과 통계

45-9. 22

a가 두 번 이상 나오는 경우의 수이므로 a가 2번, 3번 나오는 경우를 나누어 판단하면,

i) a가 두 번 나오는 경우
네 자리 중 a를 2자리에 배치하는 경우의 수가 ${}_4C_2$이고
나머지 두 자리에 b 가 한 개 이상 있어야 하므로 2^2-1
${}_4C_2\times(2^2-1)=18$

ii) a가 세 번 나오는 경우
네 자리 중 a를 3자리에 배치하는 경우의 수가 ${}_4C_3$이고
나머지 한 자리에 b 를 배치하는 경우의 수가 1이므로
${}_4C_3\times1=4$

총 경우의 수는 두가지 경우를 모두 더한 22가지이다.

45-10. 475

문제의 시행을 5번 반복할 때, 점 P, Q사이의 거리가 8 이상일 확률을 구하면

i) 3의 배수가 5번 나오는 경우
$$\left(\frac{1}{3}\right)^5=\frac{1}{243}$$

ii) 3의 배수가 4번 나오는 경우
$$\left(\frac{1}{3}\right)^4\times\frac{2}{3}\times5=\frac{10}{243}$$

여사건을 빼서 점 P, Q사이의 거리가 8보다 작을 확률을 구하면
$\frac{q}{p}=\frac{232}{243}$이다.
$p+q=475$

45-11. ③

$P(X\le2)$의 위치가 $Z=-1$
$P(X\le8)$의 위치가 $Z=2$이므로
$\frac{2-m}{\sigma}=-1$, $\frac{8-m}{\sigma}=2$이다.
두 식을 연립하여 값을 구하면
$\sigma=2$, $m=4$이다.
$P\left(\overline{X}\le\frac{k+1}{4}\right)=0.0228$을 만족시키는 실수 k의 값을 구하려면 $\overline{X}$ 의 값을 구하면 된다.

이때 $Z=\dfrac{\overline{X}-4}{\sqrt{0.25}}=\dfrac{\overline{X}-4}{0.5}$

$Z=-2$이므로 $\dfrac{\overline{X}-4}{0.5}=-2$

$\overline{X}=3$이다.

따라서 $\dfrac{k+1}{4}=3$이므로

$k=11$이다.

45-12. 24

조건 (가)에 의하여 $a\neq b$, $b\neq c$, $c\neq a$

조건 (나)에 의하여

$\log_2 a+\log_2 b+\log_2 c=7$

$abc=2^7$

이므로 $a=2^p$, $b=2^q$, $c=2^r$ (단, p, q, r는 음이 아닌 정수)라 하면

$p+q+r=7$

이다. 이 조건을 만족시키는 a, b, c는

${}_3\mathrm{H}_7={}_9\mathrm{C}_2=36$

그런데 $a=b$ 또는 $b=c$ 또는 $c=a$를 만족시키는 경우는

a, b, c 중

2개가 2^0, 1개가 2^7

2개가 2^1, 1개가 2^5

2개가 2^2, 1개가 2^3

2개가 2^3, 1개가 2^1

인 경우이고 각각의 경우의 수는 3이다.

따라서 구하는 값은 $36-4\times3=24$

미적분

45-9. ①

$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{g'(t)}{f'(t)}$에서 $g'(t)=\dfrac{1}{f'(g(t))}$이므로

$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{g'(t)}{f'(t)}=\dfrac{1}{f'(g(t))f'(t)}$이다.

$t=1$일 때

$f'(t)=e^t+1$이므로 $f'(1)=e+1$이고

$g'(1)=\dfrac{1}{f'(g(1))}=\dfrac{1}{f'(0)}=\dfrac{1}{2}$

주어진 식에 대입하면

$t=1$일 때 $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{1}{2(e+1)}$이다.

45-10. 13

최고차항의 계수가 -1인 삼차함수 $f(x)$의 역함수 $g(x)$에서

두 곡선 $y=(g\circ g)(x)$와 $y=g(x^3-2x)$가 점 $(0,\ k)$에서

접하므로 $(g \circ g)(0)=g(0)$이고

따라서 $g(0)=0$이다.

$k=0$

두 곡선 $y=(g \circ g)(x)$와 $y=g(x^3-2x)$를 미분하면

$y'=g'(x)g'(g(x))$ $y'=(3x^2-2)g'(x^3-2x)$이고

점 $(0,\ k)$에서 접하므로 $g'(0)g'(g(0))=-2g'(0)$이다.

이때 $g'(0)=\dfrac{1}{f'(0)}$이므로

$\dfrac{1}{f'(0)^2}=\dfrac{-2}{f'(0)}$

$f'(0)=-\dfrac{1}{2}$이다.

최고차항의 계수가 -1인 삼차함수 $f(x)$는

$f(x)=-x^3+ax^2-\dfrac{1}{2}x$와 같이 나타낼 수 있고

$f(2)=-5$이므로 $a=1$이다.

따라서 $f(x)=-x^3+x^2-\dfrac{1}{2}x$이므로

$f(k-2)=f(-2)=13$이다.

45-11. 33

(가) 조건에서 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sin^2\left(\dfrac{1}{x}\right)}{\left(\dfrac{1}{x^2}\right)}=1$이므로

이차함수 $f(x)$의 최고차항이 3임을 알 수 있고

(나) 조건에서 $\lim\limits_{x\to 0}(1+ax)^{\frac{1}{x}}=e^a$에 의해서

이차함수 $f(x)$의 일차항이 2임을 알 수 있다.

따라서 $f(x)=3x^2+2x$이다.

$f(3)=33$

45-12. ④

$x>0$에서 $\left|\int_b^x f(t)dt\right|$는 $b=\pi,\ 2\pi,\ 3\pi,\ \cdots$일 때

미분가능하다. $b=\pi,\ 2\pi,\ 3\pi$일 때는 $x<0$에서

$\left|\int_b^x f(t)dt\right|$가 미분가능하지 않은 점이 있어야 하고 $b=4\pi$일

때는 $x<0$에서도 $\left|\int_b^x f(t)dt\right|$가 미분가능해야 한다.

$$\int_0^\pi |x\sin x|dx=\int_0^\pi x\sin x dx$$

$$=\Big[-x\cos x\Big]_0^\pi+\int_0^\pi \cos x dx=\pi$$

$$\int_{n\pi}^{(n+1)\pi}|x\sin x|dx=\int_0^\pi (x+n\pi)|\sin x|dx=(2n+1)\pi$$

(단, n은 자연수)

이므로 $\int_0^\pi f(x)dx=-\pi,\ \int_0^{2\pi} f(x)dx=-4\pi,$

$\int_0^{3\pi} f(x)dx = -9\pi$, $\int_0^{4\pi} f(x)dx = -16\pi$이다.

$\int_0^{\frac{\pi}{a}} |\sin(ax)|dx = \int_0^{\frac{\pi}{a}} \sin(ax)dx = \left[-\frac{1}{a}\cos(ax)\right]_0^{\frac{\pi}{a}} = \frac{2}{a}$

이므로 자연수 k에 대하여

$\int_{-\frac{k\pi}{a}}^{0} f(x)dx = \frac{2k\pi}{a}$ 이다.

따라서 $\frac{2k\pi}{a} = 16\pi$인 자연수 k가 존재해야하고 어떤 자연수 k에 대하여 $a = \frac{k}{8}$이다. 한편 $\frac{2m\pi}{a} = \pi$, 4π, 9π인 자연수 m은 존재하지 않아야 한다. 따라서 모든 자연수 m에 대하여 $\frac{16m}{k} \neq 1$, 4, 9이어야 하고 k는 4의 배수가 아니어야 한다.

$0 < a < 2$이므로

$a = \frac{1}{8}, \frac{2}{8}, \frac{3}{8}, \frac{5}{8}, \frac{6}{8}, \frac{7}{8}, \frac{9}{8}, \frac{10}{8}, \frac{11}{8}, \frac{13}{8}, \frac{14}{8}, \frac{15}{8}$

으로 합은 12가 된다.

Day. 46

수학1, 수학2

46-1. ①

곡선 $y = 2^{|x-1|}$과 직선 $y = k$ 의 교점의 x 좌표는

$2^{|x-1|} = k$에서 $|x-1| = \log_2 k$

$\therefore\ x = 1 \pm \log_2 k$

따라서 두 점 A, B의 좌표는 각각

$A(1-\log_2 k,\ k)$, $B(1+\log_2 k,\ k)$이므로

$\overline{AC} = \log_2 k - 1$, $\overline{BC} = \log_2 k + 1$

$\overline{AC} : \overline{BC} = 1 : 5$에서

$(\log_2 k - 1) : (\log_2 k + 1) = 1 : 5$

$5\log_2 k - 5 = \log_2 k + 1$

$4\log_2 k = 6$

$\log_2 k = \frac{3}{2}$

$\therefore\ k = 2\sqrt{2}$

46-2. ④

$\lim_{x\to 2-} f(x) = \lim_{x\to 2+} f(x) = f(2) = f(-2)$

$\lim_{x\to 2-} f(x)$의 값이 존재하므로

$\lim_{x\to 2-} (x^3 + ax^2 + bx) = 0$에서 $b = -2a - 4$

$x<2$일 때, $f(x)=\dfrac{\{x^2+(a+2)x\}(x-2)}{x-2}=x^2+(a+2)x$

$f(-2)=f(2)$가 되어야하므로

$4+2(a+2)=4-2(a+2)$이고

$a=-2$이다.

이때, $f(7)=f(3)=f(-1)=1$

46-3. ②

$2\cos^2\pi x+\cos\pi x-1=0$에서

$(2\cos\pi x-1)(\cos\pi x+1)=0$

$\cos\pi x=\dfrac{1}{2}$, $\cos\pi x=-1$

닫힌구간 $[0,\ 2]$에서 주어진 방정식의 모든 실근의 합은 3

닫힌구간 $[2,\ 4]$에서 주어진 방정식의 모든 실근의 합은 9

닫힌구간 $[4,\ 6]$에서 주어진 방정식의 모든 실근의 합은 15

$\vdots$

닫힌구간 $[2k-2,\ 2k]$에서 주어진 방정식의 모든 실근의 합은 $3(2k-1)$

따라서 $[0,\ 2n]$에서 주어진 방정식의 모든 실근의 합은

$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(6k-3)=3n^2$, $a_n=3n^2$이므로

$$\sum_{n=1}^{7}a_n=\sum_{n=1}^{7}3n^2=3\times\frac{7\times8\times15}{6}=420$$

46-4. ⑤

$\displaystyle\lim_{x\to0+}\{f(a+x)+f(a-x)\}=4$를 만족시키는 경우의 수는

i) $f(a)=2$

$a=\dfrac{2}{3},\ \dfrac{4}{3},\ \dfrac{5}{2}$

ii) $f(a)\neq2$, $\displaystyle\lim_{x\to a+}f(x)+\lim_{x\to a-}f(x)=2$

$a=1$

모든 실수 a의 값의 합은

$\dfrac{2}{3}+\dfrac{4}{3}+\dfrac{5}{2}+1=\dfrac{11}{2}$이다.

46-5. 10

$a_k<a_{k+1}$인 자연수 k의 개수가 2개 이려면

a_k수열이 순환해야한다.

i) $a_k=-2a_k+4$

$a_k=\dfrac{4}{3}$이면 그 이후로는 모든 항이 $\dfrac{4}{3}$가 나오게 된다.

이때 $a_3+a_4=2$이고 $a_k<a_{k+1}$인 자연수 k의 개수가 2이 되도록 하는 a_1을 구하면

$a_4=\dfrac{4}{3},\ a_3=\dfrac{2}{3},\ a_2=\dfrac{1}{3},\ a_1=\dfrac{11}{6}$

$a_4=\dfrac{4}{3},\ a_3=\dfrac{2}{3},\ a_2=\dfrac{5}{3},\ a_1=\dfrac{5}{6}$

두가지 경우가 나온다.

ii) $a_k = 0$

$a_k = 0$이면 그 이후로는 모든 항이 0 이 나오게 된다.

이때 $a_3 + a_4 = 2$이고 $a_k < a_{k+1}$인 자연수 k의 개수가 2이 되도록 하는 a_1을 구하면

$$a_4 = 0,\ a_3 = 2,\ a_2 = 1,\ a_1 = \frac{1}{2}$$

한가지 경우가 나온다,

따라서 $M = \dfrac{11}{6}$, $m = \dfrac{1}{2}$

$M + m = \dfrac{7}{3}$ 이다.

$p + q = 10$

46-6. ④

이차함수 $f(x) = ax(x-6)$ (단, $a < 0$)일 때,

직선 l을 $y = bx + 5$라 하면

$f(x)$의 그래프와 직선 l이 $x = 5$에서 만나므로

$5a(5-6) = 5b + 5$, $b = -a - 1$

접점의 x좌표를 t라 하면 직선 m의 기울기는 $f'(t) = 2at - 6a$

직선 l과 수직이므로 $(2at - 6a)b = -1$

따라서 $t = 3 - \dfrac{1}{2ab} = 3 + \dfrac{1}{2a(a+1)}$

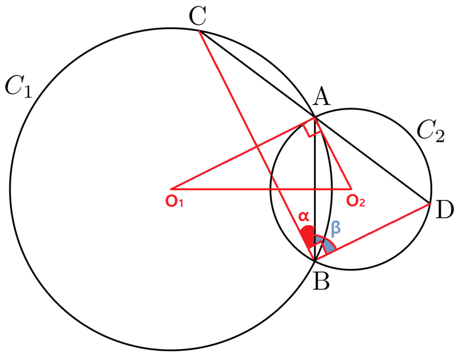
$$t = 3 + \frac{1}{2a(a+1)} = 3 + \frac{1}{2\left(a + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{2}}$$

$(-1 < a < 0)$이므로

$a = -\dfrac{1}{2}$일 때, 최댓값 1을 갖는다.

46-7. 13

두 원 C_1, C_2의 중심을 각각 O_1, O_2라 하자.



$\angle O_1AO_2 = 90°$이므로 $\overline{AB} = 2\sqrt{3}$ 이다.

$\angle ABC = \alpha$, $\angle ABD = \beta$라 하면 $\alpha + \beta = 90°$

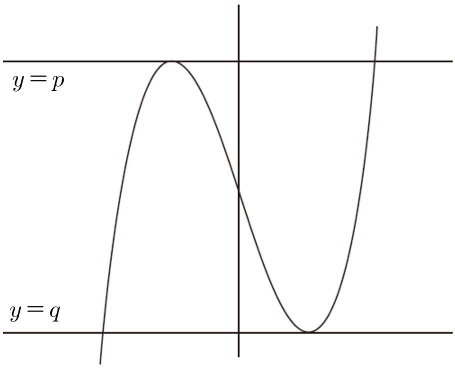
$a = 2$, $b = -3$

$\therefore\ a^2 + b^2 = 4 + 9 = 13$

46-8. 52

최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$에 대하여

$f(-x)=-f(x)$ 이므로 그래프를 그려보면



그림과 같이 나타낼 수 있다.
이때 함수 $g(t)+g(t-4)$는
$t=-2,\ t=a,\ t=b$에서만 불연속이려면
p와q의 차이가 4이어야한다.
따라서 $p=2,\ q=-2$이고
$f(x)=x^3-3x$이다.
$a=2, b=6$이므로
$f(b-a)=f(4)=52$이다.

확률과 통계

46-9. ③

조건 (가)에서 두 확률변수 $X,\ \ Y$의 평균은 각각 30, 50 이다.
두 확률변수 $X,\ \ Y$의 표준편차를 각각 $\sigma_X,\ \sigma_Y$라 하면 조건 (나)에서

$\int_{10}^{30} f(x)dx = \int_{50}^{60} g(x)dx$ 이므로

$$\mathrm{P}(10 \le X \le 30) = \mathrm{P}(50 \le Y \le 60)$$

$$\mathrm{P}\left(\frac{10-30}{\sigma_X} \le Z \le \frac{30-30}{\sigma_X}\right) = \mathrm{P}\left(\frac{50-50}{\sigma_Y} \le Z \le \frac{60-50}{\sigma_Y}\right)$$

$$\mathrm{P}\left(-\frac{20}{\sigma_X} \le Z \le 0\right) = \mathrm{P}\left(0 \le Z \le \frac{10}{\sigma_Y}\right)$$

$$\mathrm{P}\left(0 \le Z \le \frac{20}{\sigma_X}\right) = \mathrm{P}\left(0 \le Z \le \frac{10}{\sigma_Y}\right)$$

$\therefore\ \sigma_X = 2\sigma_Y$ …… ㉠

또한 $\int_{10}^{30} f(x)dx = 0.4772$ 이므로

$$\mathrm{P}\left(0 \le Z \le \frac{20}{\sigma_X}\right) = \mathrm{P}(0 \le Z \le 2)$$

따라서 $\frac{20}{\sigma_X} = 2$ 이므로 $\sigma_X = 10$ …… ㉡

㉠, ㉡에서 $\sigma_X = 10,\ \ \sigma_Y = 5$

$\therefore\ \mathrm{P}(30 \le X \le 40) + \mathrm{P}(40 \le Y \le 50)$

$$= \mathrm{P}\left(\frac{30-30}{10} \le Z \le \frac{40-30}{10}\right) + \mathrm{P}\left(\frac{40-50}{5} \le Z \le \frac{50-50}{5}\right)$$

$=\mathrm{P}(0\le Z\le 1)+\mathrm{P}(-2\le Z\le 0)$
$=\mathrm{P}(0\le Z\le 1)+\mathrm{P}(0\le Z\le 2)$
$=0.3413+0.4772=0.8185$이다.

46-10. ②

(가) 조건에서 음이 아닌 정수 $x,\ y,\ z$의 순서쌍 $(x,\ y,\ z)$의 개수는

${}_{3}\mathrm{H}_{9}={}_{11}\mathrm{C}_{2}=55$

조건 (나)를 만족시키지 않는, 즉, $x+y\le 3$이고 (가)를 만족시키는 음이 아닌 정수 $x,\ y,\ z$의 순서쌍 $(x,\ y,\ z)$는

$(0,\ 0,\ 9),\ (0,\ 1,\ 8),\ (0,\ 2,\ 7),\ (0,\ 3,\ 6),\ (1,\ 0,\ 8),$
$(1,\ 1,\ 7),\ (1,\ 2,\ 6),\ (2,\ 0,\ 7),\ (2,\ 1,\ 6),\ (3,\ 0,\ 7)$

이므로 순서쌍의 개수는 10이다.

따라서 조건을 만족시키는 모든 순서쌍 $(x,\ y,\ z)$의 개수는

$55-10=45$

46-11. ③

A가 승리하기 위한 경우는 다음과 같다.

i) 처음 5회 시행 연속으로 빨간공이 나오는 경우

$$\left(\frac{2}{3}\right)^5=\frac{32}{3^5}$$

ii) 처음 5회 시행 시, 빨간공이 4개, 파란공이 1개 나오는 경우 그 다음 시행에서 빨간공이 나오거나, 파란 공-빨간 공 순으로 나와야 한다.

$$\left\{{}_{5}\mathrm{C}_{1}\times\left(\frac{2}{3}\right)^4\left(\frac{1}{3}\right)\right\}\times\left\{\frac{2}{3}+\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}\right\}=\frac{640}{3^7}$$

iii) 처음 5회 시행 시, 빨간공이 3개, 파란공이 2개 나오는 경우 그 다음 시행에서 빨간공-빨간공 순으로 나와야 한다.

$$\left\{{}_{5}\mathrm{C}_{2}\times\left(\frac{2}{3}\right)^3\left(\frac{1}{3}\right)^2\right\}\times\left\{\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}\right\}=\frac{320}{3^7}$$

처음 5회 시행 시, 파란공이 3개 이상 나오는 경우 A가 이기지 못한다.

i)~iii)에 의하여 구하는 확률은

$\dfrac{32\times 9+640+320}{3^7}=\dfrac{416}{3^6}$ 이다.

46-12. ③

한 번 뽑을 때 나오는 수의 확률 분포는

$1\to\frac{1}{6},\ 2\to\frac{1}{3},\ 3\to\frac{1}{2}$ 과 같다.

한 번 뽑을 때 나오는 값을 확률 변수 Y라고 두면

$\mathrm{E}(Y)=\sum xP(x)=\frac{1}{6}+\frac{2}{3}+\frac{3}{2}=\frac{7}{3}$ 이다.

독립 반복 시행을 하여

$X=Y_1+Y_2+\cdots+Y_n$

$\mathrm{E}(X)=n\mathrm{E}(Y)=n\frac{7}{3}$ 에서

$\mathrm{E}(X)=21$이므로 $n=9$이다.

$\mathrm{V}(Y)=\mathrm{E}(Y^2)-(\mathrm{E}(Y))^2=6-\left(\frac{7}{3}\right)^2=\frac{5}{9}$이고

$\mathrm{V}(X)=n\mathrm{V}(Y)$이므로

답은 5이다.

미적분

46-9. ①

$0<\alpha<\frac{\pi}{2}$이고 $\tan\alpha=\frac{5}{12}$이므로

$\sin\alpha=\frac{5}{13}$, $\cos\alpha=\frac{12}{13}$

$\int_{\alpha}^{\frac{\pi}{2}-\alpha}\frac{\sin x}{\cos^2 x}dx$

$\cos x=t$라 하면 $-\sin x=\frac{dt}{dx}$이고

$\cos\alpha=\frac{12}{13}$, $\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\sin\alpha=\frac{5}{13}$이므로

$$\int_{\alpha}^{\frac{\pi}{2}-\alpha}\frac{\sin x}{\cos^2 x}dx=\int_{\frac{12}{13}}^{\frac{5}{13}}\left(-\frac{1}{t^2}\right)dt=\left[\frac{1}{t}\right]_{\frac{12}{13}}^{\frac{5}{13}}$$

$$=\frac{13}{5}-\frac{13}{12}=13\times\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{12}\right)=13\times\frac{7}{60}=\frac{91}{60}$$

46-10. 29

$\sum_{n=1}^{\infty}b_n$의 값이 수렴하므로 등비수열 $\{b_n\}$의 공비 d_b는

$-1<d_b<1$을 만족한다.

따라서 $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n+b_{n+1}}{a_{n+1}+b_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{a_{n+1}}=\frac{1}{d_a}=\frac{1}{4}$이므로

등비수열 $\{a_n\}$의 공비 d_a는 4이다.

$\sum_{n=1}^{\infty}a_nb_n=\sum_{n=1}^{\infty}4^{n-1}d_b^{n-1}=4$이므로

$d_b=\frac{3}{16}$이다.

$\sum_{n=1}^{\infty}b_n=\frac{16}{13}$

$p+q=29$이다.

46-11. ③

조건 (가)에 의해 $f(0)=a$, $f'(0)=a$이다.

곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(0,\ f(0))$에서의

접선의 방정식 $y=f'(0)x+f(0)=ax+a$이

$y=e^{-x}f''(x)+a$와 같으므로

$f''(x)=axe^x$ 이다.

$f''(x)=axe^x$를 적분하면

$f'(x)=(ax-a)e^x+C_1$

$f'(0)=a$이므로 $C_1=2a$이다.

$f'(x)=(ax-a)e^x+2a$를 적분하면

$f(x)=(ax-2a)e^x+2ax+C_2$

$f(0)=a$이므로 $C_2=3a$이다.

$f(x)=(ax-2a)e^x+2ax+3a$에서

$f(2)=21$이라 하였으므로 $a=3$이다.

46-12. 12

조건 (가)에서 $f(0)=0$이고, $g(x)$는 $f(x)$의 역함수이므로

$g(x)=f^{-1}(x)$에서

$$\int_0^t \{f(x)\}^2 dx = \int_{f(0)}^{f(t)} \{g(x)\}^2 dx$$
$$= \int_{f(0)}^{f(t)} \{f^{-1}(x)\}^2 dx$$

$\{f^{-1}(x)\}^2$의 한 부정적분을 $F(x)$라 하면

$$\int_0^t \{f(x)\}^2 dx = F(f(t)) - F(f(0)) \qquad \cdots\cdots ㉠$$

㉠의 양변을 t에 대하여 미분하면

$\{f(t)\}^2 = f'(t)\{f^{-1}(f(t))\}^2$

$f^{-1}(f(t))=t$이므로 $\{f(t)\}^2=t^2f'(t)$

$f'(1)=16$이므로

$\{f(1)\}^2=1\times f'(1)=16$, $f(0)=0$이고

$f(x)$는 증가하는 함수이므로 $f(1)=4$이다.

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n^2}\times f''\left(\frac{k}{n}\right)=\int_0^1 xf''(x)dx$$
$$=\Big[xf'(x)\Big]_0^1-\int_0^1 f'(x)dx$$
$$=f'(1)-f(1)+f(0)$$
$$=16-4+0=12$$

Day. 47

수학1, 수학2

47-1. 8

$$\frac{6}{\log_{\sqrt{a}}2}-\frac{1}{\log_b 2}=\frac{\log_{\sqrt{a}}a^3}{\log_{\sqrt{a}}2}-\frac{\log_b b}{\log_b 2}$$

$=\log_2 a^3-\log_2 b=\log_2\dfrac{a^3}{b}$ 이다.

$\log_2\dfrac{a^3}{b}$의 값이 4 이하의 자연수가 되도록 하는 $\dfrac{a^3}{b}$ 값은

2, 4, 8, 16이다.

각각의 $(a,\ b)$ 순서쌍을 구해보면

i) $\frac{a^3}{b}=2$

$(2,\ 4),\ (4,\ 32)$

ii) $\frac{a^3}{b}=4$

$(2,\ 2),\ (4,\ 16)$

iii) $\frac{a^3}{b}=8$

$(4,\ 8),\ (6,\ 27)$

iv) $\frac{a^3}{b}=16$

$(4,\ 4),\ (8,\ 32)$

총 8개이다.

47-2. 13

시각 $t=3$에서 점 P의 위치는

$\int_0^3 v_1(t)dt$이다.

이때 $\int_0^3 \{v_1(t)-v_2(t)\}dt=\int_0^3 (t^2-4t+6)\,dt=9$이고

$\int_0^3 v_2(t)dt=4$이므로

점 P의 위치는 $\int_0^3 \{v_1(t)-v_2(t)\}dt+\int_0^3 v_2(t)dt$

$9+4=13$이다.

47-3. 18

$\{f(x)\}^2-4=\int_{-1}^{x}(2t+5)f(t)dt$

주어진 식의 양변을 미분하면

$2f(x)f'(x)=(2x+5)f(x)$이다.

$f'(x)=x+\frac{5}{2}$

$f(x)=\frac{1}{2}x^2+\frac{5}{2}x+C$이다.

$\{f(x)\}^2-4=\int_{-1}^{x}(2t+5)f(t)dt$

x에 -1을 대입하면

$\{f(-1)\}^2=4$이고 $f(x)$의 극솟값이 음수이므로

$f(-1)=-2,\ C=0$이다.

$f(4)=18$

47-4. ①

선분 AB를 3 : 1로 내분하는 점이 P이고

점 P의 y좌표가 0이므로

점 B의 y좌표는 $\frac{a}{3}$이다.

점 B의 좌표를 $\left(b,\ \frac{a}{3}\right)$라 하면

점 B는 함수 $f(x)=x(x-3)^2$ 위의 점이므로

$\frac{a}{3}=b(b-3)^2$이고

직선 AB와 점 B 위에서의 접선의 기울기가 같으므로

$$\frac{\frac{4a}{3}}{b}=(b-3)^2+2b(b-3)$$

$\frac{4a}{3}=b(b-3)^2+2b^2(b-3)$이다.

두 식을 연립하면

$4b(b-3)^2=b(b-3)^2+2b^2(b-3)$

$4b-12=3b-3$

$b=9$이다.

$\frac{a}{3}=b(b-3)^2=9(9-3)^2$

$a=972$이다.

47-5. ③

등차수열의 공차를 d라 하면

$10<a_2+a_4<17$ 에서

$a_2+a_4=4+4d$이므로 $6<4d<13$이다.

따라서 자연수 d는 2 또는 3이다.

이때 $\sum_{k=1}^{m} a_k=57$을 만족시키는 자연수 m이 있어야하므로

$d=3, m=6$이다.

따라서 $a_m=17$이다.

47-6. ①

i) $f(x)<3$ 인 경우

$-f(x)+3=-2f(x)+9,\ f(x)=6$

성립하지 않는다.

ii) $3\le f(x)<\frac{9}{2}$ 인 경우

$-f(x)+3=2f(x)-9,\ f(x)=4$

iii) $\frac{9}{2}<f(x)$ 인 경우

$f(x)-3=2f(x)-9,\ f(x)=6$

$f(x)=4,\ f(x)=6$ 를 만족시키는 x의 값은 3개

$a,\ 2,\ b$뿐이다.

따라서 함수 $f(x)=(x-2)^2+4$ 이고

$a,\ b$의 값은 함수 $f(x)=(x-2)^2+4$가 6이 되는

$2\pm\sqrt{2}$ 이다.

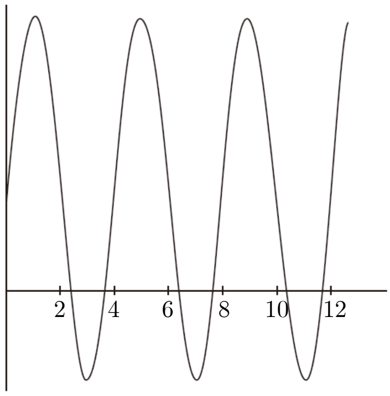
따라서 ab의 값은 2이다.

47-7. 28

$f(x)=a\sin\frac{\pi x}{2}+b$에서 주기는 4이다.

$\alpha_2-\alpha_1=\frac{4}{3},\ \alpha_m-\alpha_1=\frac{28}{3}$ 이므로

$\alpha_m - \alpha_2 = 8$ (2주기)이다.
함수 $f(x)$는 $x = k$에서 최댓값 9를 가지므로
$a + b = 9$이고 그림은 다음과 같이 나타낼 수 있다.
따라서 $a\sin\left(\frac{7\pi}{6}\right) + b = 0$이므로
$-\frac{a}{2} + b = 0$이다.
$b = \frac{a}{2}$, $m = 6$이고



$a = 6,\ b = 3,\ k = 13$
$a + 3b + k = 28$이다.

47-8. ④

등차수열의 공차가 2이므로 $a_n = 2n + p$라 하면
$a_{n+2} = 2n + p + 4$이고
$(2n + p - 26)(2n + p - 28) \geq 0$을 항상 만족해야 하므로
이차함수를 그려 생각해 보면
두 근이 $\frac{p}{2} - 13,\ \frac{p}{2} - 14$이고, n은 자연수이므로 모든
자연수에서 부등식이 성립하기 위해서는 p가 반드시 짝수여야만
한다.
$p = 2q$ (q는 정수)
$a_m = 2m + 2q,\ a_{m+2} = 2m + 2q + 4$라 하면,
$a_m \times a_{m+2} = 4(m+q)(m+q+2)$
$4(m+q)(m+q+2) > 280$
$(m+q)(m+q+2) > 70$을 만족하는 자연수 m의 최솟값이
5이므로 이를 대입하면
$(5+q)(7+q) > 70$
$(4+q)(6+q) \leq 70$이 되어야 하므로 $q = 3$, $p = 6$
$a_n = 2n + 6$
$\sum_{k=1}^{10} a_k = 110 + 60 = 170$이다.

확률과 통계

47-9. 19

$$\sum_{k=1}^{8}\mathrm{P}(X=k)=\sum_{k=1}^{8}\left(\frac{k}{8}\mathrm{P}(Y=k)+\frac{1}{16}\right)$$

$$=\frac{1}{8}\sum_{k=1}^{8}k\mathrm{P}(Y=k)+\sum_{k=1}^{8}\frac{1}{16}$$ 에서

이항분포에 의해 $\mathrm{E}(Y)=8p$이고

따라서 $1=\frac{1}{8}\times 8p+\frac{1}{2}$이므로

$p=\frac{1}{2}$이다.

$$\mathrm{E}(X)=\sum_{k=1}^{8}k\left(\frac{k}{8}\mathrm{P}(Y=k)+\frac{1}{16}\right)$$

$$=\frac{1}{8}\sum_{k=1}^{8}k^2\mathrm{P}(Y=k)+\sum_{k=1}^{8}\frac{k}{16}$$ 에서

$\mathrm{E}(Y^2)$을 구하기 위해 분산을 사용하면

$\mathrm{V}(Y)=np(1-p)=8\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=2$

$\mathrm{E}(Y^2)=\mathrm{V}(Y)+\mathrm{E}(Y)^2=18$이므로

따라서 $\mathrm{E}(X)=\frac{9}{2}$이다.

$\mathrm{E}(4X+1)=\frac{9}{2}\times 4+1=19$이다.

47-10. 201

$a+b=2$, $a+b=1$, $a+b=0$인 경우로 나눌 수 있다.

i) $a+b=2$이면 $c+d+e=6$이므로 ${}_2\mathrm{H}_2\times{}_3\mathrm{H}_6=84$이다.

ii) $a+b=1$이면 $c+d+e=7$이므로 ${}_2\mathrm{H}_1\times{}_3\mathrm{H}_7=72$이다.

iii) $a+b=0$이면 $c+d+e=8$이므로 ${}_2\mathrm{H}_0\times{}_3\mathrm{H}_8=45$이다.

따라서 구하는 값은 $84+72+45=201$이다.

47-11. ②

꺼낸 공의 색이 서로 다른 전체 경우의 수는

$3\times 6=18$ 가지이다.

i) 꺼낸 숫자가 1로 같을 때

검은 공 1 한 개, 흰 공 1개이므로

경우의 수는 1가지

ii) 꺼낸 숫자가 2로 같을 때

검은 공 2 두 개, 흰 공 2개이므로

경우의 수는 2가지

iii) 꺼낸 숫자가 3으로 같을 때

검은 공 3 세 개, 흰 공 3개이므로

경우의 수는 3가지

따라서 주머니에서 임의로 2개의 공을 동시에 꺼내어 꺼낸 공이 서로 다른 색일 때, 꺼낸 2개의 공에 적혀 있는 숫자가 같을

확률은 $\frac{6}{18}=\frac{1}{3}$이다.

47-12. ④

여사건을 이용하자. A를 배치한 후, 각 A 사이 공간들을 $a,\ b,\ c,\ d,\ e$라 하자

각 사이에 들어갈 책 B의 개수는 10이다.

따라서 $a+b+c+d+e=10$이다.

이때, b와 c와 d에는 한 권 이상의 책이 들어가야 하므로, $b+1=b'$ 같이 치환한다.

마찬가지로 c', d'을 만든다.

따라서 $a+b'+c'+d'+e=7$이므로

총 사건은 ${}_5\mathrm{H}_7$이다.

(나) 조건을 만족하지 않는 경우들을 빼준다.

네 개의 케이스가 존재한다.

i) 맨 앞과 맨 뒤에 모두 0권이 들어가는 경우

${}_3\mathrm{H}_7$

ii) 맨 앞에 1권, 맨 뒤에 0권이 들어가는 경우

${}_3\mathrm{H}_6$

iii) 맨 앞에 0권, 맨 뒤에 1권이 들어가는 경우

${}_3\mathrm{H}_6$

iv) 맨 앞과 맨 뒤에 모두 1권이 들어가는 경우

${}_3\mathrm{H}_5$

따라서 ${}_5\mathrm{H}_7$에서 위의 네 개 케이스를 모두 빼준다.

미적분

47-9. 10

$$\lim_{h\to0}\frac{f(x+2h)-f(x-h)}{h}$$

$$=\lim_{h\to0}\frac{f(x+2h)-f(x)+f(x)-f(x-h)}{h}$$

$$=\lim_{h\to0}\left\{\frac{f(x+2h)-f(x)}{h}-\frac{f(x-h)-f(x)}{h}\right\}$$

$$=2\lim_{h\to0}\frac{f(x+2h)-f(x)}{2h}+\lim_{h\to0}\frac{f(x-h)-f(x)}{-h}$$

$$=2f'(x)+f'(x)=3f'(x)=3x^2\ln x$$

이므로 $f'(x)=x^2\ln x$

$u'=x^2,\ v=\ln x$ 로 놓으면 $u=\frac{1}{3}x^3,\ v'=\frac{1}{x}$ 이므로

$$f(x)=\int x^2\ln x\,dx$$

$$=\frac{1}{3}x^3\ln x-\int\frac{1}{3}x^3\cdot\frac{1}{x}dx$$

$$=\frac{1}{3}x^3\ln x-\int\frac{1}{3}x^2dx$$

$$=\frac{1}{3}x^3\ln x-\frac{1}{9}x^3+C$$ (단, C는 적분상수)

$f(e)=\frac{1}{3}e^3-\frac{1}{9}e^3+C=\frac{1}{3}e^3$이므로

$C=\frac{1}{9}e^3$

따라서 $f(x)=\frac{1}{3}x^3\ln x-\frac{1}{9}x^3+\frac{1}{9}e^3$이므로

$f(1)=-\frac{1}{9}+\frac{1}{9}e^3=\frac{1}{9}(e^3-1)$이다.

47-10. ①

$y=e^x$에서 $y'=e^x$이므로 점 $(f(t),\ g(t))$에서의 접선의 방정식은

$y-g(t)=e^{f(t)}(x-f(t))$이다.

$y=e^{f(t)}x-e^{f(t)}f(t)+g(t)$ …… ㉠

이때 $g(t)=e^{f(t)}$이고 ㉠이 점 $(\ln t,\ 0)$을 지나므로

$e^{f(t)}\ln t-e^{f(t)}f(t)+e^{f(t)}=0$

$e^{f(t)}\neq 0$이므로 $\ln t-f(t)+1=0$이다.

따라서 $f(t)=\ln t+1,\ g(t)=e^{\ln t+1}$

$\lim_{t\to 0+}\frac{g(t)}{f(t+1)-1}=e$이다.

47-11. ②

문제에서 함수$f(x)$는

$x>1$인 경우

$\lim_{n\to\infty}\frac{x^{2n+1}-x^n}{x^{2n}+x^{n+1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{x-x^{-n}}{1+x^{-n+1}}=\lim_{n\to\infty}x=x$이고

$x<1$인 경우

$\lim_{n\to\infty}\frac{x^{2n+1}-x^n}{x^{2n}+x^{n+1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{x^{n+1}-1}{x^n+x}=\lim_{n\to\infty}-\frac{1}{x}=-\frac{1}{x}$이다.

$x=1$인 경우

$\lim_{n\to\infty}\frac{x^{2n+1}-x^n}{x^{2n}+x^{n+1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1-1}{1+1}=0$

이때 조건

(가) $f(\alpha)+f(\beta)=0$

(나) $f(\alpha)\times\{f(\beta)\}^2=8$를 모두 만족하려면

$\alpha>1,\ \beta<1$이어야 한다.

따라서 $\alpha-\frac{1}{\beta}=0,\ \alpha\left(\frac{1}{\beta}\right)^2=8$ 이므로

$\alpha=2,\ \beta=\frac{1}{2}$이고

$\alpha+\beta=\frac{5}{2}$이다.

47-12. ③

$\overline{OQ}=2\cos\theta$에서 문제의 조건에 의해 $\overline{OR}=2+2\cos\theta$가 된다.

이때 $\overline{RS}=(2+2\cos\theta)\sin\theta$ 이고

삼각형 ORS의 넓이는 $2(1+\cos\theta)^2\sin\theta\cos\theta$이다.

$S(\theta)=2(1+\cos\theta)^2\sin\theta\cos\theta$

$=2\sin\theta\cos\theta+4\sin\theta\cos^2\theta+2\sin\theta\cos^3\theta$ 이다.

$\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} S(\theta)\,d\theta$

$=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} (2\sin\theta\cos\theta+4\sin\theta\cos^2\theta+2\sin\theta\cos^3\theta)d\theta$

$=\frac{7+6\sqrt{3}}{12}$

$p+q=13$이다.