# 백일대장

수능 역전을 위한 백일 전략서

# 06

## 정답 및 해설

100人대장

# Day. 36

## 수학1, 수학2

### 36-1. 67

$f(x)=x^4-4x^3-2x^2+12x+12$라 하면

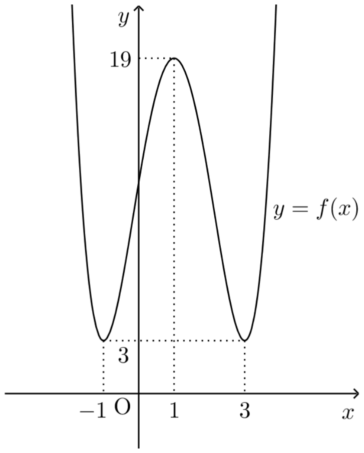
$f'(x)=4(x+1)(x-1)(x-3)$

이므로 $x=-1$에서 극솟값 $3$,

$x=1$에서 극댓값 $19$,

$x=3$에서 극솟값 $3$을 가지므로

함수 $y=f(x)$의 그래프는 그림과 같다.




따라서 $k<3$일 때, $a_k=0$

$k=3$일 때, $a_k=2$

$3<k<19$일 때, $a_k=4$

$k=19$일 때, $a_k=3$

$k>19$일 때, $a_k=2$

$$\sum_{k=1}^{20} a_k = 67$$

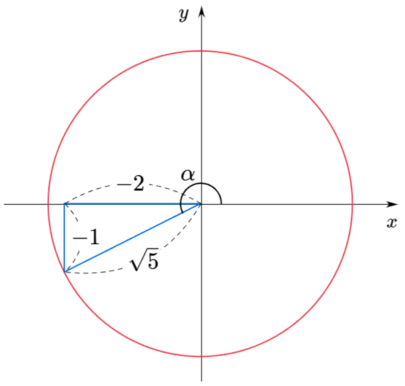
### 36-2. ①

$(3\sin x+4\cos x)(2\sin x-\cos x)=0$에서

$\tan x=-\frac{4}{3}$ 또는 $\tan x=\frac{1}{2}$

그런데 $\pi<\alpha<\frac{3}{2}\pi$이므로 $\tan\alpha>0$

따라서 $\tan\alpha=\frac{1}{2}$




$\cos\alpha = -\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$, $\sin\alpha = -\dfrac{\sqrt{5}}{5}$

$\therefore\ \sin\alpha + \cos\alpha = -\dfrac{3\sqrt{5}}{5}$

## 36-3. ①

$n=1$일 때, $a_1 = S_1 = 3$

$n \geq 2$일 때, $a_n = S_n - S_{n-1} = 2n+1$

따라서 $a_n = 2n+1\ (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$

$a_{n+m} - a_n = 2(n+m)+1-(2n+1) = 2m$이므로

$\displaystyle\sum_{n=1}^{8}(a_{n+m}-a_n) = \sum_{n=1}^{8} 2m = 8\times 2m = 16m = 48$

따라서 $m=3$

$a_m = a_3 = 7$

## 36-4. 33

$$\begin{aligned} b_1+b_2 &= (a_1+a_2)+(a_2+a_4) \\ &= (a_1+a_2)+(a_2+(a_2+1)) \\ &= a_1+3a_2+1 \\ &= 3a_2+4=3 \end{aligned}$$

따라서 $a_2 = -\dfrac{1}{3}$

$\displaystyle\sum_{n=1}^{5}(a_n+b_n)$

$\displaystyle= \sum_{n=1}^{5} a_n + \sum_{n=1}^{5} b_n$

$\displaystyle= \sum_{n=1}^{5} a_n + \{b_1+(b_2+b_3)+(b_4+b_5)\}$

$= \{a_1+a_2+(a_1+1)+(a_2+1)+(a_1+2)\}+\{(a_1+a_2)+6+12\}$

$= \left(3-\dfrac{1}{3}+4+\dfrac{2}{3}+5\right)+\left(3-\dfrac{1}{3}+18\right)$

$=33$

## 36-5. ④

$f(x) = ax^2(x-3)+k$로 놓을 때,

$f(4) = 16a+k=0$

$\int_0^4 f(x)dx=4k=16$이므로

$k=4,\ a=-\frac{1}{4}$

따라서 $f(x)=-\frac{1}{4}x^2(x-3)+4$

$f(x)$는 $x=0$에서 극솟값 4,

$x=2$에서 극댓값 5

를 가지므로 극댓값과 극솟값의 합은 $5+4=9$

## 36-6. 26

$f(x)=(x-1)(x-3)=x^2-4x+3$

$\log_{\frac{1}{4}}f(x)>\log_{\frac{1}{2}}(x+1)$

$\log_2 f(x)<\log_2(x+1)^2$

진수조건에 의하여 $f(x)>0,\ x+1>0$이므로

$-1<x<1,\ x>3$ … ㉠

$f(x)<(x+1)^2$에서 $x>\frac{1}{3}$ … ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$\frac{1}{3}<x<1,\ x>3$이고 부등식

$(x-a)(x-b)(x-c)>0$

의 해와 같으므로

$a=\frac{1}{3},\ b=1,\ c=3$

으로 둘 수 있다.

따라서 $6(a+b+c)=26$

## 36-7. ③

조건 (가)에서 $\angle\mathrm{BAD}=\angle\mathrm{CAD}=\theta$로 놓을 수 있다.

$\overline{\mathrm{AB}}=x,\ \overline{\mathrm{BD}}=y$라 하면

조건 (나)에서 삼각형 ACD에 외접하는 원의 반지름의 길이가 삼각형 ABD에 외접하는 원의 반지름의 길이의 3배이므로 사인법칙에 의해

$$3\times\frac{\overline{\mathrm{BD}}}{\sin(\angle\mathrm{BAD})}=\frac{\overline{\mathrm{CD}}}{\sin(\angle\mathrm{CAD})}$$

$\overline{\mathrm{CD}}=3y$ … ㉠

㉠을 조건 (가)에 대입하면 $\overline{\mathrm{AC}}=3x$

조건 (다)에서 코사인법칙을 이용하면

$$\frac{\overline{\mathrm{AC}}^2+\overline{\mathrm{BC}}^2-\overline{\mathrm{AB}}^2}{2\overline{\mathrm{AC}}\times\overline{\mathrm{BC}}}=2\times\frac{\overline{\mathrm{AB}}^2+\overline{\mathrm{BC}}^2-\overline{\mathrm{AC}}^2}{2\overline{\mathrm{AB}}\times\overline{\mathrm{BC}}}$$

$$\frac{8x^2+16y^2}{24xy}=2\times\frac{-8x^2+16y^2}{8xy}$$

$$\therefore\ \frac{y^2}{x^2}=\frac{\overline{\mathrm{BD}}^2}{\overline{\mathrm{AB}}^2}=\frac{7}{10}$$

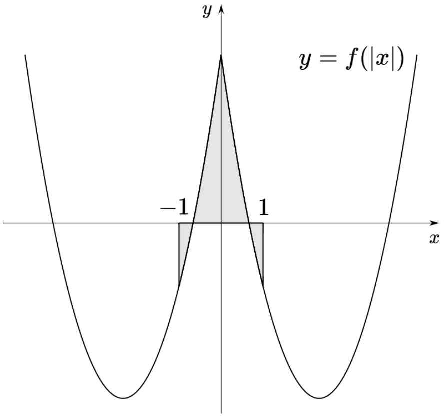
**36-8.** 12

$$f(|x|)=\begin{cases} f(x) & (x \geq 0) \\ f(-x) & (x < 0) \end{cases}$$

$f(x)=x^2+ax+b$라 하자.

조건 (가)에서 $g(0)=\int_0^2 f(t)dt=0$이므로

$\frac{8}{3}+2a+2b=0 \quad \cdots$ ㉠




조건 (나)에서 이차함수 $f(x)$의 축이 $y$축보다 오른쪽에 있을 때 함수 $g(x)$는 $x=-1$에서 극댓값을 가진다.

$$\begin{aligned} g(-1) &= \int_{-1}^{0} f(-x)dx+\int_0^1 f(x)dx \\ &= 2\int_0^1 f(x)dx \\ &= \frac{2}{3}+a+2b=5 \quad \cdots ㉡ \end{aligned}$$

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$a=-7,\ b=\frac{17}{3}$

따라서 $f(x)=x^2-7x+\frac{17}{3}$

$\int_{-1}^{1} f(x)dx=2\int_0^1\left(x^2+\frac{17}{3}\right)dx=12$

## 확률과 통계

**36-9.** ④

A→P로 가는 경우의 수 : $\frac{3!}{2!}=3$

P→Q로 가는 경우의 수 : 2

Q→B로 가는 경우의 수 : $\frac{4!}{2!2!}=6$

따라서 모든 경우의 수는

$3\times2\times6=36$

**36-10.** 16

확률밀도함수 $f(x)$가 직선 $x=12$에 대하여 대칭이므로

$m=12$

집합 $\{x\,|\,f(x)\ge f(k)\}$의 임의의 원소 $x$는

$-\left|\dfrac{k-m}{\sigma}\right| \le \dfrac{x-m}{\sigma} \le \left|\dfrac{k-m}{\sigma}\right|$

를 만족시킨다.

$\mathrm{P}(x_1 \le X \le x_2) \le 0.6826$에서

$\mathrm{P}(x_1 \le X \le x_2) = \mathrm{P}\left(\dfrac{x_1-m}{\sigma} \le Z \le \dfrac{x_2-m}{\sigma}\right)$

$\le \mathrm{P}\left(-\dfrac{|k-m|}{\sigma} \le Z \le \dfrac{|k-m|}{\sigma}\right)$

이때 $\mathrm{P}(-1.0 \le Z \le 1.0) = 0.6826$이므로

$\dfrac{|k-m|}{\sigma} \le 1$

$m-\sigma \le k \le m+\sigma$

따라서 $a=m+\sigma$, $b=m-\sigma$

이때 $a-b=8$이므로

$2\sigma=8$, $\sigma=4$

따라서 $m+\sigma=16$

## 36-11. ②

집합 $X$의 원소 중 백의 자리 수가 3인 원소의 개수는

${}_{10}\Pi_{2}=100$

백의 자리수가 4, 5, ⋯, 9인 원소의 개수도 각각 100이므로

$100\times 6=600$

따라서 집합 $X$의 원소의 개수는 700

한편, $3\le a\le b\le c\le 9$를 만족시키는 세 자리 자연수의 개수는

3, 4, ⋯, 9에서 3개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

${}_{7}\mathrm{H}_{3}={}_{9}\mathrm{C}_{3}=84$

한편, $3\le a<b<c\le 9$를 만족시키는 세 자리 자연수의 개수는

3, 4, ⋯, 9에서 3개를 택하는 조합의 수와 같으므로

${}_{7}\mathrm{C}_{3}=35$

따라서 구하는 확률은

$\dfrac{\frac{35}{700}}{\frac{84}{700}}=\dfrac{5}{12}$

## 36-12. 392

i ) $a$, $c$, $e$의 공차가 4일 때

$1\le a\le 6$이고 $b$와 $d$의 경우의 수는 각각 5이므로

$6\times 5^2=150$

ii) $a$, $c$, $e$의 공차가 5일 때

$1\le a\le 4$이고 $b$와 $d$의 경우의 수는 각각 6이므로

$4\times 6^2=144$

iii) $a$, $c$, $e$의 공차가 6일 때

$1\le a\le 2$이고 $b$와 $d$의 경우의 수는 각각 7이므로

$2 \times 7^2 = 98$
따라서 구하는 경우의 수는
$150 + 144 + 98 = 392$

## 미적분

### 36-9. ②

조건 (가)에서 $f(0) = g(0) = 0$이므로 두 상수 $a$, $b$에 대하여
두 함수 $f(x)$, $g(x)$를 각각
$f(x) = x(x-a)$, $g(x) = -x(x-b)$,
로 놓을 수 있다.
또한 조건 (가)에서 $f'(0) = g'(0)$이므로
$a = -b$이다.

$$\lim_{x \to 0} \frac{\ln\{1 + f(x) - g(x)\}^{g(x)}}{x^3}$$
$$= \lim_{x \to 0} \frac{g(x) \times \ln(1 + 2x^2)}{x^3}$$
$$= \lim_{x \to 0} \left\{ \frac{g(x)}{x} \times \frac{\ln(1+2x^2)}{x^2} \right\}$$
$$= g'(0) \times 2 = 4$$

따라서 $g'(0) = 2$
$b = 2$, $a = -2$
$f(x) = x(x+2)$, $g(x) = -x(x-2)$
$$\lim_{x \to 2} \frac{(f \circ g)(x) - (f \circ g)(2)}{x-2} = g'(2) f'(g(2)) = -4$$

### 36-10. ⑤

$f(x)$ 의 부정적분을 $F(x)$ 라 하면,
준 식은
$$\lim_{x \to 1} \left\{ \frac{\cos \pi x}{x-1} \int_1^x f(t)dt \right\}$$
$$= \lim_{x \to 1} \left\{ \cos \pi x \times \frac{F(x) - F(1)}{x-1} \right\}$$
$$= \lim_{x \to 1} (\cos \pi x) \times F'(1)$$
$$= -f(1)$$
$$= -a \cos \pi = 3$$
$\therefore\ a = 3$
$\therefore\ f(x) = 3\cos(\pi x^2)$
$f(3) = 3\cos 9\pi = -3$

### 36-11. ②

점 P에서의 접선의 방정식은
$$y = \frac{1 - \ln t}{t^2}(x - t) + \frac{\ln t}{t}$$
점 B의 좌표는 접선의 $y$절편과 같으므로

$B\left(0,\ \frac{2\ln t-1}{t}\right)$

i ) $0<t<e$일 때

점 A의 $y$좌표가 점 B의 $y$좌표보다 크므로

$f(t)=\frac{1}{2}\times t\times\left(\frac{\ln t}{t}-\frac{2\ln t-1}{t}\right)=\frac{1-\ln t}{2}$

ii) $e\le t\le e^2$

점 B의 $y$좌표가 점 A의 $y$좌표보다 크므로

$f(t)=\frac{1}{2}\times t\times\left(\frac{2\ln t-1}{t}-\frac{\ln t}{t}\right)=\frac{\ln t-1}{2}$

$\int_1^{e^2}f(t)dt=\int_1^e\frac{1-\ln t}{2}dt+\int_e^{e^2}\frac{\ln t-1}{2}dt=e-1$

## 36-12. ⑤

$$f(x)=\begin{cases}1 & (x=-1)\\ x+2 & (-1<x<1)\\ 2 & (x=1)\\ x^2 & (x<-1,\ 1<x)\end{cases}$$

조건 (가)에 의하여

$a_{2n-1}=-1$

조건 (나), (다)에 의하여

$a_{2n}=-\sqrt{2}$ 또는 $a_{2n}=1$ 또는 $a_{2n}=\sqrt{2}$이다.

$\sum_{n=1}^{7}a_n=4\times(-1)+a_2+a_4+a_6=-3$

따라서 $a_2+a_4+a_6=1$이며

가능한 $a_2,\ a_4,\ a_6$의 조합은 각각 $-\sqrt{2},\ 1,\ \sqrt{2}$에서 하나씩 선택하는 것이다.

$\sum_{n=1}^{7}(a_n)^2=4\times(-1)^2+(-\sqrt{2})^2+(\sqrt{2})^2+1=9$

# Day. 37

## 수학1, 수학2

## 37-1. ④

$f'(x)=2x$이고

$h(x)=f(x)g(x)$라 하자.

$\lim_{x\to2}\frac{f(x)g(x)-10}{x^2-4}=\lim_{x\to2}\frac{h(x)-10}{x^2-4}=1$

에서 $h(2)=10$이고

$h(2)=f(2)g(2)=10$에서 $g(2)=2$

$\lim_{x\to2}\frac{h(x)-10}{x^2-4}=\lim_{x\to2}\frac{h(x)-h(2)}{(x-2)(x+2)}=\frac{h'(2)}{4}=10$

에서 $h'(2)=40$이다.

이때,

$h'(x)=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$ 이므로

$h'(2)=f'(2)g(2)+f(2)g'(2)=40$ 에서

$g'(2)=\dfrac{32}{5}$

## 37-2. 25

$$\sum_{k=1}^{10}\{(a_k)^2+(b_k)^2\}=\sum_{k=1}^{10}\{(a_k+b_k)^2-2a_kb_k\}$$
$$=\sum_{k=1}^{10}(k^2-2a_kb_k)$$
$$=\sum_{k=1}^{10}k^2-2\sum_{k=1}^{10}a_kb_k$$
$$=\frac{10\cdot11\cdot21}{6}-2\sum_{k=1}^{10}a_kb_k$$
$$=385-2\sum_{k=1}^{10}a_kb_k=335$$

$\therefore \displaystyle\sum_{k=1}^{10}a_kb_k=25$

## 37-3. ④

실수 전체의 집합에서

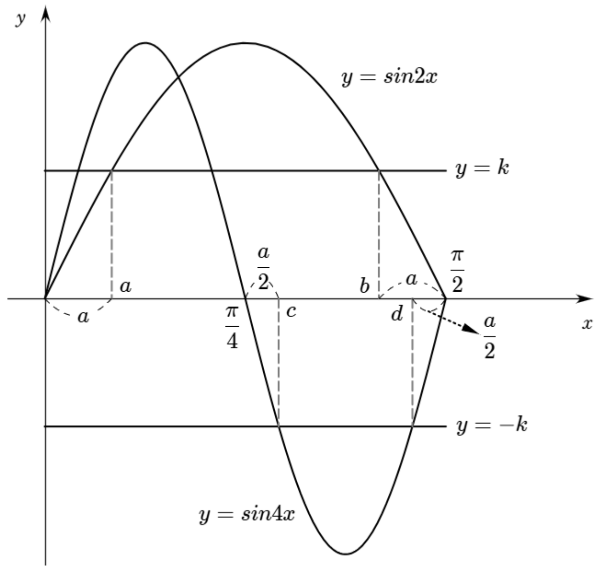
$f'(x)=3x^2-2mx+4m-4\geq 0$ 이므로

$\dfrac{D}{4}=m^2-12m+12\leq 0$

$6-2\sqrt{6}\leq m\leq 6+2\sqrt{6}$

$m=2,\ 3,\ 4,\ \cdots,\ 10$

## 37-4. ③




$b=\dfrac{\pi}{2}-a,\ c=\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{a}{2},\ d=\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{a}{2}$

$\therefore\ \sin(a+b+c+d)=\sin\left(\dfrac{5}{4}\pi\right)=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

**37-5.** 10

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)g(x)-x^4-4x^3}{x^2}=7$$

에서 $f(x)g(x)$의 $x^4$의 계수는 $1$, $x^3$의 계수는 $4$, $x^2$의 계수는 $7$이라는 것을 알 수 있다.

$f(x)=x^2+ax+b,\ g(x)=x^2+cx+d$

라 할 때,

$f(x)g(x)=(x^2+ax+b)(x^2+cx+d)$

에서 $x^3$의 계수는 $a+c$, $x^2$의 계수는 $ac+b+d$이므로

$a+c=4 \quad \cdots ㉠$

$ac+b+d=7 \quad \cdots ㉡$

$\lim_{x\to0}\frac{f(x)-g(x)}{x}=2$에서

$f(0)-g(0)=b-d=0 \quad \cdots ㉢$

$f'(0)-g'(0)=a-c=2 \quad \cdots ㉣$

㉠, ㉡, ㉢, ㉣에 의하여

$a=3,\ b=2,\ c=1,\ d=2$

$\therefore\ f(1)+g(1)=6+4=10$

**37-6.** ②

등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 $b$, 공차를 $d$라 하자

$a_n=b+(n-1)d\ (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$

$S_{n+2}-S_n=a_{n+1}+a_{n+2}$이므로

$(b+nd)+(b+(n+1)d)=-12n+a$

$2dn+2b+d=-12n+a$

$2d=-12,\ 2b+d=a$이므로

$d=-6,\ b=\frac{a}{2}+3$

$\therefore\ a_n=\frac{a}{2}+3-6(n-1)$

$S_p=S_q$를 만족시키는 서로 다른 두 자연수 $p,\ q\ (p>q)$의 모든 순서쌍 $(p,\ q)$의 개수가 $8$이 되는 경우는 아래 두 가지 경우다.

i) $a_9=0$일 때

$S_8=S_9,\ S_7=S_{10},\ \cdots,\ S_1=S_{16}$

이므로 모든 $(p,\ q)$의 개수가 $8$이다.

$a_9=\frac{a}{2}-45=0$

$\therefore\ a=90$

ii) $a_9=3$일 때

$S_8=S_{10},\ S_7=S_{11},\ \cdots,\ S_1=S_{17}$

이므로 모든 $(p,\ q)$의 개수가 $8$이다.

$a_9=\frac{a}{2}-45=3$

$\therefore\ a=96$

따라서 모든 자연수 $a$의 값의 합은 $90+96=186$

## 37-7. ④

조건 (가)에서 $f(1)=0$이므로 $g(0)=1$

조건 (나)에 의하여

$g(1)=2g(0)=2$이므로 $f(2)=1$

$g(2)=2g(1)=4$이므로 $f(4)=2$

$g(3)=2g(2)=8$이므로 $f(8)=3$

이때, $f(x)$가 증가하므로 역함수 $g(x)$도 증가한다.

$\int_1^2 f(x)dx=\frac{1}{3}$에서 $\int_0^1 g(x)dx=2-\frac{1}{3}=\frac{5}{3}$

$$\int_1^2 g(x)dx=\int_0^1 g(x+1)dx=2\int_0^1 g(x)dx=\frac{10}{3}$$

$$\int_2^3 g(x)dx=2\int_1^2 g(x)dx=\frac{20}{3}$$

따라서 $\int_1^8 f(x)dx=8\times3-\left(\frac{5}{3}+\frac{10}{3}+\frac{20}{3}\right)=\frac{37}{3}$

## 37-8. ④

i) $a_m=a_{m+1}=0$인 경우

$n\ge m$인 모든 자연수 $n$에 대하여 $a_n=0$이다.

그리고 $3\le n\le m$인 모든 자연수 $n$에 대하여 $a_n=0$인 경우 ${a_{n-1}}^2+3a_{n-1}=0$이므로 $a_{n-1}=0$ 또는 $a_{n-1}=-3$이다.

그러나 $a_{n-1}=-3$인 경우 ${a_{n-2}}^2+3a_{n-2}=-3$이므로 정수인 $a_{n-2}$가 존재하지 않는다.

따라서 수열 $\{a_n\}$은 $a_1$만 $0$ 또는 $-3$이 될 수 있고 나머지 항은 모두 $0$이다.

그러므로 $\sum_{k=1}^{2m}a_k=-99$를 만족시킬 수 없다.

ii) $a_m=a_{m+1}\neq0$인 경우

$a_m={a_m}^2+3a_m$

$a_m=a_{m+1}=-2$이고

$n\ge m$인 모든 자연수 $n$에 대하여 $a_n=-2$이다.

그리고 $3\le n\le m$인 모든 자연수 $n$에 대하여 $a_n=-2$인 경우

${a_{n-1}}^2+3a_{n-1}=-2$이므로 $a_{n-1}=-1$ 또는 $a_{n-1}=-2$이다.

그러나 $a_{n-1}=-1$인 경우 ${a_{n-2}}^2+3a_{n-2}=-1$이므로 정수인 $a_{n-2}$가 존재하지 않는다.

따라서 수열 $\{a_n\}$은 $a_1$만 $-1$ 또는 $-2$이 될 수 있고 나머지 항은 모두 $-2$이다.

이때, $\sum_{k=1}^{2m}a_k=-99$를 만족시키려면 $a_1=-1$이어야 한다.

$$\sum_{k=1}^{2m}a_k=-1-2(2m-1)=-4m+1=-99$$

$\therefore\ m=25$

iii) $a_m = -a_{m+1} \neq 0$인 경우

$a_m = -a_m^{\;2} - 3a_m$

$a_m = -4,\ a_{m+1} = 4$이다.

그런데 $a_{m-1}^{\;2} + 3a_{m-1} = -4$이므로 정수인 $a_{m-1}$이

존재하지 않아 $m = 1$일 수밖에 없다.

그러나 $a_{m+1}$ 이후의 모든 항은 모두 양수이므로

$\sum_{k=1}^{2m} a_k = -99$를 만족시킬 수 없다.

## 확률과 통계

### 37-9. 50

(전체 경우의 수)$-${($a$가 나오지 않는 경우의 수)$+$($b$가 나오지 않는 경우의 수)}$+$($a$와 $b$가 모두 나오지 않는 경우의 수)

$= 3^4 - (2^4 + 2^4) + 1^4$

$= 81 - 32 + 1$

$= 50$

### 37-10. ⑤

$X \sim \mathrm{N}(m,\ 6^2)$

$\mathrm{P}(a \leq X \leq b) = p$를 만족시키는 두 실수 $a,\ b\ (a < b)$의 조합 중에서 $b-a$가 최솟값을 가지는 경우는 $a,\ b$가 정규분포에서 평균 $m$에 대하여 서로 대칭인 경우다.

이때 $a+b = 2m,\ b-a = 12$이므로

$a = m-6,\ b = m+6$

$p = \mathrm{P}(m-6 \leq X \leq m+6)$

$\quad = \mathrm{P}(-1 \leq Z \leq 1)$

$\quad = 2 \times 0.3413 = 0.6826$

### 37-11. 133

천의 자리 숫자를 $a$, 백의 자리 숫자를 $b$, 십의 자리 숫자를 $c$, 일의 자리 숫자를 $d$라 하면

$1 \leq a \leq 3,\ 1 \leq b \leq 9,\ 1 \leq c \leq 9,\ 1 \leq d \leq 9$

i) $a = 1$인 경우

$b+c+d = 12$이고,

$b,\ c,\ d$중 하나가 10이 되는 경우는 제외해야 하므로

${}_3\mathrm{H}_9 - 3 = 52$

ii) $a = 2$인 경우

$b+c+d = 11$이므로

${}_3\mathrm{H}_8 = 45$

iii) $a = 3$인 경우

$b+c+d = 10$이므로

${}_3\mathrm{H}_7 = 36$

따라서 $52 + 45 + 36 = 133$

## 37-12. 42

꺼낸 카드에 적힌 숫자를 차례로 $a$, $b$, $c$라 하자.

3회 시행 후 시행을 멈추기 위해서는

$a$는 1이 아니고 $b$와 서로소이고, $c$는 $b$의 배수이어야 한다.

i) $b=1$인 경우

$a$, $c$를 각각 정하는 경우의 수 : ${}_5\mathrm{P}_2=20$

이때 $a$, $b$, $c$ 중 3이 있는 경우의 수 : $4+4=8$

ii) $b=2$인 경우

$a$, $c$를 각각 정하는 경우의 수 : $2\times3=6$

이때 $a$, $b$, $c$ 중 3이 있는 경우의 수 : 2

iii) $b=3$인 경우

$a$, $c$를 각각 정하는 경우의 수 : $3\times1=3$

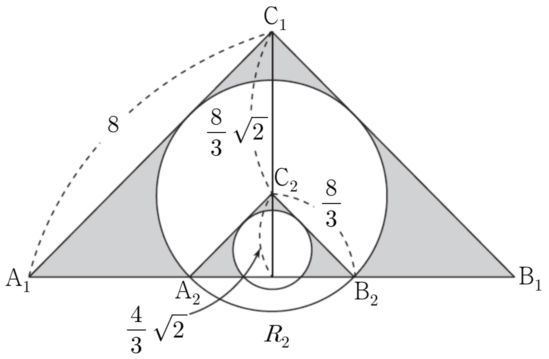
이때 $a$, $b$, $c$ 중 3이 있는 경우의 수 : 3

따라서 구하는 확률은 $\dfrac{8+2+3}{20+6+3}=\dfrac{13}{29}$

$\therefore\ p+q=42$

# 미적분

## 37-9. ④




원의 중심이 직각이등변삼각형의 무게중심이라는 조건을 이용

첫째항의 값은 $32-\left(\dfrac{3}{4}\times\dfrac{64}{9}\pi+\dfrac{1}{2}\times\dfrac{64}{9}\right)=\dfrac{256}{9}-\dfrac{16}{3}\pi$

공비는 $\dfrac{1}{9}$

따라서 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}S_n=\dfrac{\dfrac{256}{9}-\dfrac{16}{3}\pi}{1-\dfrac{1}{9}}=32-6\pi$

## 37-10. ①

$a_1=\dfrac{1}{1}\times\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$

$a_2=\dfrac{1}{2}\times\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$

$a_3=\dfrac{1}{3}\times\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$

$$a_4=\frac{1}{4}\times\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

$$\vdots$$

따라서 $a_n a_{n+1}=-\dfrac{1}{2n(n+1)}$

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n a_{n+1}=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n(n+1)}=-\frac{1}{2}$$

## 37-11. ④

$f'(x)=2\ln x-f(x)\ln x$

$\quad=\{f(x)-2\}(-\ln x)\ \cdots$ ㉠

이때 $f(x)$가 연속함수인데 조건 (가)에서 $f(x)\neq 2$이고 $f(e)>2$이므로 모든 $x$에서 $f(x)>2$이다.

$$\frac{f'(x)}{f(x)-2}=-\ln x$$

$$\int\frac{f'(x)}{f(x)-2}dx=\int(-\ln x)dx$$

$\ln(f(x)-2)=-x\ln x+x+C$ (단, $C$는 적분상수)

이때 $f(e)=e^2+2$이므로

$\ln(f(e)-2)=2=-e\ln e+e+C$

따라서 $C=2$

$\therefore\ f(x)=e^{-x\ln x+x+2}+2$

㉠에서 $f'(1)=0$이고 $x=1$을 경계로 $f'(x)$가 양수에서 음수로 바뀌므로 함수 $f(x)$는 $x=1$일 때,

극댓값 $f(1)=e^3+2$를 가진다.

## 37-12. ①

$\overline{BC}=2\sin\dfrac{\theta}{2}$, $\overline{EC}=\dfrac{3}{4}\overline{BC}=\dfrac{3}{2}\sin\dfrac{\theta}{2}$

$\angle CBD=\angle BAC=\theta$이므로 $\overline{CD}=4\sin^2\dfrac{\theta}{2}$

삼각형 DEC에서 코사인법칙을 이용하면

$$\overline{ED}^2=\overline{EC}^2+\overline{CD}^2-2\overline{EC}\times\overline{CD}\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\theta}{2}\right)$$

$$=\frac{9}{4}\sin^2\frac{\theta}{2}+16\sin^4\frac{\theta}{2}-12\sin^3\frac{\theta}{2}\times\sin\frac{\theta}{2}$$

$$=\frac{9}{4}\sin^2\frac{\theta}{2}\left(1+\frac{16}{9}\sin^2\frac{\theta}{2}\right)$$

$$\overline{ED}=\frac{3}{2}\sin\frac{\theta}{2}\sqrt{1+\frac{16}{9}\sin^2\frac{\theta}{2}}$$

$$\therefore\ f(\theta)=\frac{3}{2}\sin\frac{\theta}{2}\left(\sqrt{1+\frac{16}{9}\sin^2\frac{\theta}{2}}-1\right)$$

$$\lim_{\theta\to0+}\frac{f(\theta)}{\theta^3}=\lim_{\theta\to0+}\frac{\frac{8}{3}\sin^3\frac{\theta}{2}}{\theta^3\left(\sqrt{1+\frac{16}{9}\sin^2\frac{\theta}{2}}+1\right)}$$

$$=\frac{\frac{8}{3}\times\left(\frac{1}{2}\right)^3}{2}=\frac{1}{6}$$

# Day. 38

## 수학1, 수학2

### 38-1. ③

직선 $y=k(x-1)$과 곡선 $y=\sqrt{3}\tan\pi x$를

작은것부터 차례로 나열한 것을 $\alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3,\ \alpha_4$라 하면

$\alpha_2=1,\ \alpha_1+\alpha_3=2$이므로

$\sqrt{3}\tan\alpha_1+\sqrt{3}\tan\alpha_3=0,\ \sqrt{3}\tan\alpha_2=0$

이다. 따라서 $\dfrac{5}{2}<\alpha_4<3$에서

$\sqrt{3}\tan\alpha_4=-3,\ \tan\alpha_4=-\sqrt{3}$

이고, $\alpha_4=\dfrac{8}{3}$

$\therefore\ k=\dfrac{-3-0}{\dfrac{8}{3}-1}=-\dfrac{9}{5}$

### 38-2. 45

두 점 A(1, 4), B에서 $y$축에 내린 수선의 발을 각각

$\mathrm{A}',\ \mathrm{B}'$이라 하면 $\mathrm{A}'(0,\ 4)$이므로

$\overline{\mathrm{QA}'}=q-4,\ \overline{\mathrm{AA}'}=1$

정사각형 APBQ에서 $\overline{\mathrm{AQ}}=\overline{\mathrm{QB}}$이고 $\angle\mathrm{AQB}=90°$임을

이용하면 두 직각삼각형 $\mathrm{AA}'\mathrm{Q}$와 $\mathrm{QB}'\mathrm{B}$가 합동이므로

$\overline{\mathrm{BB}'}=\overline{\mathrm{QA}'}=q-4,\ \overline{\mathrm{QB}'}=\overline{\mathrm{AA}'}=1$

$\therefore\ \mathrm{B}=(q-4,\ q+1)$

정사각형 APBQ에서 두 대각선 AB, PQ의 중점이 일치하므로

$1+(q-4)=p$이고 $4+(q+1)=2^p+q$

$2^p=5$에서 $p=\log_2 5$

$q=p+3=\log_2 5+3=\log_2 40,\ 2^q=40$

$\therefore\ 2^p+2^q=40+5=45$

### 38-3. 16

등비수열의 첫째항을 $a$, 공비를 $r$라 하면

$a_3-a_2=ar(r-1)=\dfrac{1}{3}\quad\cdots$ ㉠

$a_5-a_2=a(r^4-r)=ar(r^3-1)=ar(r-1)(r^2+r+1)$

$1<ar(r-1)(r^2+r+1)<7$에서 ㉠을 대입하면

$3<r^2+r+1<21$

따라서 $-5<r<-2$ 또는 $1<r<4$

$\dfrac{a_6}{a_4}=r^2$에서 $r$이 정수이므로 $r=-4$일 때, $r^2$의 최댓값은

16이다.

## 38-4. ④

$f(x)=a(x-1)^2(x-3)+3a$

로 놓을 수 있고

$A-B=\int_0^3 (f(x)-ax)dx=\frac{9}{4}a=3$

$\therefore\ a=\frac{4}{3}$

## 38-5. ①

$a_2=a_1-5$

$a_3=a_1-3$

$a_4=a_1-1$

$a_5=a_1+1$

$a_6=a_1-4$

$a_7=a_1-2$

$a_8=a_1$

$\vdots$

수열 $\{a_n\}$이 7항마다 반복되므로

$\sum_{k=1}^{30} a_k=4\times\sum_{k=1}^{7} a_k+a_{29}+a_{30}$

$=4(7a_1-14)+a_1+(a_1-5)$

$=30a_1-61=5$

$\therefore\ a_1=\frac{11}{5}$

## 38-6. ③

$f(1)=g(1)=0$이고

방정식 $g(x)-f(x)=f(x)(x^2+4x+a-1)=0$

의 유일한 해가 $x=1$이므로

$f(x)=(x-1)^2$이고,

방정식 $x^2+4x+a-1=0$이 해를 갖지 않아야 한다.

따라서 $\frac{D}{4}=5-a<0$

$\therefore\ a>5$

$g'(x)=2(x-1)(x^2+4x+a)+(x-1)^2(2x+4)$에서

$g'(2)=2(12+a)+8=2a+32$

$a$는 6이상의 자연수이므로

$g'(2)$의 최댓값은 $a=6$일 때, 44이다.

## 38-7. 100

$\angle\mathrm{BHE}=\frac{\pi}{2}$이므로 선분 BE는 삼각형 DBH의 외접원의 지름이다.

따라서 $\angle\mathrm{BDE}=\frac{\pi}{2}$이고

삼각형 BDE와 삼각형 BHE는 합동이다.

$\angle \mathrm{DBE} = \angle \mathrm{HBE} = \dfrac{\frac{\pi}{2}-\theta}{2} = \dfrac{\pi}{4} - \dfrac{\theta}{2}$

삼각형 DBH의 외접원의 중심을 O라 잡자.

$\angle \mathrm{DOE} = 2\angle \mathrm{DBE} = \dfrac{\pi}{2} - \theta$

삼각형 DOE에서 코사인법칙을 이용하면

$\overline{\mathrm{DE}} = \sqrt{8+8-2\times 2\sqrt{2}\times 2\sqrt{2}\cos\left(\dfrac{\pi}{2}-\theta\right)}$

$= \sqrt{16-16\sin\theta} \qquad \cdots ㉠$

삼각형 ADE에서 사인법칙을 이용하면

$\overline{\mathrm{DE}} = 2\sqrt{3}\sin\theta \qquad \cdots ㉡$

㉠과 ㉡에서 $\sqrt{16-16\sin\theta} = 2\sqrt{3}\sin\theta$

$3\sin^2\theta + 4\sin\theta - 4 = (3\sin\theta - 2)(\sin\theta + 2) = 0$

따라서 $\sin\theta = \dfrac{2}{3}$

$\cos^2\theta = 1 - \dfrac{4}{9} = \dfrac{5}{9}$

$\therefore\ 180\cos^2\theta = 100$

## 38-8. ②

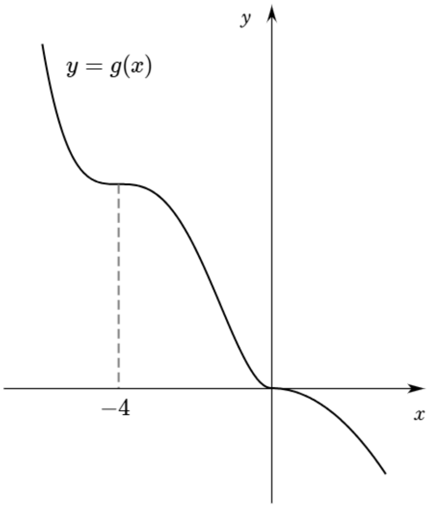
함수 $g(x)$가 $x=0$에서 미분가능하므로

$g(0) = f(-4) = 0$

$g'(0) = f'(-4) = 0$

따라서 $f(x) = -(x+4)^2$

$$g(x) = \begin{cases} -x^2 & (x>0) \\ \displaystyle\int_0^x t(t+4)^2 dt & (x \le 0) \end{cases}$$




$|g(x)-g(a)|$가 실수 전체의 집합에서 미분가능하려면

$g'(a) = 0$이어야 하므로

$a_1 = -4,\ a_2 = 0$ 이다.

$\displaystyle\int_{a_1}^{a_2} |g'(x)|dx = \int_{-4}^{0} -g'(x)dx$

$(-4 \le x \le 0$에서 $g'(x) \le 0$이므로$)$

$$= g(-4) - g(0)$$
$$= \int_0^{-4} t(t+4)^2 dt - 0$$
$$= \frac{64}{3}$$

## 확률과 통계

### 38-9. ③

확률의 성질에 의하여

$a + b + \frac{1}{4} = 1$ … ㉠

$E(\overline{X}) = E(X) = 2$에서

$a + 2b + \frac{3}{4} = 2$ … ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$a = \frac{1}{4}$, $b = \frac{1}{2}$

$\overline{X} = \frac{3}{2}$ 이려면 4번 추출하여 나온 수의 합이 6이어야 하므로

1이 2번, 2가 2번 나오거나 1이 3번, 3이 1번 나와야 한다.

ⅰ) 1이 2번, 2가 2번 나오는 경우

$$\frac{4!}{2!2!}\left(\frac{1}{4}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{3}{32}$$

ⅱ) 1이 3번, 3이 1번 나오는 경우

$$\frac{4!}{3!}\left(\frac{1}{4}\right)^3\left(\frac{1}{4}\right)^1 = \frac{1}{64}$$

ⅰ), ⅱ)에 의하여 구하는 확률은

$$\frac{3}{32} + \frac{1}{64} = \frac{7}{64}$$

### 38-10. ④

$$\sum_{k=1}^{n}(x+1)^k = (x+1) + (x+1)^2 + (x+1)^3 + \cdots + (x+1)^n$$
$$= \frac{(x+1)\{(x+1)^n - 1\}}{(x+1)-1}$$
$$= \frac{(x+1)^{n+1}}{x} - 1 - \frac{1}{x}$$

이때 $\sum_{k=1}^{n}(x+1)^k$의 전개식에서 $x^3$의 계수는 $a_n$은

$(x+1)^{n+1}$의 전개식에서 $x^4$의 계수와 같으므로

$a_n = {}_{n+1}C_4$

파스칼의 삼각형을 이용하면

$$\sum_{n=3}^{10} a_n = {}_4C_4 + {}_5C_4 + {}_6C_4 + {}_7C_4 + {}_8C_4 + {}_9C_4 + {}_{10}C_4 + {}_{11}C_4$$
$$= {}_{12}C_5 = \frac{12 \times 11 \times 10 \times 9 \times 8}{5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1} = 792$$

## 38-11. ④

$a^2+b^2=c^2$를 만족시키는 순서쌍 $(a,\ b,\ c)$는
$(3,\ 4,\ 5),\ (4,\ 3,\ 5)$
$(0,\ -1,\ 1),\ (-1,\ 0,\ 1),\ (0,\ 1,\ -1),\ (1,\ 0,\ -1)$
$(0,\ -2,\ 2),\ (-2,\ 0,\ 2),\ (0,\ 2,\ -2),\ (2,\ 0,\ -2)$
과 같이 있으므로 구하는 확률은
$$\frac{1}{2}\times\frac{2}{{}_5\mathrm{P}_3}+\frac{1}{2}\times\frac{8}{{}_5\mathrm{P}_3}=\frac{1}{12}$$

## 38-12. 328

조건 (나)를 만족시키는 경우의 수는
$5\times5\times5\times3=375$가지이다.
여기에 1이 이웃하는 경우의 수를 뺀다.
i) 1이 2개인 경우
○○11, ○11○, 11○○
$4\times4+4\times2+4\times2=32$가지
ii) 1이 3개인 경우
○111, 1○11, 11○1, 111○
$4+4+4+2=14$가지
iii) 1이 4개인 경우
1111
1가지
$\therefore\ 375-(32+14+1)=328$

# 미적분

## 38-9. ②

수열 $\{a_n\}$이 수렴하는데 수열 $\left\{\dfrac{a_n+2}{3a_n-1}\right\}$이 발산하므로
$$\lim_{n\to\infty}(3a_n-1)=0$$
$$\therefore\ \lim_{n\to\infty}a_n=\frac{1}{3}$$
$$\alpha=\lim_{n\to\infty}(a_n+1)=\frac{4}{3}$$
$$\therefore\ \lim_{n\to\infty}\frac{2\alpha^{n+1}+3}{\alpha^n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{2\left(\frac{4}{3}\right)^{n+1}+3}{\left(\frac{4}{3}\right)^n+1}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{2\times\frac{4}{3}+3\times\left(\frac{3}{4}\right)^n}{1+\left(\frac{3}{4}\right)^n}=\frac{8}{3}$$

## 38-10. 5

두 곡선 $y=\ln x$, $y=\ln(2n-x)$의 교점의 $x$좌표는 $n$이고
교점에서 두 곡선에 그은 접선의 기울기는 각각 $\dfrac{1}{n}$, $-\dfrac{1}{n}$이다.

교점에서 곡선 $y=\ln x$에 그은 접선과 $x$축이 이루는 예각의 크기를 $\alpha$라 하면 $\alpha < \frac{\pi}{4}$이므로

$\theta = 2\alpha < \frac{\pi}{2}$이다.

따라서 $\tan\theta = \tan 2\alpha = \frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha} = \frac{5}{12}$

$5\tan^2\alpha + 24\tan\alpha - 5 = (5\tan\alpha - 1)(\tan\alpha + 5) = 0$

$\tan\alpha = \frac{1}{5}$ ($\because$ $\tan\alpha > 0$)

이때 $\tan\alpha = \frac{1}{n}$이므로 $n=5$

## 38-11. ②

$f'(x) = a + \frac{2x}{x^2+b}$

조건 (나)에서 $f'(0) = a = 8$

$\therefore$ $f'(x) = 8 + \frac{2x}{x^2+b} = \frac{8x^2+2x+8b}{x^2+b}$

이때 함수 $f(x)$가 역함수를 가지려면 $f(x)$가 증가함수 또는 감소함수이어야 하는데

$f'(0) > 0$이므로 항상 $f'(x) \geq 0$이어야 한다.

이때 분모에서 $x^2+b > 0$이므로 분자에서

$8x^2+2x+8b \geq 0$이 항상 성립하면 된다.

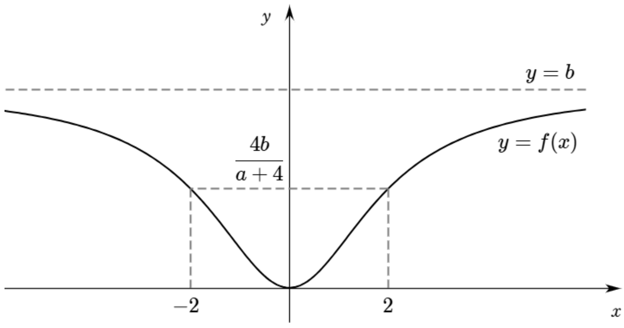
따라서 이차방정식 $8x^2+2x+8b=0$의 판별식을 $D$라 하면

$\frac{D}{4} = 1 - 64b \leq 0$

$\therefore$ $b \geq \frac{1}{64}$

따라서 $ab$의 최솟값은 $8 \times \frac{1}{64} = \frac{1}{8}$

## 38-12. ③




$f(0)=0$, $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} f(x) = b \leq 14$

$f'(x) = \frac{2abx}{(x^2+a)^2}$이므로

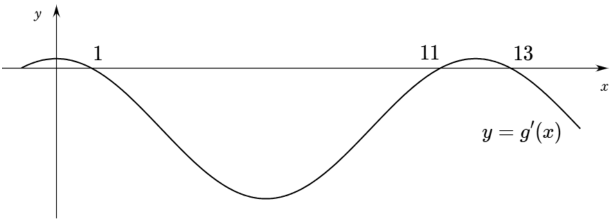
$x<0$일 때 $f'(x) < 0$, $x>0$일 때 $f'(x) > 0$이다.

따라서 실수 $x$가 집합 $A$의 원소가 되려면

$x<0$이면 $g'(f(x)) \leq 0$, $x>0$이면 $g'(f(x)) \geq 0$이어야

한다.

$g'(x)=\frac{\pi}{6}\left(\cos\frac{\pi}{6}x-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$




조건 (가)에서 $g'(f(x))\geq 0$을 만족시키는 자연수 $x$가 무수히 많으므로

$11<\lim_{x\to\infty}f(x)=b\leq 13$

$b$가 짝수이므로 $b=12$

조건 (나)에서 $g'(f(-2))\leq 0,\ g'(f(2))\geq 0$

그런데 $f(-2)=f(2)=\frac{48}{a+4}$이므로

$g'\left(\frac{48}{a+4}\right)=0$

따라서 $\frac{48}{a+4}$이 1 또는 11인데 $a$가 자연수이므로

$\frac{48}{a+4}=1,\ a=44$

$\therefore\ a+b=56$

# Day. 39

## 수학1, 수학2

### 39-1. ①

조건 (나)에서 $a_{n+1}-a_n=2\ (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$이므로 수열 $\{a_n\}$은 공차가 2인 등차수열이다.

조건 (가)에서 $3(a_1+2)=a_1+4\times 2$이므로 $a_1=1$

따라서 $a_n=1+(n-1)\times 2=2n-1$이므로

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{10}\frac{2}{a_na_{n+1}}&=\sum_{n=1}^{10}\frac{2}{(2n-1)(2n+1)}\\&=\sum_{n=1}^{10}\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)\\&=\left(1-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{7}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{19}-\frac{1}{21}\right)\\&=\frac{20}{21}\end{aligned}$$

### 39-2. 72

$f(k)\neq 0$인 실수 $k$에 대해서는 $g(k)=\frac{f(k)}{f(k)}=1$이다.

$f(0)=0$이므로 함수 $f(x)=xQ(x)$라 놓으면

$$g(0)=\lim_{a\to 0+}\frac{(0+a)Q(0+a)}{(0-a)Q(0-a)}=\lim_{a\to 0+}\left(-\frac{Q(a)}{Q(-a)}\right)$$

이때 $Q(0)\neq 0$이면 $g(0)=-1$이므로 $g(x)$가 $x=0$에서 불연속이 되기 때문에 $Q(0)=0$이다.

따라서 $f(x)=x^2(x-p)$ ($p$는 상수)

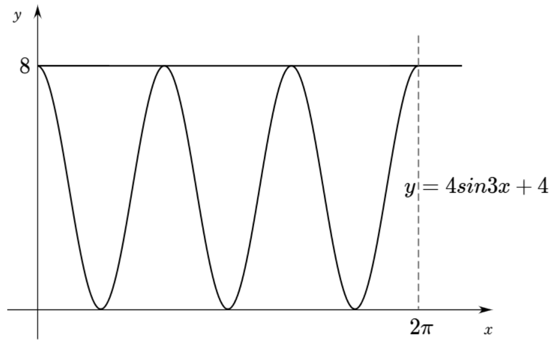
이때 $g(4)=\lim_{a\to 0+}\frac{(4+a)^2(4-p+a)}{(4-a)^2(4-p-a)}\neq 1$이어야 하므로

$p=4$이다.

따라서 $f(x)=x^2(x-4)$

$f(6)=72$

## 39-3. 11




$a=4,\ b=3,\ c=4$

$\therefore\ a+b+c=11$

## 39-4. ④

닫힌구간 $[0,\ 1]$에서 $f'(x)=3x^2$이고

함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 미분가능하므로

$f'(0)=0,\ f'(1)=3$

조건 (나)에 의해

닫힌구간 $[-2,\ 0]$에서 $f'(x)=0$,

닫힌구간 $[1,\ 2]$에서 $f'(x)=3$

함수 $f(x)$가 $x=0$과 $x=1$에서 연속이므로

닫힌구간 $[-2,\ 0]$에서 $f(x)=1$,

닫힌구간 $[1,\ 2]$에서 $f(x)=3x+2$

$$\int_{-2}^{2}f(x)dx=\int_{-2}^{0}1dx+\int_{0}^{1}(x^3+1)dx+\int_{1}^{2}(3x+2)dx$$

$$=2+\frac{5}{4}+\frac{7}{2}=\frac{27}{4}$$

## 39-5. 254

점 Q의 좌표는 $\left(\frac{k+1}{2},\ \frac{\log_4 k}{2}\right)$

점 R의 좌표는 $\left(\frac{k+1}{2},\ \log_4\frac{k+1}{2}\right)$

$\overline{\mathrm{QR}}=\log_4\frac{k+1}{2}-\frac{\log_4 k}{2}$

$$=\log_4\frac{k+1}{2}-\log_4\sqrt{k}$$

$$=\log_4\frac{\sqrt{k}+\frac{1}{\sqrt{k}}}{2}$$

$$=\frac{3}{2}$$

$$\sqrt{k}+\frac{1}{\sqrt{k}}=16$$

이 식의 양변을 제곱하면

$$k+\frac{1}{k}+2=256$$

$$\therefore\ k+\frac{1}{k}=254$$

## 39-6. ③

구간 $(-2,\ \infty)$에서 $xf'(x)\geq 0$이어야 하므로

구간 $(-2,\ 0)$에서 $f'(x)\leq 0$이고,

구간 $(0,\ \infty)$에서 $f'(x)\geq 0$이어야 한다.

$f'(x)$가 최고차항의 계수가 3인 이차함수이므로

$f'(x)=3x(x-k)$ (단, $k\leq -2$)

따라서 곡선 $y=f'(x)$와 $x$축으로 둘러싸인 부분의 넓이는

$k=-2$일 때 최솟값 $\frac{3}{6}\times 2^3=4$를 가진다.

## 39-7. ③

$\angle\mathrm{CAB}=\angle\mathrm{CAD}=\theta$, $\overline{\mathrm{AB}}=x$, $\overline{\mathrm{AC}}=y$라 하자.

삼각형 ABC에서 코사인법칙을 이용하면

$$\frac{6}{\sin\theta}=10$$

$$\sin\theta=\frac{3}{5},\ \cos\theta=\frac{4}{5}$$

삼각형 ABC에서 코사인법칙을 이용하면

$$6^2=x^2+y^2-2xy\cos\theta$$

$$x^2-\left(\frac{8}{5}y\right)x+y^2-36=0\quad\cdots\ ㉠$$

㉠을 $x$에 대한 방정식으로 보면 두 근이 $\overline{\mathrm{AB}}$, $\overline{\mathrm{AD}}$가 된다.

근과 계수의 관계를 이용하면 $\frac{8}{5}y=12,\ y=\frac{15}{2}$

$y$의 값을 ㉠에 대입하면 $4x^2-48x+81=0$이고

$\overline{\mathrm{AD}}-\overline{\mathrm{AB}}$는 두 근의 차이므로

$$\sqrt{12^2-4\times\frac{81}{4}}=3\sqrt{7}$$

## 39-8. 108

$\overline{\mathrm{OA}}=3\times\overline{\mathrm{OD}}$이므로

점 A D, B, C의 좌표는 각각

$$\mathrm{A}(1,\ 0),\ \mathrm{D}\left(\frac{1}{3},\ 0\right),\ \mathrm{B}\left(\frac{1}{3},\ \sqrt{3}k\right),\ \mathrm{C}\left(-\frac{1}{3},\ -\sqrt{3}k\right)$$

따라서 삼각형 ABC의 넓이는

$\sqrt{3}k=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$  $\therefore\ k=\dfrac{1}{3}$

$B\left(\dfrac{1}{3}, \dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)$, $C\left(-\dfrac{1}{3}, -\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)$

또한 삼각형 ABC의 넓이는 아래와 같이 표현할 수 있다.

$\dfrac{1}{2}\times\overline{AB}\times\overline{AC}\times\sin(\angle BAC)=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

$\dfrac{1}{2}\times\dfrac{\sqrt{7}}{3}\times\dfrac{\sqrt{19}}{3}\times\sin(\angle BAC)=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

$\therefore\ \sin^2(\angle BAC)=\dfrac{108}{133}$

## 확률과 통계

### 39-9. ③

천의 자리 숫자를 $a$, 백의 자리 숫자를 $b$, 십의 자리 숫자를 $c$, 일의 자리 숫자를 $d$라 하면

$a+b+c+d=9$

$(1\le a\le 4,\ 1\le b\le 4,\ 1\le c\le 4,\ 1\le d\le 4)$

${}_4H_5-4\times{}_4H_1=40$

($\because$ $a$, $b$, $c$, $d$ 중 하나가 5 이상 되는 경우를 각각 제외함.)

### 39-10. 30

i ) 십의 자리의 수가 1 또는 3 또는 5인 경우

숫자 2와 4를 나열할 자리를 정하는 방법은 ${}_4C_2$이고, 나머지 세 자리에 1 또는 3 또는 5를 나열하는 경우의 수는 $3^3$이므로 자연수의 개수는 각각 ${}_4C_2\times 3^3=162$이다.

ii) 십의 자리의 수가 4인 경우

조건 (나)를 만족하려면 일의 자리의 수는 2이고, 나머지 세 자리에 1 또는 3 또는 5를 나열하는 경우의 수는 $3^3$이므로 자연수의 개수는 $3^3=27$이다.

iii) 십의 자리의 수가 2인 경우

조건 (나)를 만족하려면 숫자 4의 자리를 정하는 방법의 수는 3이고, 나머지 세 자리에 1 또는 3 또는 5를 나열하는 경우의 수는 $3^3$이므로 자연수의 개수는 $3\times 3^3=81$이다.

따라서 조건을 만족하는 자연수의 개수는

$162+27+81=270$이고,

확률변수 $X$의 확률분포표는 다음과 같다.

| $X$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 계 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $P(X=x)$ | $\dfrac{1}{5}$ | $\dfrac{3}{10}$ | $\dfrac{1}{5}$ | $\dfrac{1}{10}$ | $\dfrac{1}{5}$ | 1 |

따라서 확률변수 $X$의 평균 $E(X)$는

$E(X)=\dfrac{1}{10}(2+6+6+4+10)=\dfrac{14}{5}$

$\therefore\ E(10X+2)=10\times E(X)+2=30$

## 39-11. 37

i ) 동전 1개를 4번 뒤집는 경우

$$4\times\left(\frac{1}{4}\right)^4=\frac{1}{64}$$

ii) 동전 2개를 각각 2번 뒤집는 경우

$${}_4C_2\times\frac{4!}{2!\times 2!}\times\left(\frac{1}{4}\right)^4=\frac{9}{64}$$

따라서 구하는 확률은 $\frac{1}{64}+\frac{9}{64}=\frac{5}{32}$

$\therefore\ p+q=37$

## 39-12. 324

$a=16-x_4,\ b=x_4-x_3,\ c=x_3-x_2,\ d=x_2-x_1,$

$e=x_1-1$

로 놓으면 구하는 경우의 수는

음이 아닌 정수 $a,\ b,\ c,\ d,\ e$에 대하여

$a+b+c+d+e=15,\ b+d=8$

즉, $a+c+e=7,\ b+d=8$

을 만족시키는 모든 순서쌍 $(a,\ b,\ c,\ d,\ e)$의 개수와 같다.

따라서 구하는 경우의 수는

${}_3H_7\times{}_2H_8={}_9C_7\times{}_9C_8=324$

# 미적분

## 39-9. ③

$$f'(x)=\frac{-(\ln x)^2+\ln x}{x^2}$$

$a=1,\ \ b=e$

$$\int_1^e\frac{(\ln x)^2+\ln x+1}{x}dx$$

$$=\left[\frac{1}{3}(\ln x)^3+\frac{1}{2}(\ln x)^2+\ln x\right]_1^e=\frac{11}{6}$$

## 39-10. 170

$a_n=a_1+d(n-1)$이라 놓으면

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\frac{a_n}{n(n+1)}-\frac{a_{n+1}}{(n+1)(n+2)}\right\}$$

$$=\left(\frac{a_1}{1\times 2}-\frac{a_2}{2\times 3}\right)+\left(\frac{a_2}{2\times 3}-\frac{a_3}{3\times 4}\right)+\left(\frac{a_3}{3\times 4}-\frac{a_4}{4\times 5}\right)+\cdots$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{a_1}{2}-\frac{a_n}{n(n+1)}\right)$$

$$=\frac{a_1}{2}\quad\left(\because\ \lim_{n\to\infty}\frac{a_1+d(n-1)}{n(n-1)}=0\right)$$

$=4$

$\therefore\ a_1=8$

$S_n=\frac{n\{16+d(n-1)\}}{2}$

$\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\frac{S_n}{n(n+1)}-\frac{S_{n+1}}{(n+1)(n+2)}\right\}$

$=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{S_1}{1\times2}-\frac{S_n}{n(n+1)}\right)$

$=\frac{a_1}{2}-\frac{d}{2}\quad\left(\because\ \lim_{n\to\infty}\frac{n\{16+d(n-1)\}}{2n(n+1)}=\frac{d}{2}\right)$

$=4-\frac{d}{2}=3$

$\therefore\ d=2$

따라서 $a_n=2n+6$

$S_{10}=2\times\frac{10\times11}{2}+6\times10=170$

## 39-11. ①

$S_1=\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}-(\frac{\pi}{16}-\frac{1}{8})=\frac{3}{16}\pi-\frac{3}{8}$

선분 OA를 지름으로 하는 반원의 중심을 O′,

$\overline{\mathrm{DE}}=\overline{\mathrm{GD}}=\overline{\mathrm{AE}}=x$라 하자

$\overline{\mathrm{O'D}}=\overline{\mathrm{DE}}-\overline{\mathrm{O'E}}=\overline{\mathrm{DE}}-(\overline{\mathrm{O'A}}-\overline{\mathrm{AE}})$

$=x-\left(\frac{1}{2}-x\right)=2x-\frac{1}{2}$

삼각형 O′GD에서 피타고라스 정리를 이용하면

$\left(2x-\frac{1}{2}\right)^2+x^2=\left(\frac{1}{2}\right)^2$

$\therefore\ x=\frac{2}{5}$

따라서 등비수열 $\{S_n\}$의 공비는 $\left(\frac{2}{5}\right)^2=\frac{4}{25}$

$\lim_{n\to\infty}S_n=\frac{\frac{3}{16}\pi-\frac{3}{8}}{1-\frac{4}{25}}=\frac{25(\pi-2)}{112}$

## 39-12. ⑤

조건 (가)에 의해 $\frac{f(t)-1}{f(\ln t)}=\frac{1}{t^2}$

$f(t)-1=\frac{f(\ln t)}{t^2}\qquad\cdots$ ㉠

㉠에 $t=1$을 대입하면

$f(1)-1=f(0)=e-1\qquad\cdots$ ㉡

$\int_0^1 e^{-x}f'(x)dx$

$=[e^{-x}f(x)]_0^1+\int_0^1 e^{-x}f(x)dx$

$=2-e+\int_0^1 e^{-x}f(x)dx\qquad(\because$ ㉡$)$

$=2-e+\int_1^e\frac{f(\ln t)}{t^2}dt\qquad(x=\ln t$로 치환$)$

$$=2-e+\int_1^e \{f(t)-1\}dt \quad (\because ㉠)$$
$$=2-e+\int_1^e f(t)t-\int_1^e 1dt$$
$$=2-e+1-(e-1)=4-2e$$

## Day. 40

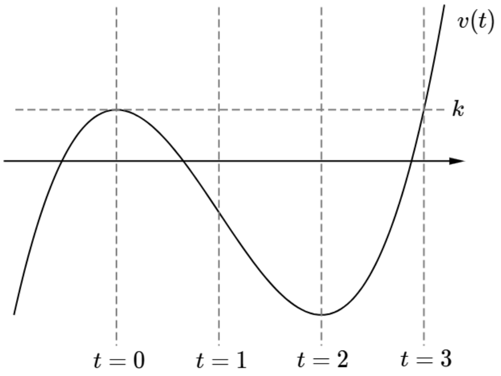
### 수학1, 수학2

**40-1.** ②

점 P에서의 속도 $v(t)$는

$v(t)=4t^3-12t^2+k$

이고 $v(t)$의 그래프는 아래와 같다.




구간 $(1,\ 3)$에서 $v(t)$의 부호가 한 번만 바뀌려면

$v(1)\le 0,\ v(3)>0$이어야 한다.

$v(1)=k-8\le 0,\ v(3)=k>0$

$0<k\le 8$

따라서 모든 정수 $k$의 개수는 8

**40-2.** ⑤

직선 AB의 기울기는

$$\frac{3^{\frac{7}{6}}k-3^{\frac{1}{6}}k}{3^{\frac{7}{3}}-3^{\frac{1}{3}}}=\frac{3^{\frac{1}{6}}(3-1)k}{3^{\frac{1}{3}}(3^2-1)}=\frac{3^{-\frac{1}{6}}}{4}k=\frac{1}{12}$$

$$\therefore\ k=\frac{4}{12}\times 3^{\frac{1}{6}}=3^{-\frac{5}{6}}$$

**40-3.** ③

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x^2}=k$에서 $f(x)$는 $x^2$을 인수로 가져야 하므로

$f(x)=x^2(x^2+ax+b)$로 둘 수 있고

$k=\lim\limits_{x\to 0}(x^2+ax+b)=b$이다.

$$\lim_{x\to1}\frac{x^2-10x+9}{f(x)-x^2}=\frac{(x-1)(x-9)}{x^2(x^2+ax+b-1)}=b \quad \cdots ㉠$$

㉠에서 $\lim_{x\to1}(x^2+ax+b-1)=0$이어야 하므로

$b=-a$이고 이를 ㉠에 대입하면

$$\lim_{x\to1}\frac{(x-1)(x-9)}{x^2(x+a+1)(x-1)}=\lim_{x\to1}\frac{x-9}{x^2(x+a+1)}$$

$$=\frac{-8}{2+a}=\frac{-8}{2-b}=b$$

$b^2-2b-8=(b+2)(b-4)=0$

$b$가 자연수이므로 $b=4$, $a=-4$

$\therefore\ f(x)=x^4-4x^3+4x^2$

$f(2)=0$

## 40-4. ④

$$\int_0^2 f(x)dx=\int_0^2(-x^2+2x)dx=\frac{4}{3}$$

$$\int_2^4 f(x)dx=2\int_0^2 f(x)dx=2\times\frac{4}{3}$$

$$\int_4^6 f(x)dx=2\int_2^4 f(x)dx=2^2\times\frac{4}{3}$$

$$\vdots$$

$$\int_{2n-2}^{2n} f(x)dx=2^{n-1}\times\frac{4}{3}$$

$$\therefore\ \int_0^{12} f(x)dx=\sum_{n=1}^{6}2^{n-1}\times\frac{4}{3}=\frac{2^6-1}{2-1}\times\frac{4}{3}=84$$

## 40-5. ③

$\mathrm{A}(k,\ -\log_2(1-k))$에서 $\mathrm{C}\left(\frac{1}{1-k},\ \log_2\left(\frac{1}{1-k}\right)\right)$이고

$\overline{\mathrm{AC}}=\frac{1}{1-k}-k$이다.

$\mathrm{B}(k,\ \log_2 k)$에서 $\mathrm{D}\left(1-\frac{1}{k},\ \log_{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{k}\right)\right)$이고

$\overline{\mathrm{DB}}=k-1+\frac{1}{k}$이다.

이때 $\overline{\mathrm{BC}}$의 기울기는 $m$, $\overline{\mathrm{AD}}$의 기울기는 $3m$이므로

$\overline{\mathrm{AC}}=3\times\overline{\mathrm{DB}}$이다.

$$\frac{1}{1-k}-k=3\left(k-1+\frac{1}{k}\right)\quad\therefore\ k=\frac{3}{4}$$

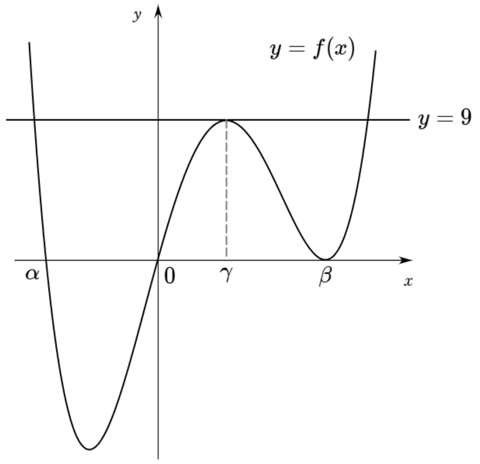
즉 $\mathrm{B}\left(\frac{3}{4},\ \log_2 3-2\right)$, $\mathrm{C}(4,\ 2)$이므로

$$m=\frac{2-(\log_2 3-2)}{4-\frac{3}{4}}=\frac{4}{13}(4-\log_2 3)$$

$$\therefore\ k\times m=\frac{12}{13}-\frac{3}{13}\log_2 3$$

**40-6.** 18

조건 (가), (나)를 만족시키면서 $f'(\alpha) < 0$이려면
함수 $f(x)$ 그래프는 아래 그림과 같아야 한다.




함수 $f(x)$가 극댓값을 갖게 하는 $x$값을 $\gamma$라 하면

$\int_0^\beta g(x)dx$

$= \int_0^\beta |f'(x)|dx - \int_0^\beta f'(x)dx$

$= \int_0^\gamma f'(x)dx + \int_\gamma^\beta -f'(x)dx - \int_0^\beta f'(x)dx$

$= \{f(\gamma) - f(0)\} + \{f(\gamma) - f(\beta)\} - \{f(\beta) - f(0)\}$

$= 9 + 9 - 0 = 18$

**40-7.** 19

$\angle A = \pi - \angle C$이므로

$\sin A = \sin C$, $\cos A = -\cos C$

그런데 조건 (다)에서 $\dfrac{\cos C}{\sin A} = \dfrac{\overline{AD}}{\overline{CD}} > 0$이므로

$0 < \angle C < \dfrac{\pi}{2}$, $\dfrac{\pi}{2} < \angle A < \pi$

한편, 조건 (나)에서 삼각형 ABD에 사인법칙을 이용하면

$\dfrac{8}{\sin A} = 10$, $\sin A = \dfrac{4}{5}$

따라서 $\cos A = -\dfrac{3}{5}$, $\sin C = \dfrac{4}{5}$, $\cos C = \dfrac{3}{5}$

$\dfrac{\cos C}{\sin A} = \dfrac{\overline{AD}}{\overline{CD}} = \dfrac{3}{4}$에서 $\overline{AD} = \dfrac{3}{4}\overline{CD}$

이때, $\overline{AC}$가 원의 지름이기 때문에 $\angle ADC = \dfrac{\pi}{2}$이므로

$\overline{AD}^2 + \overline{CD}^2 = \dfrac{25}{16} \times \overline{CD}^2 = 100$

따라서 $\overline{CD} = 8$, $\overline{AD} = 6$

$\overline{AB} = x$라 할 때, 삼각형 ABD에서 코사인법칙을 이용하면

$\dfrac{x^2 + 36 - 64}{12x} = -\dfrac{3}{5}$

$5x^2 + 36x - 140 = (x + 10)(5x - 14) = 0$

$x>0$이므로 $x=\frac{14}{5}$

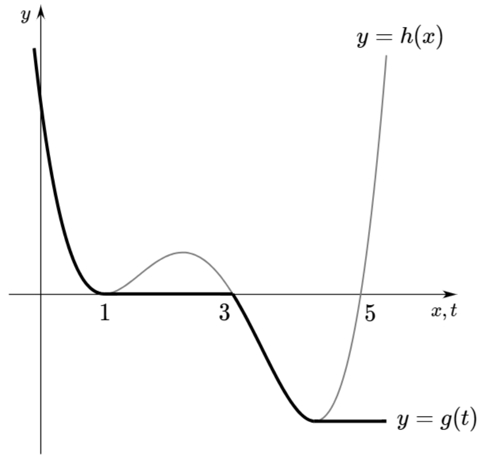
$\therefore\ p+q=19$

## 40-8. ③

$f(x)$의 한 부정적분을 $F(x)$, $h(x)=F(x)-F(1)$이라 하면,
함수 $h(x)$는 최고차항의 계수가 $1$, $h(1)=0$인 사차함수이고,
함수 $g(t)$는 $x\le t$에서 $h(x)$의 최솟값이라 할 수 있다..

조건 (나)에서 $\int_0^5 f(x)dx=F(5)-F(1)=h(5)=0$

따라서 조건 (가), (나), (다)를 만족시키는 $h(x)$의 그래프는 아래 그림과 같다.




$h(x)=(x-1)^2(x-3)(x-5)$
$f(x)=F'(x)=h'(x)$
$=2(x-1)(x-3)(x-5)+(x-1)^2(x-5)+(x-1)^2(x-3)$
$\therefore\ f(5)=32$

# 확률과 통계

## 40-9. ①

i ) $f(1)=1,\ f(3)=4$인 경우
$f(2)$ : ${}_4C_1=4$
$f(4),\ f(5)$ : ${}_2H_2=3$
$\therefore\ 4\times3=12$

ii) $f(2)=2,\ f(3)=3$인 경우
$f(2)$ : ${}_2C_1=2$
$f(4),\ f(5)$ : ${}_3H_2=6$
$\therefore\ 2\times6=12$

따라서 구하는 경우의 수는 $12+12=24$

## 40-10. ①

흰색 카드의 개수가 2 또는 3인 경우의 수는
${}_6C_2\times{}_6C_1+{}_6C_3=15\times6+20=110$
카드에 적힌 세 수의 합이 8이 되는 숫자의 조합은

$(1,\ 1,\ 6)$, $(2,\ 2,\ 4)$, $(2,\ 3,\ 3)$,
$(1,\ 2,\ 5)$, $(1,\ 3,\ 4)$
이중 앞의 세 조합은 중복되는 숫자 중 하나는 반드시 검은색 카드의 숫자여야 하므로
총 $1\times3=3$가지
뒤의 두 조합은 모두 흰색 카드의 숫자일 수도 있고 셋 중 하나가 검은색 카드의 숫자일 수 있으므로
총 $(1+{}_3C_1)\times2=8$가지
따라서 구하는 확률은 $\dfrac{3+8}{110}=\dfrac{11}{110}=\dfrac{1}{10}$

## 40-11. ②

[1단계] 미국 대표 앉히기
우선 미국 대표 2 명이 서로 마주보도록 아무 자리에 앉히면 이후부터 탁자가 회전하는 경우를 고려하지 않아도 된다.
[2단계] 한국 대표 앉히기
우선 서로 마주보도록 의자 2 개를 고르는 경우의 수 : 3
선택한 의자에 대표 2 명이 앉는 경우의 수 : 2
$\therefore\ 3\times2=6$
[3단계] 일본, 중국 대표 앉히기
4명이 무작위로 앉는 경우의 수 : $4!=24$
이때 같은 나라 대표끼리 마주보는 경우의 수 : $2\times2\times2=8$
$\therefore\ 24-8=16$
따라서 구하는 경우의 수는 $6\times16=96$

## 40-12. 12

크기가 100인 표본에서 얻은 표본평균을 $m_1$이라 하면
신뢰구간 $l_1$은
$$m_1-2\times\frac{20}{\sqrt{100}}\le m\le m_1+2\times\frac{20}{\sqrt{100}}$$
$m_1-4\le m\le m_1+4$
$\therefore\ a=m_1-4,\ b=m_1+4$
크기가 400인 표본에서 얻은 표본평균을 $m_2$이라 하면
신뢰구간 $l_2$은
$$m_2-2\times\frac{20}{\sqrt{400}}\le m\le m_2+2\times\frac{20}{\sqrt{400}}$$
$m_2-2\le m\le m_2+2$
$\therefore\ c=m_2-2,\ d=m_2+2$
$l_1$과 $l_2$가 겹치는 구간이 존재하므로
$m_1+4\ge m_2-2$ 또는 $m_2+2\ge m_1-4$
$\therefore\ -6\le m_1-m_2\le 6$
이때 $|a+b-c-d|=|2m_1-2m_2|$이므로
$|a+b-c-d|$는 $m_1-m_2=\pm6$일 때
최댓값 12를 가진다.

## 미적분

**40-9.** ③

조건 (나)에 의해 $f(1)=3,\ f'(1)=4$

조건 (가)에 의해 $f(-1)=-3,\ f'(-1)=4$

$$\int_{-1}^{1}\{f''(x)-f(x)\}e^x\,dx$$

$$=\int_{-1}^{1}f''(x)e^x\,dx-\int_{-1}^{1}f(x)e^x\,dx$$

$$=\Big[f'(x)e^x\Big]_{-1}^{1}-\int_{-1}^{1}f'(x)e^x\,dx$$

$$-\left(\big[f(x)e^x\big]_{-1}^{1}-\int_{-1}^{1}f'(x)e^x\,dx\right)$$

$$=\Big[f'(x)e^x\Big]_{-1}^{1}-\Big[f(x)e^x\Big]_{-1}^{1}$$

$$=ef'(1)-\frac{f'(1)}{e}-ef(1)+\frac{f(-1)}{e}$$

$$=4e-\frac{4}{e}-3e-\frac{3}{e}=e-\frac{7}{e}$$

**40-10.** 21

$a_n=a_1+d(n-1)\ (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$이라 놓자.

$S_{n+2}-S_n=a_{n+2}+a_{n+1}$이므로 조건 (가)에서

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+2}+a_{n+1}}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{2a_1+d(2n+1)}{n}=2d=4$$

$\therefore\ d=2$

$a_n=a_1+2(n-1)$

조건 (나)에서

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a_na_{n+1}}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_{n+1}-a_n}{2a_na_{n+1}}$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2}\left(\frac{1}{a_n}-\frac{1}{a_{n+1}}\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\left(\frac{1}{a_1}-\frac{1}{a_{n+1}}\right)$$

$$=\frac{1}{2a_1}\quad\left(\because\ \lim_{n\to\infty}a_{n+1}=\infty\right)$$

$$=\frac{1}{6}$$

$\therefore\ a_1=3$

따라서 $a_n=2n+1$

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}(2k+1)=2\times\frac{n(n+1)}{2}+n=n^2+2n$$

자연수 $n$의 값이 증가할 때 $S_n$의 값은 증가하고,

$S_{21}=21^2+2\times21=483$

$S_{22}=22^2+2\times22=528$

이므로 $S_n<500$을 만족시키는 자연수 $n$의 최댓값은 21이다.

**40-11. ②**

$f'(x)=-m\tan x+2nx$에서 $y=m\tan x$와 $y=2nx$가 구간 $\left(0,\ \frac{\pi}{2}\right)$에서 접하지 않는 교점을 가져야 한다.

따라서 직선 $y=2nx$의 기울기가 곡선 $y=m\tan x$의 $x=0$에서의 기울기보다 커야 한다.

즉 $2n>m$을 만족시켜야 하고 이러한 $(m,\ n)$의 개수는

$1+3+5+7+9+10\times5=75$

**40-12. ⑤**

$y=g(x)$는 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(t,\ f(t))$에서의 접선이다.

함수 $h(x)$가 실수 전체의 집합에서 미분가능하려면

곡선 $y=g(x)$와 $y=f(x)$이 만나는 모든 점에서 각 곡선의 기울기가 같아야 한다.

$t<0$이면서 이를 만족시키는 점 $(t,\ f(t))$는 곡선 $y=f(x)$의 두 극점 사이에 있는 변곡점이 유일하다.

$f''(x)=e^x(x^2+4x+2)=0$

곡선 $y=f(x)$의 두 변곡점의 $x$좌표는 $x=-2\pm\sqrt{2}$인데

이중 $x=-2+\sqrt{2}$인 변곡점이 두 극점 사이에 있다.

따라서 $t=-2+\sqrt{2}$