

백일대장

수능 역전을 위한 백일 전략서

05

정답 및 해설

Day. 29

수학1, 수학2

29-1. 19

등차수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항을 a , 공차를 d 라 하자.

$$\text{조건 (가)에서 } a_3 = a + 2d = -5 \quad \dots \textcircled{㉠}$$

조건 (나)에서

$$|(a+d) + (a+4d) - 1| = a + 9d$$

$$|2a+5d-1| = a+9d$$

$$\text{i) } 2a+5d-1 \geq 0$$

$$2a+5d-1 = a+9d, a-4d=1 \quad \dots \textcircled{㉡}$$

$\textcircled{㉠}, \textcircled{㉡}$ 을 연립하여 계산하면 $a = -3, d = -1$ 이고,

이는 $2a+5d-1 \geq 0$ 에 모순이다.

$$\text{ii) } 2a+5d-1 < 0$$

$$-(2a+5d-1) = a+9d, 3a+14d=1 \quad \dots \textcircled{㉢}$$

$\textcircled{㉠}, \textcircled{㉢}$ 을 연립하여 계산하면 $a = -9, d = 2$ 이고,

이는 $2a+5d-1 < 0$ 을 만족시킨다.

$$\text{따라서 } a_n = 2(n-1) - 9 = 2n - 11,$$

$$a_{15} = 30 - 11 = 19 \text{ 이다.}$$

<손풀이>

$$\textcircled{㉠} |2a_3 + d - 1| = a_3 + 9d$$

$$|d - 11| = 9d - 5$$

$$\textcircled{㉠} d \geq 11 \rightarrow d = -1 \text{ (㉡)}$$

$$\textcircled{㉡} d < 11 \rightarrow d = 2$$

$$\therefore a_{15} = -5 + 24 = 19$$

29-2. ③

$$\lim_{x \rightarrow -1-} f(x) = 1, \lim_{x \rightarrow -1-} f(-x) = \lim_{x \rightarrow 1+} f(x) = -1$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow -1-} f(x) + \lim_{x \rightarrow -1-} f(-x) = 0$$

29-3. ④

$x \geq 0$ 인 모든 실수 x 에 대하여 $f(x) \geq g(x)$ 이므로

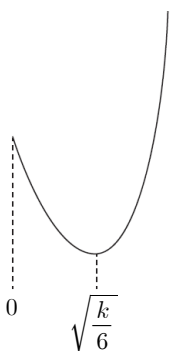
$$x^3 - kx \geq -x^3 - 4, 2x^3 - kx + 4 \geq 0 \text{ 이다.}$$

함수 $h(x) = 2x^3 - kx + 4$ 라 두면,

$$h'(x) = 6x^2 - k, h''(x) = 12x \text{ 이므로}$$

함수 $h(x)$ 는 $x = \sqrt{\frac{k}{6}}$ 에서 극소를, $x = 0$ 에서 변곡점을 가진다.

$x \geq 0$ 에서 함수 $h(x)$ 의 그래프의 개형은 다음과 같다.



따라서 $h\left(\sqrt{\frac{k}{6}}\right) = -\frac{2}{3}k \times \sqrt{\frac{k}{6}} + 4 \geq 0$ 이어야 한다.

$$\frac{2}{3}k \times \sqrt{\frac{k}{6}} \leq 4, \frac{4}{9}k^2 \times \frac{k}{6} \leq 16, k \leq 6$$

따라서 조건을 만족시키는 자연수 k 의 개수는 6 이다.

[다른 풀이]

함수 $f(x) = 2x^3 + 4$ 의 그래프 위의 한

점 $P(t, 2t^3 + 4)$ 에서의 접선의
방정식은

$$y - (2t^3 + 4) = 6t^2(x - t)$$

이고 이 접선이 원점을 지날 때

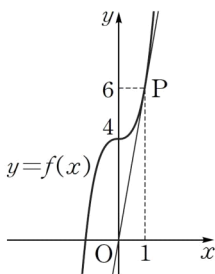
$$-2t^3 - 4 = -6t^3 \text{ 에서}$$

$$4t^3 = 4, t^3 = 1$$

$$\therefore t = 1$$

실수 k 의 값의 범위는 원점과 점 $P(1, 6)$ 을 잇는 직선의
기울기인 6 이하이다.

따라서 구하는 자연수 k 의 개수는 1, 2, 3, ..., 6 의 6 이다.



29-4. 3

$$\sin^2 x - \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + 2a - 4 = \sin^2 x - \sin x + 2a - 4 = 0$$

$\sin x = t$ 로 치환하면

$$t^2 - t + 2a - 4 = 0 \text{ 이고, 이 방정식의 두 실근을 } \alpha, \beta \text{ 라 하자.}$$

두 방정식 $\sin x = \alpha, \sin x = \beta$ 의 서로 다른 실근의 개수가
홀수여야 하므로 α, β 중 하나는 반드시 1 또는 -1 이어야 한다.

i) 실근이 1 인 경우

$$1^2 - 1 + 2a - 4 = 0, a = 2$$

ii) 실근이 -1 인 경우

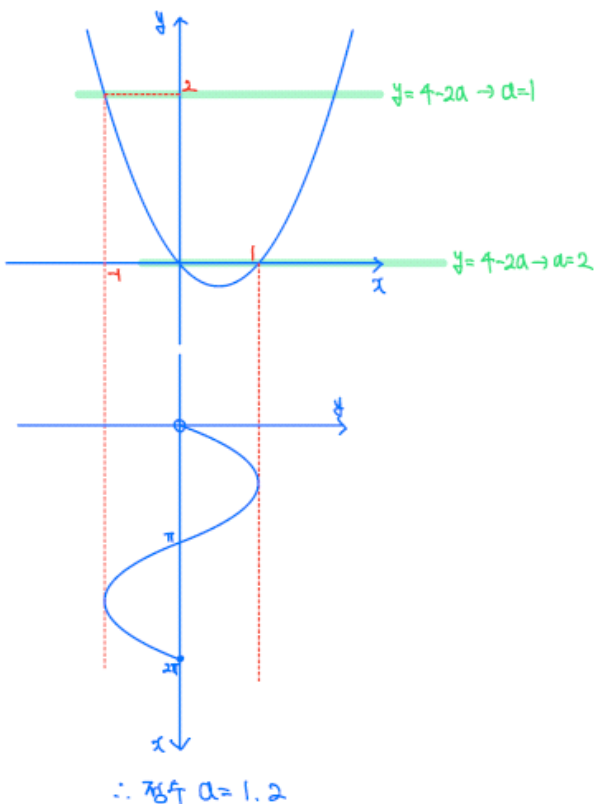
$$(-1)^2 - (-1) + 2a - 4 = 0, a = 1$$

따라서 모든 정수 a 의 합은 $1 + 2 = 3$ 이다.

<손풀이>

$$\sin^2 x - \sin x + 2a - 4 = 0$$

$$\sin^2 x - \sin x = 4 - 2a$$



29-5. ①

곡선 $y = f(x)$ 와 직선 $y = x + 1$ 이 점 $(1, 2)$ 에서 접하므로
 $f(x) - x - 1 = (x - 1)^2(x + k)$ 라 둘 수 있다.

$$f'(x) - 1 = 2(x - 1)(x + k) + (x - 1)^2 \text{ 이고,}$$

$$f'(x) - x = 3x^2 + (2k - 5)x - 2k + 2 = (x - 1)(3x + 2k - 2)$$

이다.

(나) 조건에 의해

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - x - 1}{(x - 1)\{f'(x) - x\}} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x - 1)^2(x + k)}{(x - 1)^2(3x + 2k - 2)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x + k}{3x + 2k - 2} = \frac{k + 1}{2k + 1} = \frac{3}{7} \text{ 이므로 } k = -4 \text{ 이다.}$$

$$\text{따라서 } f(x) = (x - 1)^2(x - 4) + x + 1$$

$$f(5) = 16 + 6 = 22 \text{ 이다.}$$

<손풀이>

$$(가) f(x) = (x-1)^2(x-a) + x+1$$

$$(나) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)^2(x-a)}{(x-1)\{f'(x)-x\}} = \frac{3}{7}$$

$$\Rightarrow f'(x) - x = 2(x-1)(x-a) + (x-1)^2 + 1 - x$$

$$= (x-1)(3x - 2a - 2)$$

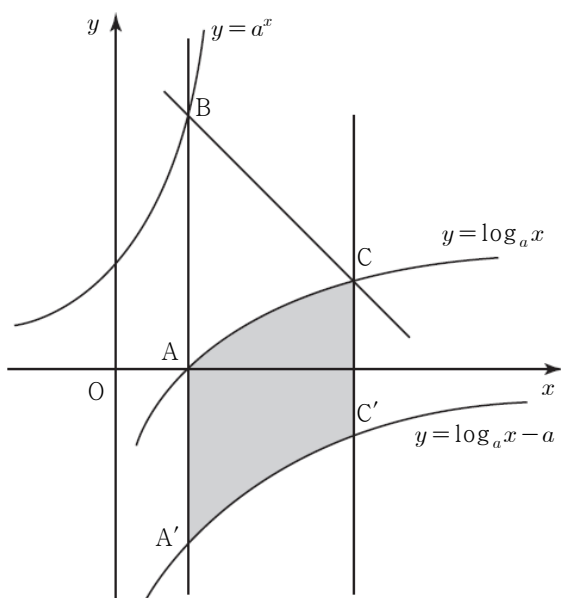
$$\therefore \frac{3}{\pi} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-a)}{3x-2a-2} = \frac{1-a}{1-2a} \Rightarrow a=4$$

$$f(5) = 16 + 6 = 22$$

29-6. ①

점 B와 점 C는 직선 $y=x$ 를 기준으로 대칭이고,
 $B(1, a)$ 이므로 $C(a, 1)$ 이다.

이때 곡선 $y = \log_a x - a$ 는 곡선 $y = \log_a x$ 를 y 축 방향으로 $-a$ 만큼 평행이동한 곡선이므로 색칠한 부분의 넓이는 사각형 $AA'C'C$ 의 넓이와 같다.



사각형의 넓이는 $a(a-1) = 6$ 이므로 $a=3$ 이다. ($a > 0$)

$A(1, 0)$, $C(3, 1)$ 이므로 $\overline{AC} = \sqrt{5}$ 이고, $\angle B = \frac{\pi}{4}$ 이므로

삼각형 ABC에서 사인법칙에 의해 $\frac{\sqrt{5}}{\sin \frac{\pi}{4}} = 2R$,

$$R = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}} \text{이다.}$$

따라서 삼각형 ABC의 넓이는 $\frac{5}{2}\pi$ 이다.

<손풀이>

$$A(1,0) \rightarrow B(1,a) \rightarrow C(a,1)$$

$$\therefore b = (a-1) \times a \rightarrow a=3$$

$$\therefore \overline{AC} = \sqrt{5}$$

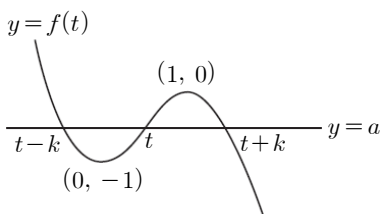
$$R_{\triangle ABC} = \frac{\sqrt{5}}{2 \sin \angle ABC} = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}} \quad (\because \angle ABC = \frac{\pi}{4})$$

29-7. ②

점 $(1, a)$ 에서 곡선 $y = x^3 - x$ 에 그은 세 접선의 접점의 x 좌표가 등차수열을 이루므로 세 점의 x 좌표를 각각 $t-k, t, t+k$ 라 두자.

곡선 $y = x^3 - x$ 위의 점 $(t, f(t))$ 에서의 접선의 방정식은 $y = (3t^2 - 1)x - 2t^3$ 이고, 이 접선이 점 $(1, a)$ 를 지나므로 $a = -2t^3 + 3t^2 - 1$ 을 만족시켜야 한다.

곡선 $y = x^3 - x$ 위의 점 $(t-k, f(t-k))$ 와 점 $(t+k, f(t+k))$ 에서의 접선 역시 점 $(1, a)$ 를 지나야 하므로 $f(t) = -2t^3 + 3t^2 - 1$ 라 두면 $f(t) = a$ 이므로 $f(t-k) = f(t) = f(t+k) = a$ 이어야 한다. 이때 곡선 $y = f(t)$ 와 직선 $y = a$ 의 교점이 3 개이고, 이 세 점의 x 좌표가 등차수열을 이루므로 가능한 경우는 다음 그림과 같이 직선 $y = a$ 가 곡선 $y = f(t)$ 의 변곡점을 지나는 경우밖에 없다.



따라서 $a = -\frac{1}{2}$ 이다.

<손풀이>

$$y = (3t^2 - 1)(x - t) + t^3 - t$$

$$(1, a) \text{ 때 } \rightarrow a = -2t^3 + 3t^2 - 1$$

$$\therefore 2t^3 - 3t^2 + a + 1 = 0$$

$$t_1 + t_2 + t_3 = \frac{3}{2} \rightarrow t_2 = \frac{1}{2} \text{ (by 등차중항)}$$

$$t_1 \cdot t_2 + t_2 \cdot t_3 + t_3 \cdot t_1 = 0 \rightarrow d = \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ (단 } t_1 = t_2 - d, t_3 = t_2 + d)$$

$$t_1 \cdot t_2 \cdot t_3 = \frac{a+1}{3} \rightarrow \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \left(\frac{1}{2}\right) \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -\frac{a+1}{3}$$

$$\therefore a = -\frac{1}{2}$$

29-8. 40

$g(x) = \int_0^x f(t) dt$ 라 두면

(가) 조건에 의해

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{g(x)}{x(x+2)} = -1 \text{ 이므로 } g(0) = 0, g'(0) = -2 \text{ 이다.}$$

(나) 조건에 의해

$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{g(x)}{x-2} = 10$ 이므로 $g(2) = 0$, $g'(2) = 10$ 이다

함수 $g(x)$ 는 최고차항의 계수가 $\frac{1}{4}$ 인 사차함수이므로

$g(x) = \frac{1}{4}x(x-2)(x^2+px+q)$ 라 두면

$g'(0) = -\frac{1}{2}q = -2$, $g'(2) = p + \frac{1}{2}q + 2 = 10$ 이고,

$p = 6$, $q = 4$ 이다.

따라서 $g(x) = \frac{1}{4}x(x-2)(x^2+6x+4)$ 이고,

$f(3) = g'(3) = 40$ 이다.

<손풀이>

$$(가) f(0) = -2$$

$$(나) \int_0^2 f(t) dt = 0, f(2) = 10$$

$$f(x) = x^3 + ax^2 + bx - 2$$

$$\Rightarrow f(x) = x^3 + 3x^2 - 4x - 2 \text{ (by (나))}$$

확률과 통계

29-9. ②

야구공, 테니스공, 탁구공이 모두 5개씩 있다고 가정하고
학생마다 3종류의 공 중 한 개씩 선택하게 한 후,
학생 5명이 모두 야구공이나 테니스공을 선택한 경우를
빼면 된다.

$$3^5 - 2 = 241$$

<손풀이>

$$\begin{array}{ccc} \text{야구} & \text{테니스} & \text{탁구} \\ 4 & 4 & 5 \end{array} = 13 \text{개}$$

5명의 학생이 야구/테니스/탁구공 중에서
하나를 고른다고 생각

$$3^5 - 2$$

모든 야구공을 고른 경우.
or 테니스공 ") 제외.

$$243 - 2 = \boxed{241}$$

29-10. ②

$$\frac{n}{n+3} \times \frac{3}{n+2} = \frac{1}{4}$$

$$n^2 - 7n + 6 = (n-1)(n-6) = 0$$

$$\therefore n = 6 \quad (\because n > 1)$$

$$\text{따라서 구하는 확률은 } \frac{6}{9} \times \frac{3}{9} = \frac{2}{9}$$

<손풀이>

항공 n, 검은공 3

비복원 1st 2nd $\Rightarrow \frac{1}{4}$
 $\rightarrow$ 항공 검은공

$$\frac{n}{n+3} \times \frac{3}{n+2} = \frac{1}{4}$$

$$12n = n^2 + 5n + 6$$

$$0 = n^2 - 7n + 6$$

$$n=6$$

복원 1st 2nd
 $\rightarrow$ 항공 검은공.

$$\frac{6}{9} \times \frac{3}{9} = \boxed{\frac{2}{9}}$$

29-11. ⑤

학생 100명을 임의추출하여 구한 표본평균 $\bar{x}_1$ 으로 추정한 모평균 m 에 대한 95%의 신뢰구간은

$$\bar{x}_1 - 1.96 \times \frac{\sigma}{\sqrt{100}} \leq m \leq \bar{x}_1 + 1.96 \times \frac{\sigma}{\sqrt{100}} \text{ 이므로}$$

$$\bar{x}_1 - 1.96 \times \frac{\sigma}{\sqrt{100}} = 40, \quad \bar{x}_1 + 1.96 \times \frac{\sigma}{\sqrt{100}} = 60$$

$$\bar{x}_1 = 50, \quad 1.96 \times \frac{\sigma}{10} = 10$$

다시 학생 n 명을 임의추출하여 구한 표본평균 $\bar{x}_2$ 로 추정한 모평균 m 에 대한 95%의 신뢰구간은

$$\bar{x}_2 - 1.96 \times \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leq m \leq \bar{x}_2 + 1.96 \times \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \text{ 이므로}$$

$$\bar{x}_2 - 1.96 \times \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \bar{x}_2 - \frac{100}{\sqrt{n}} = 45 \quad \dots \textcircled{㉠}$$

$$\bar{x}_2 + 1.96 \times \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \bar{x}_2 + \frac{100}{\sqrt{n}} = 70 \quad \dots \textcircled{㉡}$$

$$\textcircled{ㄷ} \text{에서 } \textcircled{ㄱ} \text{를 빼면 } \frac{200}{\sqrt{n}} = 25$$

$$\therefore n = 64$$

<손풀이>

$$X \sim N(\mu, \sigma^2) \quad n=100 \quad \bar{x}_1$$

$$95\% \quad \underline{40} \leq \mu \leq \underline{60}$$

$$\underline{\bar{x}_1 - 1.96 \frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \leq \mu \leq \underline{\bar{x}_1 + 1.96 \frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$$

$$\therefore \bar{x}_1 = 50, \quad 1.96 \sigma = 100$$

ㄴ 95% 신뢰

$$45 \leq \mu \leq 70$$

$$\bar{x}_2 = \frac{45 + 70}{2} = 57.5$$

$$57.5 - 12.5 \leq \mu \leq 57.5 + 12.5$$

$$1.96 \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 12.5$$

$$\frac{100}{\sqrt{n}} = 12.5$$

$$\sqrt{n} = 8$$

$$\boxed{n=64}$$

29-12. 15

조건 (가)에 의해 함수 f 는 일대일 대응이므로 (가)를 만족시키는 함수의 개수는 $4! = 24$ 이다.

이중 모든 x 에 대하여 $f(x) \neq x$ 인 함수의 개수는 9이므로 구하는 경우의 수는 $24 - 9 = 15$

<손풀이>

*여사건

모든 x 에 대하여 $f(x) \neq x$ 경우를 제외

$$\textcircled{ㄱ} \quad 4! = 24$$

*여기

모든 것에 대하여 $f(x)$ 가 경우를 제외

$$\textcircled{가} \quad 4! = 24$$

$$\textcircled{나} \quad n\text{개의 교란순열은}$$

a_1	a_2	a_3	a_4	a_5
0	1	2	9	44

$$4! - 9 = 24 - 9 = \boxed{15}$$

<참고>

1부터 n 까지 적힌 공을 1부터 n 까지 적힌 상자에 하나씩 넣을 때 각 공에 적힌 숫자와 그 공이 들어간 상자에 적힌 숫자가 모두 다를 경우의 수 D_n 을 완전순열 또는 교란순열이라 한다.

$$D_2 = 1, D_3 = 2, D_4 = 9, D_5 = 44$$

위 수는 외워두면 좋다.

미적분**29-9. ②**

직선 $y = nx$ 와 곡선 $y = \sqrt{x}$ 의 교점 의 x 좌표를 구해보면

$$nx = \sqrt{x}, n^2 x^2 = x, x = \frac{1}{n^2} \text{ 이다. } (x \neq 0)$$

따라서 $a_n = \frac{1}{n^2}$ 이고,

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \{(2n+1)a_n a_{n+1}\} &= \sum_{n=1}^{\infty} (2n+1) \times \frac{1}{n^2} \times \frac{1}{(n+1)^2} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{1}{n^2} - \frac{1}{(n+1)^2} \right\} = 1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \dots = 1 \text{ 이다.} \end{aligned}$$

29-10. ⑤

점 A 는 곡선 $y = 3x - x \ln x$ 와 x 축의 교점이므로

$$A(e^3, 0) \text{ 이다.}$$

이때 점 P 의 좌표를 $(t, 3t - t \ln t)$ ($0 < t < e^3$) 이라 두고, 삼각형 OAP의 넓이를 $S(t)$ 라 두면

$$S(t) = \frac{1}{2} \times e^3 \times (3t - t \ln t) \text{ 이고,}$$

$$S'(t) = \frac{1}{2}e^3 \times (2 - \ln t) \text{ 이므로}$$

$S(t)$ 는 $t = e^2$ 에서 극대이자 열린구간 $(0, e^3)$ 에서 최대이다.
따라서 삼각형 OAP 의 넓이의 최댓값은

$$S(e^2) = \frac{e^3}{2}(3e^2 - e^2 \ln e^2) = \frac{1}{2}e^5 \text{ 이다.}$$

29-11. 16

함수 $g(x)$ 는 $x = 0$ 에서 불연속이지만 함수 $f(x)g(x)$ 는 $x = 0$ 에서 연속이므로 함수의 연속성에 의해 $f(0) = 0$ 이다.

$$f(x)g(x) = \begin{cases} \frac{f(x)}{\ln(\cos x)} & (x \neq 0) \\ f(x) & (x = 0) \end{cases}$$

이고, 함수 $f(x)g(x)$ 는 $x = 0$ 에서 연속이므로

$$f(0)g(0) = \lim_{x \rightarrow 0} f(x)g(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{\ln(\cos x)} = 0 \text{ 이다.} \quad \dots \textcircled{7}$$

$$\text{이때 } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(\cos x)}{x^2}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + (\cos x - 1))}{\cos x - 1} \times \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{x^2} = -\frac{1}{2}$$

이므로 $\ln(\cos x)$ 는 x 를 인수로 2 개 가진다.

따라서 $\textcircled{7}$ 의 극한값이 0 이 되려면 함수 $f(x)$ 는 x 를 인수로 최소 3 개 가져야 한다.

이때 함수 $f(x)$ 는 삼차함수이므로 $f(x) = kx^3$ 이라 둘 수 있다.

$$\text{이때 } \lim_{x \rightarrow 0} x^2 g(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{\ln(\cos x)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{\ln(1 + (\cos x - 1))} \times \frac{x^2}{\cos x - 1} = -2 \text{ 이므로}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x^2 g(x)) = f(-2) = -16 \text{ 이고, } k = 2 \text{ 이다.}$$

따라서 $f(x) = 2x^3$, $f(2) = 16$ 이다.

<손풀이>

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{\ln(\cos x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{\ln(1 + \cos x - 1)} \times \frac{x^2}{\cos x - 1} = -2$$

$$\therefore f(-2) = -16$$

$$f(x)g(x) : \text{연속} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\overbrace{f(x)}^{3\text{개} \cdot 1\text{개}}}{\underbrace{\ln \cos x}_{2\text{개}}} = 0$$

$$\therefore f(x) = 2x^3$$

29-12. 150

두 곡선의 교점의 x 좌표를 α 라 하자.

두 곡선이 오직 한점에서만 만나므로 두 곡선은 $x = \alpha$ 에서 접한다.

$$\alpha e^{-\alpha} = e^{\alpha-t} + k, (1-\alpha)e^{-\alpha} = e^{\alpha-t} \text{이므로}$$

$$k = (2\alpha - 1)e^{-\alpha}, t = 2\alpha - \ln(1-\alpha) \text{이다.}$$

$$k=0 \text{ 일 때 } \alpha = \frac{1}{2}, t = f(0) = 1 + \ln 2 \text{이다.}$$

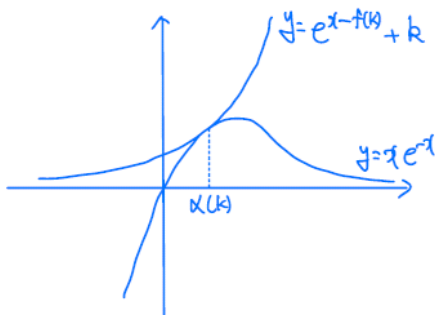
$$f(k) = t = 2\alpha - \ln(1-\alpha) \text{이므로}$$

$$f'(k) = \frac{dt}{dk} = \frac{dt}{d\alpha} \times \frac{d\alpha}{dk} = \left(2 + \frac{1}{1-\alpha}\right) \times \frac{1}{(3-2\alpha)e^{-\alpha}}$$

$$\text{이고, } f'(0) = 2e^{\frac{1}{2}} \text{이다.}$$

$$\text{따라서 } 300 \times \{f(0) - \ln f'(0)\} = 150 \text{이다.}$$

<손풀이>



$$\begin{cases} \alpha(k)e^{-\alpha(k)} = e^{\alpha(k)-f(k)} + k \Rightarrow (2\alpha(k)-1)e^{-\alpha(k)} = k \quad ① \\ (1-\alpha(k))e^{-\alpha(k)} = e^{\alpha(k)-f(k)} \end{cases}$$

(Note: An arrow points from the green-shaded $e^{\alpha(k)-f(k)}$ in the second equation to the $e^{\alpha(k)-f(k)}$ in the first equation.)

$$\Rightarrow f(k) = 2\alpha(k) - \ln(1-\alpha(k)) \quad ②$$

$$\text{②식에 } \begin{cases} k=0 \text{ 때일 } \rightarrow \alpha(0) = \frac{1}{2} \\ k \text{ 에 대해 미분 } \rightarrow e^{-\alpha(k)}(3-2\alpha(k)) \cdot \alpha'(k) = 1 \\ \rightarrow k=0 \text{ 때일 } \rightarrow \alpha'(0) = \frac{\sqrt{e}}{2} \end{cases}$$

$$\text{①식에 } \begin{cases} k=0 \text{ 때일 } \rightarrow f(0) = 1 + \ln 2 \\ \text{미분 } \rightarrow f'(k) = 2\alpha'(k) - \frac{-\alpha'(k)}{1-\alpha(k)} \end{cases}$$

$$\therefore f'(0) = \sqrt{e} + \sqrt{e} = 2\sqrt{e}$$

Day. 30

수학1, 수학2

30-1. 63

두 함수 $f(x)$, $g(x)$ 가 불연속이 될 수 있는 후보 지점이 동일하지 않는데 함수 $f(x) - g(x)$ 는 실수 전체의 집합에서 연속이므로

두 함수 $f(x)$ 와 $g(x)$ 는 모두 연속함수이다.

$$\lim_{x \rightarrow 1-} f(x) = a - 1 = \lim_{x \rightarrow 1+} f(x) = b + 1, a - b = 2 \quad \cdots \textcircled{㉠}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2-} g(x) = 2a + 3 = \lim_{x \rightarrow 2+} g(x) = b - 2, 2a - b = -5 \quad \cdots \textcircled{㉡}$$

㉠과 ㉡을 연립하여 계산하면 $a = -7$, $b = -9$ 이므로
 $ab = (-7) \times (-9) = 63$ 이다.

30-2. ⑤

$\frac{y}{x} + \frac{x}{y} = -\frac{8}{3}$, $x^2 + y^2 = 1$ 에서 $xy = -\frac{3}{8}$ 이다.

$\cos \theta = x$, $\sin \theta = y$ 이므로 $\cos \theta - \sin \theta = x - y$ 이다.

$$x - y = k \text{ 라 두면 } x^2 + y^2 - 2xy = 1 + \frac{3}{4} = \frac{7}{4} = k^2$$

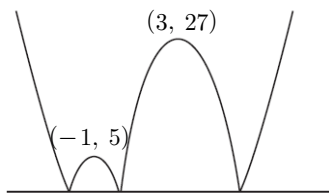
따라서 $k = \frac{\sqrt{7}}{2}$ 이다. ($k > 0$)

30-3. ⑤

두 점 사이의 거리 $s(t)$ 를

$$s(t) = |x_1 - x_2| = |t^3 - 3t^2 - 9t| \quad (0 \leq t \leq 5) \text{ 라 두면}$$

함수 $s(t)$ 의 그래프의 개형은 다음과 같다.



따라서 함수 $s(t)$ 는 $t = 3$ 일 때 최대이다.

점 P, Q 의 속도를 각각 v_1 , v_2 라 두면

$$v_1 = 3t^2 - 2t - 2, v_2 = 4t + 7 \text{ 이므로}$$

$t = 3$ 일 때 점 P, Q 의 속도는 각각 19, 19 이다.

따라서 $p + q = 19 + 19 = 38$ 이다.

30-4. ④

등차수열 $\{a_n\}$ 의 공차를 d 라 두면

$$S_{10} = 5 \times (a_1 + a_{10}) = 5(4 + 9d),$$

$$T_{10} = -a_1 + a_2 + \cdots = 5d$$

이므로

$$\frac{S_{10}}{T_{10}} = \frac{5(4+9d)}{5d} = 7, d = -2 \text{ 이다.}$$

따라서 $a_n = -2(n-1) + 2 = -2n + 4$ 이고,

$$\begin{aligned} T_{15} &= -a_1 + (a_2 - a_3) + (a_4 - a_5) + \cdots + (a_{14} - a_{15}) \\ &= -2 - 7d = 12 \text{ 이다.} \end{aligned}$$

<손풀이>

$$S_{10} = 5(4+9d)$$

$$T_{10} = \cancel{-a_1 + a_2} - \cancel{a_3 + a_4} - a_5 + \cdots + \cancel{(-a_9 + a_{10})} = 5d$$

$$\therefore \frac{S_{10}}{T_{10}} = 7 \Rightarrow d = -2$$

$$\begin{aligned} T_{15} &= -a_1 + \cancel{a_2 - a_3} + \cancel{a_4 - a_5} + \cdots + \cancel{a_{14} - a_{15}} \\ &= -a_1 + 7 \times (-d) \\ &= 12 \end{aligned}$$

30-5. ③

점 A, B 의 x 좌표가 각각 $a^{-2} - 1$, $a^2 - 1$ 이므로

점 C 의 y 좌표를 $-k$ 라 두면 점 D 의 y 좌표는 k 이다.

사각형 ABDC 의 넓이는

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2} \times \overline{AB} \times (\overline{AC} + \overline{BD}) \\ &= \frac{1}{2} \times (a^2 - a^{-2}) \times \{(2+k) + (2-k)\} \\ &= 2(a^2 - a^{-2}) = 3 \text{ 이므로 } a = 2^{\frac{1}{2}} \text{ 이다.} \end{aligned}$$

따라서 $A\left(-\frac{1}{2}, 2\right)$, $B(1, 2)$ 이고, $\overline{AB} = \frac{3}{2}$ 이다.

이때 직선 CD 의 기울기가 1 이므로

두 점의 y 좌표의 차인 $2k = \frac{3}{2}$ 이다.

즉 $D\left(1, \frac{3}{4}\right)$ 이고, 점 D 는 곡선 $y = \log_b(x+1)$

위의 점이므로 대입하여 계산하면 $b = 2^{\frac{4}{3}}$ 이다.

따라서 $\log_2(ab) = \log_2\left(2^{\frac{1}{2}} \times 2^{\frac{4}{3}}\right) = \frac{11}{6}$ 이다.

30-6. ②

$f(x)g(x) = x^2 + 3x - 4$ 에서

두 함수 $f(x)$, $g(x)$ 가 모두 일차함수이므로

$f(x) = a(x-1)$, $g(x) = \frac{1}{a}(x+4)$ 라 둘 수 있다.

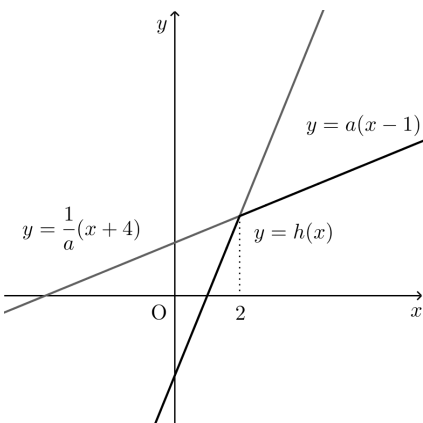
이때 함수 $h(x)$ 는 두 함수 $f(x)$ 와 $g(x)$ 중 하나를 선택하는

함수이고, 함수 $h(x)$ 는 연속함수이므로

$0 < h'(2+a) < h'(2-a)$ 에 의해 다음 그림을 통해

$$h(x) = \begin{cases} f(x) & (x < 2) \\ g(x) & (x \geq 2) \end{cases},$$

$f(2) = g(2)$, $f'(x) > g'(x)$ 임을 알 수 있다.



$$f(2) = g(2) \text{에서 } a = \frac{6}{a}, \quad a^2 = 6, \quad a = \sqrt{6}$$

$$h(x) = \begin{cases} \sqrt{6}(x-1) & (x < 2) \\ \frac{\sqrt{6}}{6}(x+4) & (x \geq 2) \end{cases} \quad \text{이므로}$$

$$h(0) + h(4) = f(0) + f(4) = -\sqrt{6} + \frac{4}{3}\sqrt{6} = \frac{\sqrt{6}}{3} \text{ 이다.}$$

($f(x) = a(x+4)$, $g(x) = \frac{1}{a}(x-1)$ 로 놓고 풀어도 결과는 동일)

<손풀이>

$$(가) f(x)g(x) = (x+4)(x-1)$$

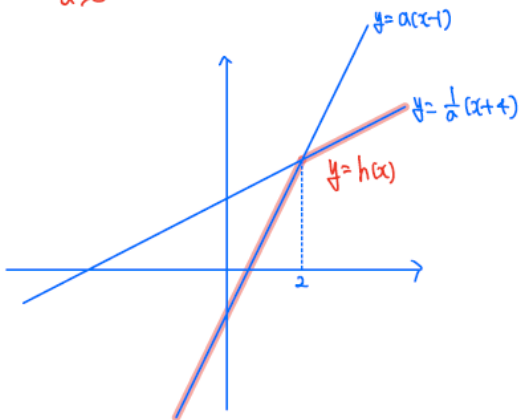
$$\rightarrow \text{Let } f(x) = a(x-1), \quad g(x) = \frac{1}{a}(x+4)$$

($f(x)$ 와 $g(x)$ 가 바뀌어도 상관없다)

$$(4) \underline{0 < h'(2+a) < h'(2-a)}$$

$$\downarrow$$

$$a > 0$$



$$f(2)=g(2) \rightarrow a^2=6 \rightarrow a=\sqrt{6} \text{ (by } a>0)$$

$$\therefore h(x) = \begin{cases} \sqrt{6}(x-1) & x < 2 \\ \frac{1}{\sqrt{6}}(x+4) & 2 \leq x \end{cases}$$

$$\therefore h(0)+h(4) = -\sqrt{6} + \frac{8\sqrt{6}}{6} = \frac{\sqrt{6}}{3}$$

30-7. 594

$\overline{FD} = x$ 라 두면

$$\overline{BF}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{AF}^2 = x^2 - 2x + 2,$$

$$\overline{BF}^2 = \overline{EF}^2 + \overline{BE}^2 = x^2 + \frac{3}{2}, \quad x = \frac{1}{4} \text{ 이다.}$$

$$\overline{FB} = \sqrt{1^2 + \left(\frac{3}{4}\right)^2} = \frac{5}{4}, \quad \overline{FC} = \sqrt{1^2 + \left(\frac{1}{4}\right)^2} = \frac{\sqrt{17}}{4}$$

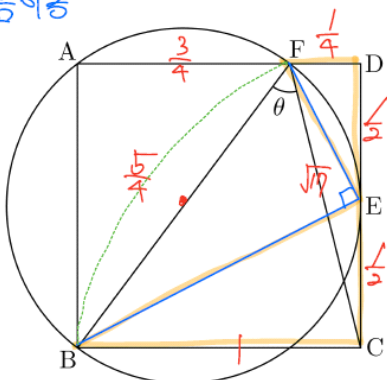
삼각형 BFC에서 코사인법칙에 의하여

$$4^2 = 5^2 + (\sqrt{17})^2 - 10\sqrt{17} \cos \theta$$

$$\cos \theta = \frac{13}{5\sqrt{17}}, \quad \cos^2 \theta = \frac{169}{425} = \frac{q}{p}, \quad p+q=594$$

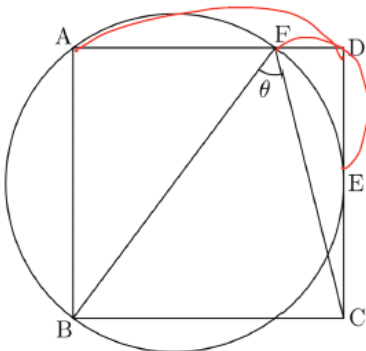
<손풀이>

① 닮음 이용



$$\cos \theta = \frac{13}{5\sqrt{17}}$$

② 환선경리



$$\overline{DE}^2 = \overline{DF} \times \overline{DA} \Rightarrow \overline{DF} = \frac{1}{4}$$

그 뒤는 첫번째와 똑같다.

30-8. 30

등차수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항을 a 라 하자.

(가) 조건에 의해 $a_n + a_{13-n} = 0$ 이므로 $2a + 11d = 0$

$a_6 + a_7 = 0$ 인데 (나) 조건에 의하여

$a_6 > 0$, $a_7 < 0$ 이고 $k = 6$ 이다.

$$S_6 = 3(2a + 5d) = -18d = 48 - 3d^2,$$

$d = -2$, $a = 11$ 이다. ($d < 0$)

따라서 $a_n = -2(n-1) + 11 = -2n + 13$, $a_4 = 5$ 이다.

확률과 통계

30-9. 147

가능한 (a, b) 는 $(0, 2), (1, 3), (2, 4), (3, 5), (4, 6)$ 이다.

각 경우에서 앞면이 나온 동전의 개수가 a 일 확률은

$$\left(\frac{1}{2}\right)^6 \times {}_6C_a, \text{ 주사위에 나온 눈의 개수가 } b \text{일 확률은 } \frac{1}{6} \text{ 이므로}$$

구하는 확률은

$$\left(\frac{1}{2}\right)^6 ({}_6C_0 + {}_6C_1 + {}_6C_2 + {}_6C_3 + {}_6C_4) \times \frac{1}{6} = \frac{19}{128}$$

$$\therefore p + q = 147$$

30-10. 52

$f(1) + f(2) + f(3) + f(4) = 15 \times f(5)$ 이려면

$$f(1) + f(2) + f(3) + f(4) = 15, f(5) = 1$$

이어야 한다.

$a = 5 - f(1)$, $b = 5 - f(2)$, $c = 5 - f(3)$, $d = 5 - f(4)$ 라 하면

a, b, c, d 는 5보다 작은 음이 아닌 정수이며

$a + b + c + d = 5$ 를 만족시킨다.

$$\therefore {}_4H_5 - 4 = 52$$

($\because a, b, c, d$ 중 하나가 5인 경우를 제외)

30-11. ①

확률밀도함수 $g(x)$ 의 그래프는 확률밀도함수 $f(x)$ 의 그래프를 x 축 방향으로 4만큼 평행이동한 것이므로

확률변수 Y 는 정규분포 $N(12, 4^2)$ 를 따른다.

$$\begin{aligned} \therefore P(Y \geq 20) &= P\left(Z \geq \frac{20-12}{4}\right) = P(Z \geq 2) \\ &= 0.5 - 0.47 = 0.03 \end{aligned}$$

30-12. ②

학생 10명이 임의로 원탁에 앉는 경우의 수 : $9!$

우선 1학년 2명을 임의로 서로 마주보게 앉히면 원탁은 고정된다.

그러면 남은 의자 8개가 1학년 2명 양옆으로 4개씩 두 그룹으로 나뉘는데, 각 그룹에 2학년과 3학년이 2명씩 앉아야 한다.

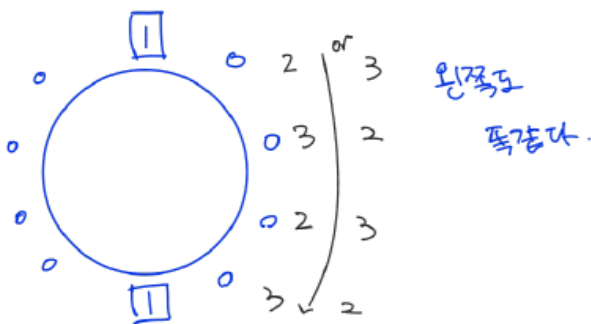
2, 3학년 학생을 두 그룹으로 나누는 경우의 수 : $({}_4C_2)^2$

한 그룹에서 같은 학년끼리 이웃하지 않게 앉는 경우의 수 : 2^3

따라서 구하는 확률은 $\frac{({}_4C_2)^2 \times (2^3)^2}{9!} = \frac{2}{315}$

<손풀이>

1학년 2 } 10명
2학년 4
3학년 4



1학년 2명, 2, 3학년 교미

$$1 \times (2 \times 2) \times \underline{4! \times 4!} \quad \text{배열}$$

$$\frac{2 \times 2 \times 4! \times 4!}{9!} = \frac{2 \times 2 \times 4!}{9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5} = \boxed{\frac{2}{315}}$$

미적분

30-9. ①

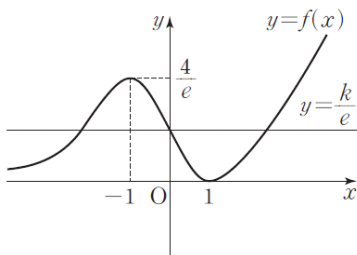
$f(x) = (x^2 + ax + 1)e^x$ 에서

$$\begin{aligned} f'(x) &= (2x + a)e^x + (x^2 + ax + 1)e^x \\ &= \{x^2 + (a+2)x + a+1\}e^x \end{aligned}$$

$$f'(1) = 2a + 4 = 0 \text{ 이므로 } a = -2$$

따라서 $f'(x) = (x^2 - 1)e^x$ 이고, $f(x) = (x - 1)^2 e^x$ 이다.

곡선 $y=f(x)$ 와 직선 $y=\frac{k}{e}$ 의 개형은 다음과 같다.



따라서 방정식 $f(x)=\frac{k}{e}$ 이 서로 다른 세 실근을 가지려면

$0 < \frac{k}{e} < \frac{4}{e}$, 즉 $0 < k < 4$ 이어야 한다.

따라서 모든 정수 k 의 합은 $1+2+3=6$ 이다.

30-10. ⑤

$b_n = -a_n$ 이므로

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n = -4$ 에서 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 = 4$ 이고,

등비수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항을 a , 공비를 r 이라 하면

$$\frac{a^2}{1-r^2} = 4 \text{이다.}$$

$a_2 b_2 = -1$ 에서 $a_2^2 = 1$, $a^2 r^2 = 1$ 이고 수열 $\{a_n\}$ 의 모든 항은 양수이므로

$$a = \sqrt{2}, r = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

따라서 $a_2 - b_4 = a_2 + a_4 = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$ 이다.

30-11. ②

$\int_{2a-1}^{2a+1} f\left(a - \frac{1}{2}x\right) dx$ 에서

$a - \frac{1}{2}x = t$ 로 치환하면 $-\frac{1}{2} = \frac{dt}{dx}$ 이므로

$$\begin{aligned} \int_{2a-1}^{2a+1} f\left(a - \frac{1}{2}x\right) dx &= \int_{\frac{1}{2}}^{-\frac{1}{2}} \{-2f(t)\} dt \\ &= 2 \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} f(t) dt = 4 \int_0^{\frac{1}{2}} f(t) dt = 16 \end{aligned}$$

따라서 $\int_0^{\frac{1}{2}} f(t) dt = 4$ 이다.

$\int_0^{\frac{1}{2}} x f(4x^2) dx$ 에서 $4x^2 = s$ 로 치환하면 $8x = \frac{ds}{dx}$ 이므로

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{1}{2}} x f(4x^2) dx &= \frac{1}{8} \int_0^1 f(s) ds \\ &= \frac{1}{8} \left\{ \int_0^{\frac{1}{2}} f(s) ds + \int_{\frac{1}{2}}^1 f(s) ds \right\} \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{8}(4+12) = 2 \text{이다.}$$

<손풀이>

$$(4) \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} f(x) dx = 8$$

$$\Rightarrow \int_0^{\frac{1}{2}} f(x) dx = 4$$

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{1}{2}} x f(4x^2) dx &= \frac{1}{8} \int_0^1 f(t) dt \\ &= \frac{1}{8}(4+12) = 2 \end{aligned}$$

* 별해

$$F(x) = \int_0^x f(t) dt$$

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{1}{2}} x f(4x^2) dx &= \left[\frac{1}{8} F(4x^2) \right]_0^{\frac{1}{2}} \\ &= \frac{1}{8} F(1) \\ &= \frac{1}{8}(4+12) \\ &= 2 \end{aligned}$$

30-12. ②

함수 $f(x)$ 는 실수 전체의 집합에서 미분가능하므로
조건 (가)에 의해

$$f(0) = 1, f'(0) = a+b \text{이다.}$$

조건 (나)에 의해

$$\frac{\{f(x_2)\}^2 - \{f(x_1)\}^2}{x_2 - x_1} = -2 \text{ 이고, } g(x) = \{f(x)\}^2 \text{로}$$

치환하면

모든 음수 x 에 대하여 $g'(x) = -2$ 이다.

따라서 $x < 0$ 에서 $\{f(x)\}^2 = -2x + 1$ 이라 둘 수 있고,

$$f(x) = \sqrt{1-2x} \text{이다.}$$

$$f'(0) = a+b = -1, f(1) = ae+b+1 = 2 \text{이므로}$$

$$a = \frac{2}{e-1}, b = -\frac{e+1}{e-1} \text{이고,}$$

$$f'(1) = \frac{3e-1}{e-1} \text{이다.}$$

<손풀이>

$$(4) h(x) = (f(x))^2 + 2x \text{ 라 하자}$$

$$\therefore h(x) \geq \text{상수} \text{ (단 } x < 0)$$

$$\therefore (f(x))^2 + 2x = 1 \quad (\text{by } \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 1)$$

$$(5) \begin{cases} f(1) = 2 \Rightarrow ae + b = 1 \\ x=0 \text{ 에서 } f(x) = 1 \Rightarrow a + b = 1 \end{cases}$$

$$a = \frac{2}{e-1}, \quad b = \frac{-e+1}{e-1}$$

$$f'(1) = 2ae + b$$

$$= \frac{3e-1}{e-1}$$

Day. **31**

수학1, 수학2

31-1. ③

$$f'(x) = 3x^2 - 6x + a \text{ 에서 } f'(1) = -3 + a = -1, a = 2$$

$$f(a) = f(2) = \int_1^2 (3x^2 - 6x + a) dx = 0$$

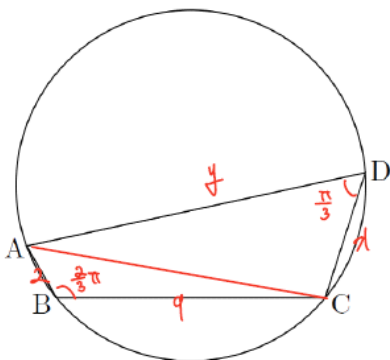
31-2. ③ $\overline{CD} = a, \overline{DA} = b$ 라 하자.

삼각형 ABC, CDA에서 코사인법칙에 의해

$$\overline{AC}^2 = 2^2 + 9^2 + 2 \times 9 = a^2 + b^2 - ab = (a+b)^2 - 3ab$$

$$4 + 81 + 18 = 16^2 - 3ab, ab = 51$$

<손풀이>



$$\begin{aligned} \overline{AC}^2 &= 4 + 81 - 2 \times 2 \times 9 \cos \frac{2}{3}\pi \\ &= x^2 + y^2 - 2xy \cos \frac{\pi}{3} \end{aligned}$$

$$x+y=16$$

$$\therefore xy=51$$

31-3. 164

$$(가): 2\sqrt{2} \quad (나): 2^k$$

$$(다): \sqrt{2} \sum_{k=1}^n (2^k - k + 2) = \sqrt{2} \left\{ 2(2^n - 1) - \frac{n(n+1)}{2} + 2n \right\}$$

$$p = 2\sqrt{2}, f(6) = 2^6 = 64, g(5) = 57\sqrt{2}$$

$$p \times g(5) - f(6) = 228 - 64 = 164$$

31-4. ③

$$a_2 + a_3 + a_4 = 3a_3 > 0, a_3 > 0,$$

$$a_3 + a_4 + a_5 + a_6 = 2(a_4 + a_5) < 0, a_4 + a_5 < 0$$

등차수열 $\{a_n\}$ 의 공차를 d 라 하면

$$a_3 = 8 + 2d > 0, a_4 + a_5 = 16 + 7d < 0 \text{ 이므로}$$

$$-4 < d < -\frac{16}{7} \text{ 이다.}$$

따라서 가능한 정수 d 는 $d = -3$ 뿐이다.

$$a_n = -3n + 11 \text{ 이므로}$$

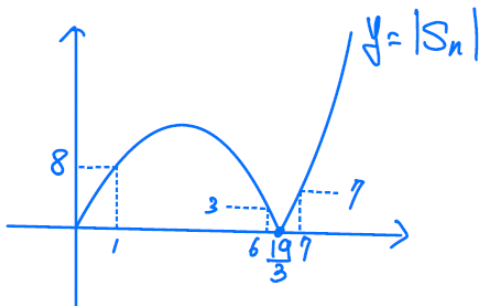
$$S_n = \frac{1}{2} \times (a_1 + a_n) \times n = -\frac{3}{2}n^2 + \frac{19}{2}n \text{ 이고,}$$

$$|S_n| = \left| -\frac{3}{2}n^2 + \frac{19}{2}n \right| \text{ 은 } n=6 \text{ 일 때 최솟값 } 3 \text{ 을 가진다.}$$

<손풀이>

$$\begin{cases} a_2 + a_3 + a_4 = 3a_3 > 0 \\ a_3 + a_4 + a_5 + a_6 = 2(a_4 + a_5) = 2(2a_3 + 3d) < 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow a_n = -3n + 11$$



31-5. 17

점 A의 x 좌표를 t 라 두면

$$A\left(t, a \tan \frac{\pi t}{2}\right), B\left(-t, \sin \frac{\pi t}{2}\right), C\left(t, -\sin \frac{\pi t}{2}\right) \text{ 이다.}$$

점 A와 B의 y 좌표가 같으므로

$$a \tan \frac{\pi t}{2} = \sin \frac{\pi t}{2}, \cos \frac{\pi t}{2} = a \quad \dots \textcircled{㉠}$$

$$\overline{AE} \times \overline{CE} = a \tan \frac{\pi t}{2} \times \sin \frac{\pi t}{2} = \frac{2}{3} \quad \dots \textcircled{㉡}$$

㉠과 ㉡을 연립하여 계산하면

$$1 - a^2 = \frac{2}{3}, a^2 = \frac{1}{3} \text{ 이다.}$$

$$\text{따라서 } \overline{AC} = \overline{AE} + \overline{CE} = \frac{\sqrt{8}}{\sqrt{3}} \text{ 이고,}$$

$$a^2 \times \overline{AC}^2 = \frac{1}{3} \times \frac{8}{3} = \frac{8}{9} \text{ 이다.}$$

$$\therefore p + q = 9 + 8 = 17$$

31-6. ④

함수 $g(x)$ 가 $x = -1$ 에서 연속이므로

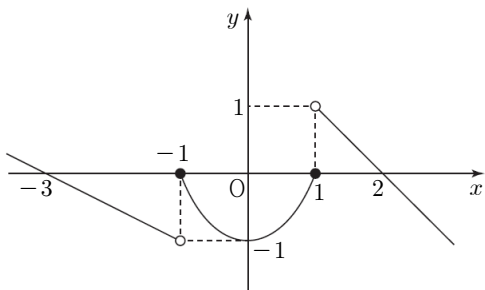
$$\lim_{x \rightarrow -1-} g(x) = \lim_{x \rightarrow -1+} g(x) = g(-1) \text{ 을 만족시킨다.}$$

$$\lim_{x \rightarrow -1-} g(x) = \lim_{x \rightarrow -1-} -1 \times f(x-a)f(x+a),$$

$$\lim_{x \rightarrow -1+} g(x) = g(-1) = 0 \text{ 이므로}$$

$$\lim_{x \rightarrow -1-} f(x-a)f(x+a) = 0 \text{ 이어야 한다.}$$

이때 함수 $f(x)$ 의 그래프의 개형은 다음과 같다.



따라서 함수 $f(x)$ 의 좌극한이 0이 되도록 하는

실수 x 의 값은 $x = -3, 1, 2$ 뿐이고,

$-1-a = -3, 1, 2, -1+a = -3, 1, 2$ 에서

가능한 실수 a 의 값은 $a = -3, -2, 2, 3$ 으로 4개다.

따라서 $m \times n = 4 \times 3 = 12$ 이다.

<손풀이>

$$g(-1) = f(-1) \cdot f(-1-a) \cdot f(-1+a) = 0$$

$$g(-1+) = f(-1+) f(-1-a+) f(-1+a+) = 0$$

$$g(-1-) = f(-1-) f(-1-a-) f(-1+a-) = -f(-1-a-) f(-1+a-)$$

$$\therefore f(x) \text{가 } x=-1 \text{ 연속} \rightarrow f(-1-a)=0 \text{ or } f(-1+a)=0$$

$$f(-3)=f(-1)=f(1)=0 \text{ 이므로}$$

$$a = -2 \text{ or } 2 \text{ or } 3 \text{ or } -3$$

$$\therefore m=4, \quad n=3$$

31-7. ③

(나) 조건에 의하여 a_1, a_2 모두 홀수여야만 한다.

i) a_5 가 짝수인 경우

$$a_6 = \frac{1}{2}a_5 \text{ 이므로 } a_5 = 70, \quad a_6 = 35 \text{ 이다.}$$

a_4 가 홀수라면 $a_5 = a_3 + a_4 = 70$ 에서 a_3 은 홀수이다.

따라서 $a_4 = a_2 + a_3$ 이고, a_2 는 짝수이지만

이는 (나) 조건에 모순이다.

$$\text{따라서 } a_4 \text{는 짝수이고 } a_5 = \frac{1}{2}a_4 = 70 \text{ 이므로}$$

$$a_4 = 140 \text{ 이다.}$$

같은 방법으로 a_3 이 홀수라면 $a_4 = a_2 + a_3 = 140$ 이고,

a_2 역시 홀수이다. 하지만 $a_3 = a_1 + a_2$ 에서 a_1 이

짝수이므로 이 역시 (나) 조건에 모순이다.

$$\text{따라서 } a_3 \text{은 짝수이고, } a_4 = \frac{1}{2}a_3 = 140 \text{에서}$$

$$a_3 = 280 \text{ 이다.}$$

ii) a_5 가 홀수인 경우

$a_5 + a_6 = 105$ 에서 a_6 은 짝수이고, $a_6 = a_4 + a_5$ 에서 a_4 는 홀수이다. 따라서 $a_5 = a_4 + a_3$ 에서 a_3 은 짝수이고, $a_3 = 2k$

(단, k 는 정수)라 하면 $a_4 = k, \quad a_5 = 3k, \quad a_6 = 4k$ 에서

$$7k = 105, \quad k = 15, \quad a_3 = 30 \text{ 이다.}$$

따라서 $M = 280, \quad m = 30$ 이고,

$$M + m = 280 + 30 = 310 \text{ 이다.}$$

<손풀이>

$$(4) \quad a_1 : \frac{3}{2}, \quad a_2 : \frac{5}{2}$$

$$a_3 = a_1 + a_2 : \frac{4}{2} \rightarrow a_4 = \frac{1}{2}(a_1 + a_2) = \begin{cases} \frac{3}{2} & (a_1 + a_2 = 4k+2) \\ \frac{5}{2} & (a_1 + a_2 = 4k) \end{cases}$$

$$a_5 = \begin{cases} \frac{3}{2}(a_1 + a_2) : \frac{3}{2} & (a_1 + a_2 = 4k+2) \\ \frac{5}{2}(a_1 + a_2) : \frac{5}{2} \text{ or } \frac{3}{2} & (a_1 + a_2 = 4k) \end{cases}$$

$$\text{Case 1} \rangle \quad a_1 + a_2 = 4k+2 \rightarrow a_6 = 2(a_1 + a_2)$$

$$\therefore a_3 = a_1 + a_2 = 30 \quad (\text{by } a_5 + a_6 = 105)$$

$$\text{Case 2} > a_1 + a_2 = 4k \rightarrow a_3 = k$$

$$\text{① } k = 72 \rightarrow a_6 = \frac{1}{8}(a_1 + a_2) : \text{ㄷ (by } a_5 + a_6 : \text{ㄷ)}$$

$$\therefore a_3 = a_1 + a_2 = 280$$

$$\text{② } k = 5 \rightarrow a_6 = \frac{3}{4}(a_1 + a_2) : \text{ㄷ (by } a_5 + a_6 : \text{ㄷ)}$$

$$\rightarrow a_1 + a_2 : \text{8의 배수}$$

$$\therefore a_3 = a_1 + a_2 = 105 \rightarrow \text{ㄷ}$$

31-8. ①

$$\int_a^x f(t) dt = \frac{x^2 - 2x + b}{x + 1} \quad \dots \text{㉠}$$

㉠의 양변에 $x = a$ 를 대입하면

$$\int_a^a f(t) dt = \frac{a^2 - 2a + b}{a + 1}$$

$$0 = \frac{a^2 - 2a + b}{a + 1}$$

$$a > 0 \text{이므로 } a^2 - 2a + b = 0 \quad \dots \text{㉡}$$

㉠의 양변에 $x = 0$ 을 대입하면

$$\int_a^0 f(t) dt = b \quad \dots \text{㉢}$$

㉠의 양변에 $x = 1$ 을 대입하면

$$\int_a^1 f(t) dt = \frac{-1 + b}{2} \quad \dots \text{㉣}$$

㉣ - ㉢을 하면

$$\int_a^1 f(t) dt - \int_a^0 f(t) dt = \frac{-1 + b}{2} - b$$

$$\int_a^1 f(t) dt + \int_0^a f(t) dt = \frac{-1 - b}{2}$$

$$\int_0^1 f(t) dt = \frac{-1 - b}{2}$$

$$\text{조건(가)에서 } \int_0^1 f(x) dx = \frac{7}{2} \text{이므로 } \frac{-1 - b}{2} = \frac{7}{2},$$

$b = -8$ 이다. 이를 ㉡에 대입하면

$$a^2 - 2a - 8 = 0, (a + 2)(a - 4) = 0$$

$$a > 0 \text{이므로 } a = 4$$

$$\text{따라서 } a + b = 4 + (-8) = -4$$

<손풀이>

(4) $x=a$ 대입

$$0 = \frac{a^2 - 2a + b}{a + 1}$$

$$\therefore b = -a^2 + 2a$$

$$\begin{aligned}
 \text{(가)} \quad \int_a^1 f(t) dt &= \frac{b-1}{2} \\
 \int_a^0 f(t) dt &= b \\
 \int_0^1 f(t) dt &= \int_a^1 f(t) dt + \int_0^a f(t) dt \\
 &= \frac{b-1}{2} - b \\
 &= \frac{-b-1}{2} = \frac{7}{2} \\
 \therefore b &= -8 \quad a = 4
 \end{aligned}$$

확률과 통계

31-9. ③

같은 종류의 공책 14권을 4명의 학생에게 모든 학생이 적어도 한 권을 받도록 나눠주는 경우의 수는 미리 모든 학생에게 공책을 한 권씩 나눠준 뒤 남은 10권을 나눠주는 경우의 수와 같으므로

$${}_4H_{10} = 286$$

이 중에서 4명의 학생 모두 공책을 3권 이상 받는 경우의 수는 미리 모든 학생에게 공책을 3권씩 나눠준 뒤 나머지 2권을 나눠주는 경우의 수와 같으므로 ${}_4H_2 = 10$

따라서 구하는 경우의 수는

$$286 - 10 = 276$$

31-10. 154

조건 (가)에 의해 $P(30 \leq X \leq 50) = P(90 \leq X \leq 110)$

이므로 확률변수 X 의 평균은 70이다.

따라서 $f(k)$ 의 최댓값은 $k=60$ 일 때,

$$P(60 \leq X \leq 80) = P(-2 \leq Z \leq 2) = 0.94 \text{ 이므로}$$

$$\alpha = 60, M = 0.94$$

$$\therefore \alpha + 100M = 154$$

31-11. ④

선택한 카드에 1과 4가 동시에 있으면 안 된다.

i) 선택한 카드에 1이 있고 4가 없을 경우

1, 2, 3이 적힌 카드 9장에서 3장을 선택하는 경우의 수에서
2, 3이 적힌 카드 6장에서 3장을 선택하는 경우의 수를 뺀다.

$${}_9C_3 - {}_6C_3 = 84 - 20 = 64$$

ii) 선택한 카드에 4가 있고 1이 없을 경우

2, 3, 4이 적힌 카드 9장에서 3장을 선택하는 경우의 수에서
2, 3이 적힌 카드 6장에서 3장을 선택하는 경우의 수를 뺀다.

$${}_9C_3 - {}_6C_3 = 84 - 20 = 64$$

iii) 선택한 카드에 1과 4가 모두 없을 경우

$${}_6C_3 = 20$$

따라서 구하는 확률은

$$\frac{64}{64+64+20} = \frac{16}{37}$$

<손풀이>

3장의 카드 차 ≤ 2 → 1.4 같이 나오면

여사건 활용.

(114, 144) (1.4, □)

$$1 - \frac{{}_3C_2 \cdot {}_3C_1 \times 2 + {}_3C_1 {}_3C_1 {}_6C_1}{{}_{12}C_3} = \text{분모}$$

$$= 1 - \frac{18}{55} = \frac{37}{55}$$

4를 포함하는 경우

4 _ _ , 4 4 _ , 4 4 4

$$\frac{{}_3C_1 \times {}_6C_2 + {}_3C_2 \times {}_6C_1 + {}_3C_3}{{}_{12}C_3}$$

$$= \frac{16}{55}$$

$$\boxed{\frac{16}{37}}$$

31-12. ①

- i) A, B가 처음에 받은 공이 모두 흰 공이고, A, B가 두 번째로 받은 공이 모두 검은 공일 확률

$$\frac{{}_3C_2}{{}_8C_2} \times \frac{{}_5C_2}{{}_6C_2} = \frac{3}{28} \times \frac{10}{15} = \frac{1}{14}$$

- ii) A가 처음에 받은 공이 흰 공, B가 처음에 받은 공이 검은 공이고, A, B가 두 번째로 받은 공이 모두 검은 공일 확률

$$\left(\frac{{}_3C_1 \times {}_5C_1}{{}_8C_2} \times \frac{1}{2} \right) \times \frac{{}_4C_2}{{}_6C_2} = \left(\frac{15}{28} \times \frac{1}{2} \right) \times \frac{6}{15} = \frac{3}{28}$$

따라서 구하는 확률은

$$\frac{1}{14} + \frac{3}{28} = \frac{5}{28}$$

<손플이>

비복원.

	A	B
1st	W	W
2nd	B	B

+

	A	B
1st	W	B
2nd	B	B

평균 2개 $\rightarrow$ 검은공 2개 (평균 1, 검은공 1) A 평균 $\rightarrow$ 검은공 2개

$$\frac{{}_3C_2}{{}_6C_2} \times \frac{{}_5C_2}{{}_6C_2} + \frac{{}_3C_1 {}_5C_1}{{}_6C_2} \times \frac{1}{2} \times \frac{{}_4C_2}{{}_6C_2}$$

$$\frac{3}{20} \times \frac{10}{15} + \frac{15}{20} \times \frac{1}{2} \times \frac{6}{15}$$

$$\frac{1}{4} + \frac{3}{20} = \frac{5}{20}$$

미적분

31-9. ②

급수 $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{a_n}{n} - \frac{3n+10}{n+2} \right)$ 가 수렴하므로

$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{a_n}{n} - \frac{3n+10}{n+2} \right) = 0$ 이어야 한다.

$a_n = pn + q$ 라 두면

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{a_n}{n} - \frac{3n+10}{n+2} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(p - 3 + \frac{q}{n} - \frac{4}{n+2} \right) = 0$$

이고, $p = 3$ 이다.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{q}{n} - \frac{4}{n+2} \right)$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \left(\frac{4}{n} - \frac{4}{n+2} \right) + \frac{q-4}{n} \right\}$$

이때 $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{4}{n} - \frac{4}{n+2} \right) = 4 \left(1 + \frac{1}{2} \right) = 6$ 이고

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ 이 양의 무한대로 발산하므로 $q = 4$ 일 때에만

$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{q}{n} - \frac{4}{n+2} \right)$ 이 수렴한다. 이때 $c = 6$ 이다.

$a_n = 3n + 4$ 이므로 $a_2 = 10$ 이고,

$c \times a_2 = 6 \times 10 = 60$ 이다.

<손풀이>

$$\text{급수자 수렴} \rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{a_n}{n} - \frac{3n+10}{n+2} \right) = 0 \rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{n} = 3 \rightarrow \text{공차} = 3$$

$$\therefore a_n = 3n + l \text{ 이라 하자}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{a_n}{n} - \frac{3n+10}{n+2} \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{l}{n} - \frac{4}{n+2} \right)$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{l}{n} + \underbrace{\frac{4}{n} - \frac{4}{n+2}}_{\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{4}{n} - \frac{4}{n+2} \right) = \frac{4}{1} + \frac{4}{2} = 6} \right)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{l}{n} : \text{발산}$$

$$\therefore l = 4, C = 6$$

$$\therefore C \times a_2 = 60$$

31-10. ④

모든 실수 x 에 대하여

$$f'(x) = -x + \frac{a}{x} + b \ln x \text{ 이고,}$$

함수 $f(x)$ 가 $x=1$ 에서 극값을 가지므로

$$f'(1) = -1 + a = 0, a = 1 \text{ 이다.}$$

$$\text{이때 } f''(x) = -1 - \frac{1}{x^2} + \frac{b}{x} \text{ 이고,}$$

함수 $f(x)$ 는 $x=1$ 에서 극소이므로

$$f''(1) = -2 + b > 0 \text{ 이어야 한다.}$$

따라서 $b > 2$ 이고, 정수 b 의 최솟값은 3 이므로

$$a + b \geq 4 \text{ 이다.}$$

31-11. ⑤

$$v_x = -2t \cos t - (1-t^2) \sin t,$$

$$v_y = -2t \sin t + (1-t^2) \cos t$$

$$\text{이므로 } |v| = \sqrt{(v_x)^2 + (v_y)^2} = t^2 + 1 \text{ 이다.}$$

$$l_1 = \int_0^1 (t^2 + 1) dt = \frac{4}{3} \text{ 이므로}$$

$$l_2 = \int_1^a (t^2 + 1) dt = \frac{32}{3}, \frac{1}{3}a^3 + a - \frac{4}{3} = \frac{32}{3}$$

따라서 $a = 3$ 이다.

<손풀이>

$$x'(t) = -2t \cos t + (t^2 - 1) \sin t$$

$$y'(t) = -2t \sin t - (t^2 - 1) \cos t$$

$$\sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} = \sqrt{4t^2 + (t^2 - 1)^2} = |(t^2 - 1)| = t^2 + 1$$

$$8 = \frac{b_2}{b_1} = \frac{\int_1^a t^2 + 1 dt}{\int_0^1 t^2 + 1 dt} = \frac{\frac{a^3}{3} + a - \frac{1}{3} - 1}{\frac{4}{3}}$$

$$32 = a^3 + 3a - 4$$

$$a^3 + 3a - 36 = 0$$

$$(a-3)(a^2 + 3a + 12) = 0$$

$$a = 3$$

31-12. 32

(가) 조건에 의하여 $g(2) = 1$, $g(4) = 3$ 이다.

(나) 조건에 의하여

$$g'(2) = \frac{1}{f'(g(2))} = \frac{1}{f'(1)} = 2$$

$$g'(4) = \frac{1}{f'(g(4))} = \frac{1}{f'(3)} = 8 \text{이다.}$$

$$\int_2^4 g''(x) \left\{ g'(x) + \frac{1}{g'(x)} \right\} dx \text{에서}$$

$g'(x) = t$ 로 치환하면 $g''(x)dx = dt$ 이므로

$$\begin{aligned} \int_2^4 g''(x) \left\{ g'(x) + \frac{1}{g'(x)} \right\} dx &= \int_2^8 \left(t + \frac{1}{t} \right) dt \\ &= \left[\frac{1}{2} t^2 + \ln |t| \right]_2^8 \\ &= (32 + \ln 8) - (2 + \ln 2) \\ &= 30 + 2 \ln 2 \end{aligned}$$

따라서 $p = 30$, $q = 2$, $p + q = 32$ 이다.

<손풀이>

$$\begin{aligned} &\int_2^4 g''(x) g'(x) + \frac{g''(x)}{g'(x)} dx \\ &= \left[\frac{1}{2} (g'(x))^2 + \ln |g'(x)| \right]_2^4 \\ &= \frac{1}{2} \underbrace{(g'(4))^2}_8 - \frac{1}{2} \underbrace{(g'(2))^2}_2 + \ln |g'(4)| - \ln |g'(2)| \\ &= 32 - 2 + \ln 8 - \ln 2 \\ &= 30 + 2 \ln 2 \end{aligned}$$

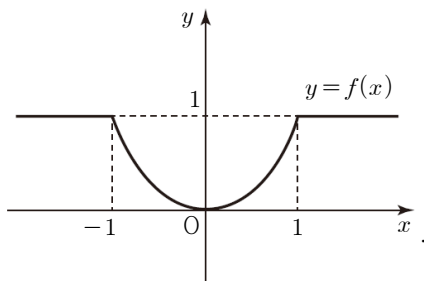
Day. 32

32-1. ②

$$\{f(x) - x^2\}\{f(x) - 1\} = 0 \text{ 이므로}$$

$$f(x) = x^2 \text{ 또는 } f(x) = 1 \text{ 이다.}$$

방정식 $f(x) = 0$ 은 실근을 갖고, 방정식 $f(x) = 2$ 는 실근을 갖지 않으므로 가능한 함수 $f(x)$ 의 그래프의 개형은 다음뿐이다.



$$\int_{-k}^k f(x) dx = 2 \times \int_0^k f(x) dx$$

$$= 2 \times \left\{ \int_0^1 f(x) dx + \int_1^k f(x) dx \right\} = \frac{11}{3}$$

$$\int_1^k f(x) dx = k - 1 = \frac{3}{2}, k = \frac{5}{2} \text{ 이다.}$$

32-2. ③

$$\lim_{x \rightarrow 0+} f\left(\frac{1}{x}\right) = \infty \text{ 에서 } \frac{1}{x} = t \text{ 로 치환하면}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(t) = \infty \text{ 이므로 함수 } f(x) \text{ 는 발산한다.}$$

(나. 조건의 극한이 수렴하므로 함수 $g(x)$ 역시 발산한다.

$$f(x) = 4x + a, g(x) = 3x + \frac{3a-6}{4} \text{의 형태가 다음 조건을}$$

만족시킨다.

$$\text{따라서 } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2f(x) - 3g(x)}{-3f(x) + 2g(x)} = \frac{8-9}{-12+6} = \frac{1}{6} \text{ 이다.}$$

<손풀이>

$$(가) \lim_{x \rightarrow 0+} f\left(\frac{1}{x}\right) = \lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \infty$$

$$(나) \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) \left\{ 3 - 4 \frac{g(x)}{f(x)} \right\} = 6$$

$\infty \times 0$

$$\rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{g(x)}{f(x)} = \frac{3}{4}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2 - \frac{3g}{f}}{-3 + \frac{2g}{f}} = \frac{2 - \frac{9}{4}}{-3 + \frac{3}{2}} = \frac{1}{6}$$

32-3. 31

$\angle CAB = \angle CAD = \theta$, 원 O 의 반지름을 R 이라 두면
삼각형 ABC , ACD 에서 사인법칙에 의해

$$\frac{\overline{BC}}{\sin \theta} = \frac{\overline{CD}}{\sin \theta} = 2R, \overline{BC} = \overline{CD} \text{ 이다.}$$

삼각형 ABC , ACD 에서 코사인법칙에 의해

$$\overline{BC}^2 = 2^2 + 6^2 - 2 \times 2 \times 6 \times \cos \theta,$$

$$\overline{CD}^2 = 4^2 + 6^2 - 2 \times 4 \times 6 \times \cos \theta \text{ 이므로}$$

$$\cos \theta = \frac{1}{2}, \theta = \frac{\pi}{3}, \overline{BC}^2 = 28 \text{ 이다.}$$

따라서

$$\frac{\overline{BC}}{\sin \theta} = \frac{\overline{CD}}{\sin \theta} = 2R \text{에 의해 } 2R = \frac{2\sqrt{7}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{4\sqrt{7}}{\sqrt{3}},$$

$$R = \frac{2\sqrt{7}}{\sqrt{3}}, S = \frac{28}{3}\pi \text{ 이다.}$$

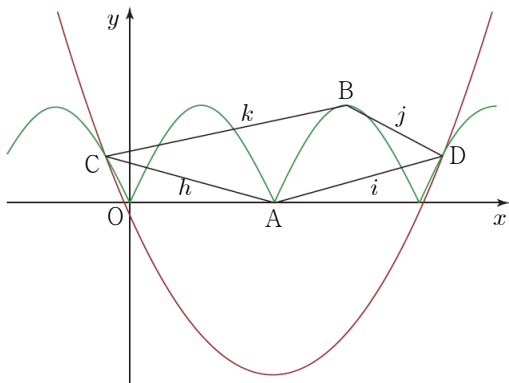
따라서 $p+q = 3+28 = 31$ 이다.

32-4. ②

두 곡선 $y = 4 \left| \sin \frac{\pi}{6} x \right|$ 와 $y = k(x-6)^2 - 7$ 은 모두

직선 $x = 6$ 에 대하여 대칭이므로

교점 역시 직선 $x = 6$ 에 대하여 대칭이다.



점 $C(t, k)$ 라 두면 점 $D(12-t, k)$ 이고,

사각형 $ACBD$ 의 넓이는 삼각형 ACD 와 삼각형 BCD 의 넓이의 합과 같으므로

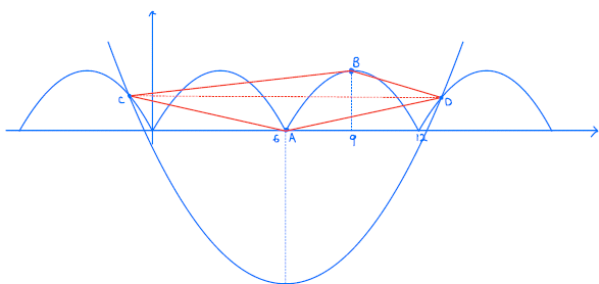
$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2} \times (12-2t) \times k + \frac{1}{2} \times (12-2t) \times (4-k) \\ &= 4(6-t) = 28 \end{aligned}$$

이므로 $t = -1$ 이다.

점 $C(-1, 2)$ 가 곡선 $y = k(x-6)^2 - 7$ 위의 점이므로

$$49k - 7 = 2, k = \frac{9}{49} \text{ 이다.}$$

<손풀이>



$$\square ABCD = \frac{1}{2} \overline{CD} \times h_1 + \frac{1}{2} \overline{CD} \times h_2$$

$$= \frac{1}{2} \overline{CD} (\underbrace{h_1 + h_2}_{=4}) = 2 \overline{CD}$$

$$\therefore \overline{CD} = 14 \rightarrow \text{C의 x좌표} = 6 - 7 = -1 \text{ (by } x=6 \text{ 대칭)}$$

$$\therefore C(-1, 2)$$

$$\therefore 49k - 7 = 2$$

$$\therefore k = \frac{9}{49}$$

32-5. ③

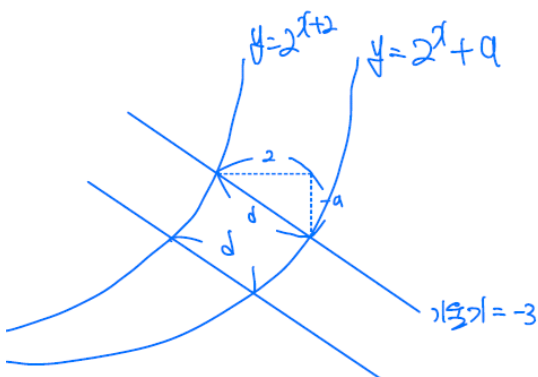
곡선 $y = 2^x + a$ 는 곡선 $y = 2^{x+2}$ 를 x 축의 방향으로 2, y 축의 방향으로 a 만큼 평행이동한 곡선이다.

이때 직선 $3x + y + k = 0$ 의 기울기가 -3 이므로

$$\frac{a}{2} = -3, \quad a = -6 \text{이다.}$$

이때 $d^2 = 2^2 + (-6)^2 = 40$ 이다.

<손풀이>



$$\therefore \frac{-a}{2} = -3 \rightarrow a = 6$$

$$d^2 = \left\{ \sqrt{4 + 36} \right\}^2 = 40$$

32-6. ①

$$g(x) = \begin{cases} f(x) & (f(x) \geq 0) \\ 0 & (f(x) < 0) \end{cases}$$

이고, 함수 $f(x)$ 가 $x = \pm 1$ 에서만 불연속이 될 수 있으므로
 $x = \pm 1$ 에서 함수 $g(x)$ 의 연속성을 살펴보면

$$\lim_{x \rightarrow -1-} g(x) = 3 \text{ 이므로 } \lim_{x \rightarrow -1+} g(x) = \lim_{x \rightarrow -1+} f(x) = 3a = 3$$

이므로 $a = 1$ 이다.

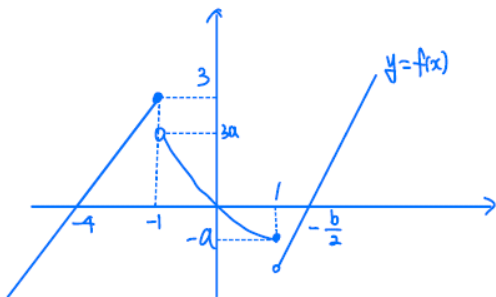
$$\lim_{x \rightarrow 1-} g(x) = 0 \text{ 이고 } \lim_{x \rightarrow 1+} f(x) = b + 2 \text{ 이므로}$$

$$b + 2 \leq 0, b \leq -2 \text{ 이다.}$$

$$\text{따라서 } a + b \leq 1 + (-2) = -1 \text{ 이다.}$$

<손풀이>

$$g(x) = \begin{cases} f(x) & f(x) \geq 0 \\ 0 & f(x) < 0 \end{cases}$$



$$g(x): x=-1 \text{ 연속} \rightarrow a=1$$

$$x=1 \text{ 연속} \rightarrow f(1) \leq 0 \rightarrow b \leq -2$$

$$\therefore a+b \leq -1$$

32-7. ①

$$a_5 = 20 \text{ 이므로}$$

$$a_4 = 16 \text{ 또는 } a_4 = 3 \text{ 이다.}$$

i) $a_4 = 16$ 인 경우

$$a_3 = 17, a_2 = 1 \text{ 또는 } a_2 = 18$$

이때 $a_2 = 1$ 인 a_1 의 값이 존재하지 않으므로 $a_2 = 18$

$$a_1 = 19$$

ii) $a_4 = 3$ 인 경우

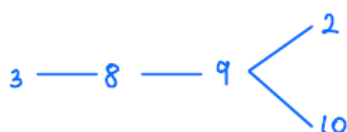
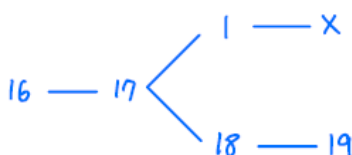
$$a_3 = 8, a_2 = 9$$

$$a_1 = 10 \text{ 또는 } a_1 = 2$$

i), ii)에 의하여 a_1 이 될 수 있는 값은 19, 10, 2 이므로

$$\text{모든 } a_1 \text{ 의 값의 합은 } 2 + 10 + 19 = 31$$

<손풀이>

 $a_4 \quad a_3 \quad a_2 \quad a_1$ 

$$\therefore a_1 \text{의 합} = 19 + 2 + 10 = 31$$

32-8. 35

조건 (가)에 의하여 $f(0) = 0$ 이므로 $f(x) = xh(x)$ 라 둘 수 있다.

따라서 모든 실수 x 에 대하여 $h(x) = f'(g(x))$ 이고,

조건 (다)에 의하여 $h(0) = 12$ 이다.

따라서 $h(x) = x^2 + ax + 12$, $f(x) = x(x^2 + ax + 12)$ 라 둘 수 있다.

이때 $f'(x) = 3x^2 + 2ax + 12$ 이므로

조건 (가)를 정리하여 계산하면

$x^2 + ax = 3\{g(x)\}^2 + 2ag(x)$ 를 얻는다.

이때 양변은 같은 식이므로 항등식의 성질에 의해 양변의 최솟값이 동일해야만 한다.

함수 $y = x^2 + ax$ 는 $x = -\frac{a}{2}$ 에서 최솟값 $-\frac{1}{4}a^2$ 을 가지고,

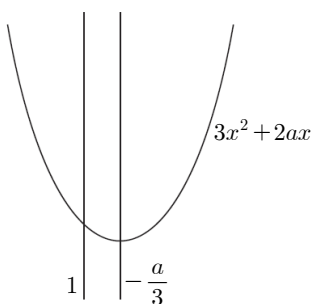
$1 \geq -\frac{a}{3}$ 일 때, 함수 $y = 3\{g(x)\}^2 + 2ag(x)$ 은

$g(x) = -\frac{a}{3}$ 인 x 의 값에서 최솟값 $-\frac{1}{3}a^2$ 을 가진다.

이때 두 식의 최솟값이 다르므로 $g(x) = -\frac{a}{3}$ 인 x 의 값은 존재하지 않고,

함수 $y = 3\{g(x)\}^2 + 2ag(x)$ 는 $g(x) = 1$ 일 때 최솟값

$2a + 3$ 을 가지고, $1 < -\frac{a}{3}$ 이어야 한다.



이때 두 함수의 최솟값이 동일하므로

$$-\frac{1}{4}a^2 = 2a + 3, \quad a = -2 \text{ 또는 } a = -6 \text{ 이다.}$$

이중 $1 < -\frac{a}{3}$ 을 만족시키는 a 의 값은 -6 뿐이다.

따라서 $f(x) = x(x^2 - 6x + 12)$, $f(5) = 5 \times 7 = 35$ 이다.

확률과 통계

32-9. ④

i) 각 바구니에 담긴 과자의 개수가 3, 1, 1인 경우

$${}_5C_3 \times {}_3H_2 = 60$$

ii) 각 바구니에 담긴 과자의 개수가 2, 2, 1인 경우

$$\left({}_5C_2 \times {}_3C_2 \times \frac{1}{2!}\right) \times {}_3H_2 = 90$$

따라서 구하는 경우의 수는 $60 + 90 = 150$

<손풀이>

다른 과자 4개를 1개 이상씩

3개로 나누고,

(1, 1, 3)

$${}_5C_3 \times {}_3H_2 = 60$$

(1, 2, 2)

$${}_5C_2 \times {}_3C_2 \times \frac{1}{2!} \times {}_3H_2 = 90$$

150

32-10. ④

i) 홀수 1개, 동일한 짝수 4개를 선택할 경우

$${}_4C_1 \times {}_3C_1 \times \frac{5!}{4!} = 60$$

ii) 홀수 1개, 서로 다른 짝수 2개를 2개씩 선택할 경우

$${}_4C_1 \times {}_3C_2 \times \frac{5!}{2! \times 2!} = 360$$

iii) 서로 다른 홀수 3개, 동일한 짝수 2개를 선택할 경우

$${}_4C_3 \times {}_3C_1 \times \frac{5!}{2!} = 720$$

따라서 만들 수 있는 모든 자연수의 개수는

$$60 + 360 + 720 = 1140$$

<손풀이>

홀수, 짝수

홀수, 짝수

1, 4

배열
 $4C_1 \times 5C_1 \times 3$

1, 2/2 $4C_1 \times 3C_2 \times \frac{5!}{2!2!}$

배열

3, 2 $4C_3 \times 3C_1 \times \frac{5!}{2!}$

배열

$$60 + 360 + 720$$

$$= 1140$$

32-11. ①

$$f(x) = P(10 - x^2 \leq X \leq 11)$$

$$= P\left(\frac{10 - x^2 - 10}{x} \leq Z \leq \frac{11 - 10}{x}\right)$$

$$= P\left(-x \leq Z \leq \frac{1}{x}\right)$$

$$= P(0 \leq Z \leq x) + P\left(0 \leq Z \leq \frac{1}{x}\right)$$

$$f\left(\frac{1}{x}\right) = P\left(0 \leq Z \leq \frac{1}{x}\right) + P(0 \leq Z \leq x) = f(x)$$

$$\therefore \sum_{n=1}^{10} f\left(\frac{1}{n}\right) - \sum_{n=1}^8 f(n+2)$$

$$= \sum_{n=1}^{10} f(n) - \sum_{n=3}^{10} f(n)$$

$$= f(1) + f(2)$$

$$= \{P(0 \leq Z \leq 1) + P(0 \leq Z \leq 1)\}$$

$$+ \left\{P(0 \leq Z \leq 2) + P\left(0 \leq Z \leq \frac{1}{2}\right)\right\}$$

$$= 2 \times 0.3413 + 0.4772 + 0.1915$$

$$= 1.3513$$

<손풀이>

$$f(x) = P(10 - x^2 \leq X \leq 11)$$

$$= P\left(-\frac{1}{x} \leq Z \leq x\right)$$

$$f(x) = f\left(\frac{1}{x}\right)$$

$$\therefore f\left(\frac{1}{n}\right) = f(n)$$

$$\sum_1^{10} f(n) - \sum_1^8 f(n+2) = f(1) + f(2)$$

$$p\left(-1 \leq z \leq 1\right) + p\left(-\frac{1}{2} \leq z \leq 2\right)$$

$$0.3413 \times 2 + 0.1915 + 0.4772$$

$$= \boxed{1.3513}$$

32-12. 118

i) 처음 뽑은 수가 1 또는 3일 경우

$$\frac{2}{7} \times \frac{{}_3C_1}{{}_6C_2} = \frac{2}{35}$$

ii) 처음 뽑은 수가 2일 경우

$$\frac{1}{7} \times \frac{{}_3C_2}{{}_6C_3} = \frac{3}{140}$$

iii) 처음 뽑은 수가 5 또는 7일 경우

$$\frac{2}{7} \times \frac{{}_2C_1}{{}_6C_2} = \frac{4}{105}$$

iv) 처음 뽑은 수가 6일 경우

$$\frac{1}{7} \times \frac{{}_2C_2}{{}_6C_3} = \frac{1}{140}$$

따라서 구하는 확률은

$$\frac{2}{35} + \frac{3}{140} + \frac{4}{105} + \frac{1}{140} = \frac{13}{105}$$

$$\therefore p+q=118$$

<손풀이>

만약 $\rightarrow$ 3개

② $\rightarrow (456)$
 (457)
 (467)

⑥ $\rightarrow (467)$

$$\frac{1}{7} \left(\frac{3}{6C_3} + \frac{1}{6C_3} \right) = \underline{\underline{\frac{1}{35}}}$$

풀이 → 2개

$$\frac{1}{5} \left(\frac{3+3+2+2}{6C_2} \right) = \frac{10}{105}$$

1/3 (4.5)
(4.6)
(4.7)

5 (4.6
4.7)

7 (4.5
4.6)

$$\boxed{\frac{13}{105}}$$

$$P+Q = \boxed{116}$$

미적분

32-9. ③

$$\tan \alpha = \frac{3}{4}, \tan \beta = -\frac{4}{3} \text{ 이므로}$$

$$\tan(\alpha + \beta) = \frac{\frac{3}{4} - \frac{4}{3}}{1 - \frac{3}{4} \times \left(-\frac{4}{3}\right)} = -\frac{7}{24}$$

32-10. ①

$$a_1 = 1, a_2 = 2, a_3 = 3, a_4 = 6, a_5 = 3, a_6 = 6, \dots \text{이므로}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(b_n - \sum_{k=1}^n \frac{a_k}{2^k} \right) = 100 \text{에서 극한의 성질에 의하여}$$

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} b_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{a_k}{2^k} \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{8} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{6}{16} \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 2 \end{aligned}$$

<손풀이>

$$a_1 = 1 \rightarrow a_2 = 2 \rightarrow a_3 = 3 \rightarrow a_4 = 6$$

$$\rightarrow a_5 = 3 \rightarrow a_6 = 6$$

⋮

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(b_n - \sum_{k=1}^n \frac{a_k}{2^k} \right) = 0$$

$$\begin{aligned}
 \therefore \lim_{n \rightarrow \infty} b_n &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{2^n} \\
 &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{3}{8} + \frac{6}{16} + \frac{3}{32} + \frac{6}{64} + \dots \\
 &= 1 + \frac{\frac{3}{8}}{1 - \frac{1}{4}} + \frac{\frac{6}{16}}{1 - \frac{1}{4}} \\
 &= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 2
 \end{aligned}$$

32-11. ②

조건 (가)에 의해

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x)}{x-2} = 0 \text{ 이므로 } f(2) = 0, f'(2) = 0 \text{ 이고,}$$

 $f(x) = a(e^x - e^2)^2$ 이다. 조건 (나)에 의해

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} a(e^x - e^2)^2 = ae^4 = 1 \text{ 이므로 } a = e^{-4} \text{ 이다.}$$

$$\text{따라서 } f(x) = \frac{1}{e^4} (e^x - e^2)^2 = e^{2x-4} - 2e^{x-2} + 1 \text{ 이고,}$$

$$f(2 + \ln 2) = 1 \text{ 이므로}$$

$$\begin{aligned}
 &\int_2^{2+\ln 3} |f(x) - 1| dx \\
 &= \int_2^{2+\ln 2} (1 - f(x)) dx + \int_{2+\ln 2}^{2+\ln 3} (f(x) - 1) dx \\
 &= \int_2^{2+\ln 2} (2e^{x-2} - e^{2x-4}) dx + \int_{2+\ln 2}^{2+\ln 3} (e^{2x-4} - 2e^{x-2}) dx \\
 &= \left[2e^{x-2} - \frac{1}{2}e^{2x-4} \right]_2^{2+\ln 2} + \left[\frac{1}{2}e^{2x-4} - 2e^{x-2} \right]_{2+\ln 2}^{2+\ln 3} \\
 &= (4 - 2) - \left(2 - \frac{1}{2} \right) + \left(\frac{9}{2} - 6 \right) - (2 - 4) = 1 \text{ 이다.}
 \end{aligned}$$

<손풀이>

$$(가) f(2) = f'(2) = 0 \rightarrow f(x) = a(e^x - e^2)^2$$

$$(나) \lim_{x \rightarrow -\infty} a(e^x - e^2)^2 = a(0 - e^2)^2 = ae^4 = 1 \rightarrow a = \frac{1}{e^4}$$

$$\begin{aligned}
 \therefore &\int_2^{2+\ln 3} |f(x) - 1| dx \\
 &= \int_2^{2+\ln 2} |e^{2x-4} - 2e^{x-2}| dx \\
 &= \int_2^{2+\ln 2} -e^{2x-4} + 2e^{x-2} dx + \int_{2+\ln 2}^{2+\ln 3} e^{2x-4} - 2e^{x-2} dx \\
 &= 1
 \end{aligned}$$

33-3. ④

함수 $\int_1^x f(t)dt$ 는 최고차항의 계수가 $\frac{1}{3}$ 인 삼차함수이고,

조건 (가)를 만족시키려면

$$\int_1^x f(t)dt = \frac{1}{3}(x-1)^2(x-a) \quad (a > 1) \text{ 이라 둘 수 있다.}$$

$$\int_1^2 |f(x)|dx = -\int_1^2 f(x)dx = \frac{2}{3} \text{ 이므로 } a=4 \text{ 이다.}$$

따라서 $f(x) = (x-1)(x-3)$ 이고, $f(6) = 15$ 이다.

33-4. ③

$A\left(\frac{\pi}{2b}, a\right), B\left(\frac{3\pi}{2b}, -a\right)$ 이고, 두 직선 OA 와 OB가

수직이므로 두 기울기의 곱 $2ab \times \left(-\frac{2ab}{3}\right) \times \frac{1}{\pi^2} = -1$,

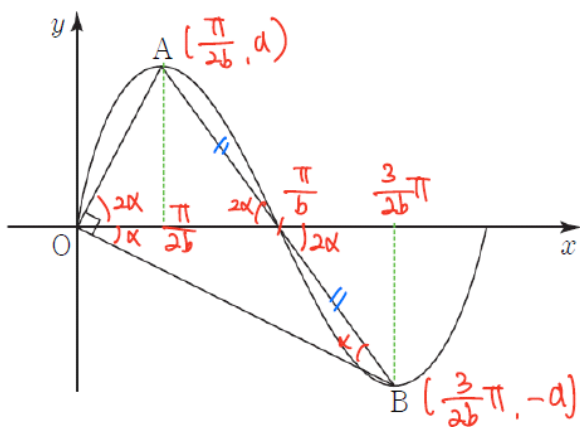
$$ab = \frac{\sqrt{3}}{2} \pi \text{ 이다.}$$

삼각형 OAB의 넓이는 $\frac{1}{2} \times \frac{\pi}{b} \times 2a = \frac{a}{b} \pi = 2\sqrt{3}$ 이므로

$a = \sqrt{3}, b = \frac{\pi}{2}$ 이고, $f(x) = \sqrt{3} \sin \frac{1}{2} \pi x$ 이다.

$$\sum_{n=1}^{10} f(4n-3) = f(1) + f(5) + \dots + f(37) = 10\sqrt{3} \text{ 이다.}$$

<손풀이>



$$\triangle OAB = 2\sqrt{3} \rightarrow \frac{1}{2} \times \frac{\pi}{b} \times a = 2\sqrt{3}$$

$$\angle AOB = \frac{\pi}{2} \rightarrow \alpha = \frac{\pi}{6} \rightarrow \frac{a}{\frac{\pi}{2b}} = \tan \frac{\pi}{3}$$

$$\therefore 2ab = \sqrt{3} \pi$$

33-5. ③

$f_n(a)$ 의 값은 n 의 홀짝, a 의 양음에 따라 변하므로 순서쌍으로 나타내면 다음과 같다.

$$(\text{홀수}, \text{양수}) = 1, (\text{홀수}, \text{음수}) = 1, (\text{홀수}, 0) = 1$$

$$(\text{짝수}, \text{양수}) = 2, (\text{짝수}, \text{음수}) = 0, (\text{짝수}, 0) = 1$$

k 가 홀수라면 $f_k(b)$ 와 $f_{k+2}(f_{k+1}(f_k(b)))$ 모두 1이므로
모순이다.

따라서 k 는 짝수이다.

이때 b 가 양수라면

$$f_k(b) = 2, f_{k+1}(f_k(b)) = 1, f_{k+2}(f_{k+1}(f_k(b))) = 2 \text{ 이므로}$$

모순이고,

b 가 0이라면

$$f_k(b) = 1, f_{k+1}(f_k(b)) = 1 \text{ 이므로 모순이다.}$$

b 가 음수라면

$$f_k(b) = 0, f_{k+1}(f_k(b)) = 1, f_{k+2}(f_{k+1}(f_k(b))) = 2 \text{ 이므로}$$

조건을 만족시킨다.

따라서 b 는 음수이다.

$$f_k(-b) + f_{k+1}(b) + f_{k+2}(|b| + b) = 2 + 1 + 1 = 4$$

<손풀이>

$$f_n(a) = \begin{cases} 1 & (n = \text{홀수}) \\ 2 & a > 0 \\ 1 & a = 0 \quad (n = \text{짝수}) \\ 0 & a < 0 \end{cases}$$

$$k = \text{홀수} \rightarrow f_k(b) = 1, f_{k+2}(\Delta) = 1 \rightarrow \text{모순}$$

$$k = \text{짝수} \rightarrow f_{k+1}(f_k(b)) = 1$$

$$\therefore \underline{f_k(b) = 0} \text{ and } \underline{f_{k+2}(f_{k+1}(f_k(b))) = 2}$$

양수

$$\therefore k = \text{짝수}, b < 0$$

$$\therefore f_k(-b) = 2, f_{k+1}(b) = 1, f_{k+2}(\underline{|b| + b}) = 1$$

≈ 0

33-6. ③

$$\text{속도 } v(t) = t^2 + 2at + b$$

$$\text{가속도 } a(t) = 2t + 2a$$

조건 (가)에 의하여

$$v(2) = 4a + b + 4 = 15, 4a + b = 11 \quad \dots \textcircled{1}$$

조건 (나)에 의하여

$$\text{방정식 } t^2 + 2at + b = 0 \text{의 두 근이 } t_1, t_2 \text{이다.}$$

$$\text{이때 } t_1 + t_2 = -2a > 0, t_1 \times t_2 = b > 0 \text{이므로}$$

$$|t_2 - t_1| = \sqrt{4a^2 - 4b} = 2 \quad \dots \textcircled{2}$$

①과 ②을 연립하여 계산하면

$$(a, b) = (2, 3) \text{ 또는 } (-6, 35) \text{ 인데}$$

$(a, b) = (2, 3)$ 인 경우 $t_1 + t_2 > 0$ 에 모순이다.

따라서 $t_1 + t_2 = 12$, $a(12) = 12$ 이다.

<손풀이>

$$V(t) = t^2 + 2at + b$$

$$(가) V(2) = 15 \rightarrow 4a + b = 11$$

$$(나) (t_2 - t_1)^2 = (t_2 + t_1)^2 - 4t_1t_2 \rightarrow 4a^2 - 4b = 4$$

$$\begin{cases} a = -6 \\ b = 35 \end{cases} \quad \begin{cases} a = 2 \\ b = 3 \end{cases}$$

$$t = t_1 + t_2 = -2a > 0 \rightarrow \therefore a = -6 \rightarrow \begin{cases} a = -6 \\ b = 25 \end{cases}$$

$$a(t) = x''(t) = 2t - 12$$

$$\therefore t = 12 \text{에서 } 가속도 = 12$$

33-7. 112

조건 (나)에 의하여 모든 자연수 n 에 대하여

$$a_{n+2} - a_{n+1} > a_{n+1} - a_n \text{ 이다.}$$

$$\text{이때 } a_{11} - a_1 = \sum_{k=1}^{10} (a_{k+1} - a_k) = 57 \text{ 이고,}$$

모든 자연수 k 에 대하여 $b_k = a_{k+1} - a_k$ 는 증가한다.

수열 $\{a_n\}$ 의 모든 항은 자연수이므로 $b_1 \geq 1$ 이고,

$b_{10} \geq 11$ 이다. 한편

$$57 = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 10 + 11 \text{인 경우에만}$$

$b_{10} \geq 11$ 을 만족시킨다.

따라서 $b_{10} = 11$, $b_{11} = 12$, $\dots$, $b_{14} = 15$ 인 경우에 a_{15} 의 값이 최소가 되고, 그때의

$$a_{15} = 58 + 12 + 13 + 14 + 15 = 112 \text{이다.}$$

<손풀이>

$$a_{n+2} + a_n > 2a_{n+1}$$

$$a_{n+2} - a_{n+1} > a_{n+1} - a_n : 차가 증가하는 수열$$

$$a_2 = 2 \rightarrow a_{11} \geq 1 + \sum_{k=1}^{10} k = 56 \rightarrow a_2 = 3 \rightarrow a_{11} > 58 : \text{또}$$

$$\therefore a_{11} = 58, a_{15} \text{의 최소값을 구해야 함}$$

$$\begin{array}{cccccccccccc} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 & a_6 & a_7 & a_8 & a_9 & a_{10} & a_{11} = 58 \\ \underbrace{\quad}_1 & \underbrace{\quad}_2 & \underbrace{\quad}_3 & \underbrace{\quad}_4 & \underbrace{\quad}_5 & \underbrace{\quad}_6 & \underbrace{\quad}_7 & \underbrace{\quad}_8 & \underbrace{\quad}_9 & \underbrace{\quad}_{10} & \underbrace{\quad}_{11} \end{array}$$

$$\therefore a_{15} \geq 58 + 12 + 13 + 14 + 15 = 112$$

33-8. ②

$$f(x) \leq \frac{(9-x)f(1) + (x-1)f(9)}{8} \text{ 는}$$

$$f(x) \leq \frac{(9-x)f(1) + (x-1)f(9)}{(9-x) + (x-1)} \text{ 와 동치이다.}$$

이때 점 $\left(x, \frac{(9-x)f(1) + (x-1)f(9)}{(9-x) + (x-1)}\right)$ 는 두 점

$(1, f(1))$ 과 $(9, f(9))$ 을 $x-1 : 9-x$ ($1 < x < 9$) 로
내분하는 점이고, $1 < x < 9$ 에서 삼차함수 $f(x)$ 가 두 점
 $(1, f(1))$ 과 $(9, f(9))$ 을 잇는 직선보다 아래쪽에 있을 때에
주어진 부등식이 성립한다.

두 점 $(1, f(1)), (9, f(9))$ 를 잇는 직선과 곡선 $f(x)$ 의 교점의
 x 좌표를 t 라 하면, 곡선 $f(x)$ 가 x 축과 만나는 세 점의 x 좌표의
합은 $k+20$ 이므로

$$1 + t + 9 = k + 20 \text{ 이고, } t = k - 8 \text{ 이다.}$$

따라서 부등식의 해는 $k-8 \leq x \leq 8$ 이고,

모든 자연수 x 의 합이 30 이므로

$$k-8=4, k=12 \text{ 이다.}$$

따라서

$$f(x) = (x-1)^2(x-12)$$

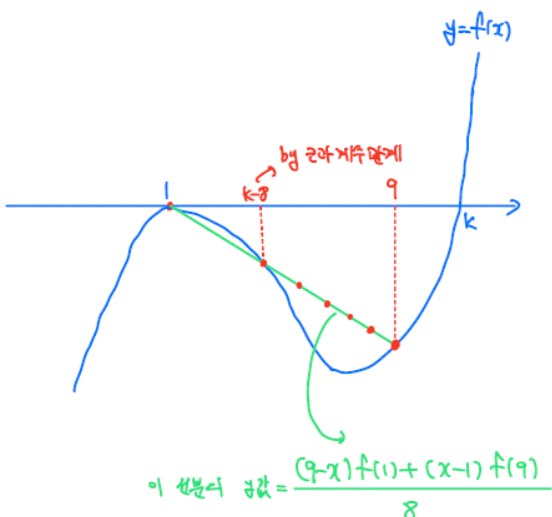
$$f'(x) = 2(x-1)(x-12) + (x-1)^2$$

$$\text{이므로 } f'(10) = 45 \text{ 이다.}$$

<손풀이>

$$\frac{(9-x)f(1) + (x-1)f(9)}{8} = \frac{(9-x)f(1) + (x-1)f(9)}{\underbrace{x-1 + 9-x}}$$

$f(1)$ 과 $f(9)$ 의 $1:9-x$ 내분점 ($by 1 < x < 9$)



$$\therefore k-8=4 \rightarrow k=12 \text{ (by 합이 30)}$$

$$\therefore f(x) = (x-1)^2(x-12)$$

확률과 통계



33-9. ⑤

i) 주사위를 던져 나온 수가 2인 경우

$$a=2, b=0$$

$$\frac{1}{6} \times \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{24}$$

ii) 주사위를 던져 나온 수가 4인 경우

$$a=3, b=1$$

$$\frac{1}{6} \times \frac{4!}{3!} \times \left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{1}{24}$$

iii) 주사위를 던져 나온 수가 6인 경우

$$a=4, b=2$$

$$\frac{1}{6} \times \frac{6!}{4! \times 2!} \times \left(\frac{1}{2}\right)^6 = \frac{5}{128}$$

$$\text{따라서 구하는 확률은 } \frac{1}{24} + \frac{1}{24} + \frac{5}{128} = \frac{47}{384}$$

<손풀이>

앞 뒤

$$a - b = 2$$

2	0	주사위 2
3	1	4
4	2	6

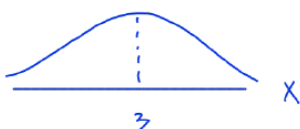
$$\frac{1}{6} \left(\left(\frac{1}{2}\right)^2 + {}_4C_3 \left(\frac{1}{2}\right)^4 + {}_6C_4 \left(\frac{1}{2}\right)^6 \right)$$

$$\frac{1}{6} \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{15}{64} \right) = \boxed{\frac{47}{384}}$$

33-10. 15

$$\begin{aligned} & \sum_{n=1}^5 \{(n^2 - 6n + 13)P(X \leq n)\} \\ &= 8 \times P(X \leq 1) + 5 \times P(X \leq 2) + 4 \times P(X \leq 3) \\ & \quad + 5 \times P(X \leq 4) + 8 \times P(X \leq 5) \\ &= 8\{P(X \leq 1) + P(X \leq 5)\} \\ & \quad + 5\{P(X \leq 2) + P(X \leq 4)\} + 4 \times P(X \leq 3) \\ &= 8 \times 1 + 5 \times 1 + 4 \times \frac{1}{2} = 15 \end{aligned}$$

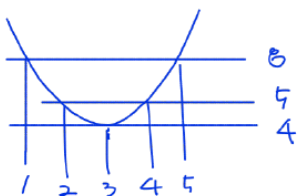
<손풀이>



$$n^2 - 6n + 9 + 4$$

$$(n-3)^2 + 4$$

대칭분할용.



$$\frac{8P(X \leq 1) + 5P(X \leq 2) + 4P(X \leq 3)}{8P(X \leq 5) + 5P(X \leq 4)}$$

$$8 + 5 + 2$$

$$= \boxed{15}$$

33-11. ②

i) 첫 시행 이후 주머니 A에 있는 검은 공이 3개인 경우

$$\left(\frac{3}{5} \times \frac{2}{5} + \frac{2}{5} \times \frac{3}{5}\right) \times \left(\frac{2}{5} \times \frac{2}{5}\right) = \frac{48}{625}$$

ii) 첫 시행 이후 주머니 A에 있는 검은 공이 4개인 경우

$$\left(\frac{2}{5} \times \frac{2}{5}\right) \times \left(\frac{4}{5} \times \frac{1}{5} + \frac{1}{5} \times \frac{4}{5}\right) = \frac{32}{625}$$

따라서 구하는 확률은 $\frac{48}{625} + \frac{32}{625} = \frac{16}{125}$

<손풀이>

1차		시행률		A B	
A	B			A	B
① 0	0	) 그대로 →	0	0	0
② 0	0			0	0
0 0 : 남은검2개 (4개)					
③ 0	0	A 4개 →		0	0
				0	0

$$\textcircled{1} \frac{2}{5} \times \frac{3}{5} \times \frac{2}{5} \times \frac{2}{5} = \frac{24}{625}$$

$$\textcircled{2} \frac{3}{5} \times \frac{2}{5} \times \frac{2}{5} \times \frac{2}{5} = \frac{24}{625}$$

$$\textcircled{3} \frac{2}{5} \times \frac{2}{5} \times \left(\frac{1}{5} \times \frac{4}{5} + \frac{4}{5} \times \frac{1}{5} \right) = \frac{32}{625}$$

$$\frac{80}{625} = \boxed{\frac{16}{125}}$$

33-12. 244

i) $a=0$ 인 경우 $b' = |b| - 1, c' = |c| - 1$ 이라 하면 b', c' 은 음이 아닌 정수이고 $4 \leq b' + c' \leq 5$ 이므로

$$({}_2H_4 + {}_2H_5) \times 2^2 = 44$$

 $(|x|=k > 0$ 일 때 가능한 x 는 $\pm k$ 로 2개이므로)ii) $a \neq 0$ 인 경우 $a' = |a| - 1, b' = |b| - 1, c' = |c| - 1$ 이라 하면 a', b', c' 는 음이 아닌 정수이고 $3 \leq a' + b' + c' \leq 4$ 이므로

$$({}_3H_3 + {}_3H_4) \times 2^3 = 200$$

따라서 구하는 경우의 수는 $44 + 200 = 244$

<손풀이>

$$\tau) |a| + |b| + |c| = 6$$

$$A + B + C = 6$$

$$A \neq 0 \quad A, B, C \geq 1$$

$${}_3H_3 \times 2^3 = 80$$

$$A = 0, \quad B, C \geq 1$$

$${}_2H_4 \times 2^2 = 20$$

$$\pi) |a| + |b| + |c| = 7$$

$$A + B + C = 7$$

$$A \neq 0 \quad A, B, C \geq 1$$

$${}_3H_4 \times 2^3 = 120$$

$$A = 0 \quad B, C \geq 1$$

$${}_2H_5 \times 2^2 = 24$$

$$100 + 144 = \boxed{244}$$

미적분

33-9. ①

$f(x)$ 가 증가함수이고, $f(1) = g(1)$ 이므로 $f(1) = 1$

$$f(1) = \ln(1+a) = 1, a = e - 1$$

$$f'(x) = \frac{e^{x-1}}{e^{x-1} + e - 1}$$

$$f'(1) = \frac{1}{e}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - g(x)}{x - 1} &= f'(1) - g'(1) \\ &= f'(1) - \frac{1}{f'(1)} \\ &= \frac{1}{e} - e \end{aligned}$$

$$\therefore b = \frac{1}{e} - e$$

$$\therefore a + b = \frac{1}{e} - 1 = \frac{1-e}{e}$$

<손풀이>

$$f'(x) = \frac{e^{x-1}}{e^{x-1} + a} > 0$$

$$x \rightarrow 1 \Rightarrow \text{분모} \rightarrow 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1} (f(x) - g(x)) = 0$$

$$\therefore f(1) = g(1) = 1 \quad (\text{by } f(x): \text{증가함수})$$

$$\therefore a = e - 1 \quad (\text{by } f(1) = 1)$$

$$b = f'(1) - g'(1) = f'(1) - \frac{1}{f'(1)}$$

$$= f'(1) - \frac{1}{f'(1)} = \frac{1}{e} - e$$

$$\therefore a + b = \frac{1}{e} - 1 = \frac{1-e}{e}$$

33-10. ⑤

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a(\sqrt{n^2 + 2bn} - n) = 8 \text{에서}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2bn \times a}{\sqrt{n^2 + 2bn} + n} = 8 \text{ 이므로 } ab = 8 \text{이다.}$$

이를 만족시키는 자연수 a, b 의 순서쌍 (a, b) 는 $(a, b) = (1, 8), (2, 4), (4, 2), (8, 1)$ 뿐이다.

i) $a=1$ 인 경우

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(ab)^{n+1} + a^{n+1}}{(ab)^n + b^n} = 4$$

ii) $b=1$ 인 경우

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(ab)^{n+1} + a^{n+1}}{(ab)^n + b^n} = 16$$

iii) $a \neq 1, b \neq 1$ 인 경우

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(ab)^{n+1} + a^{n+1}}{(ab)^n + b^n} = 8$$

따라서 $M=16, m=4, M+m=20$ 이다.**33-11. ①**
 $\int_0^1 g(nx) dx = f(n)$ 에서 $nx=t$ 로 치환하면

$$\int_0^1 g(nx) dx = \frac{1}{n} \int_0^n g(t) dt \text{ 이므로}$$

모든 자연수 n 에 대하여 $\int_0^n g(x) dx = nf(n)$ 이다.함수 $h(x)=xf(x)$ 라 두면함수 $h(x)$ 는 최고차항의 계수가 1인 삼차함수이고

$$\int_1^3 g(x) dx = 0, \int_3^5 g(x) dx = 0 \text{에 의해}$$

$$h(1)=h(3)=h(5) \text{이다.}$$

따라서 $h(x)=(x-1)(x-3)(x-5)+C$ 라 둘 수 있고, $h(0)=0$ 에 의해 $C=15$ 이다.즉 $h(x)=x^3-9x^2+23x, f(x)=x^2-9x+23$ 이다.

$$\text{따라서 } \int_1^3 f(x) dx = \frac{56}{3} \text{이다.}$$

별해: $f(x)=x^2+ax+b$ 라 두고 연립방정식을 풀어도 된다.

<손풀이>

$$\int_0^1 g(nx) dx = \int_0^n g(t) \cdot \frac{1}{n} dt$$

$$\therefore \int_0^n g(t) dt = nf(n)$$

$$\therefore \int_1^3 g(x) dx = 0 \rightarrow 3f(3) - 1 \times f(1) = 0 \rightarrow 3f(3) = f(1)$$

$$\int_3^5 g(x) dx = 0 \rightarrow 5f(5) - 3f(3) = 0 \rightarrow 5f(5) = 3f(3)$$

$$\therefore 1 \times f(1) = 3f(3) = 5f(5)$$

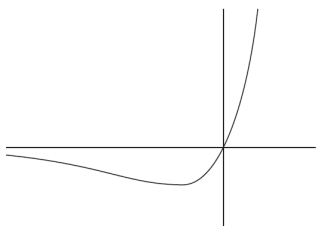
$$\therefore f(x) = (x-1)(x-3)(x-5) + l \quad \rightarrow l=15 \text{ (by 상수항=0)}$$

$$\therefore f(x) = x^2 - 9x + 23$$

$$\therefore \int_1^3 f(x) dx = \frac{56}{3}$$

33-12. ③

함수 $y = xe^x$ 의 그래프의 개형은 다음과 같다.



직선의 기울기 a 가 음이 아닌 실수로 고정되어 있기 때문에 직선 $y = ax + b$ 가 곡선 $y = xe^x$ 와 접할 때 실수 b 의 값이 최대가 되고, 이때 접점의 x 좌표를 t 라 두면

$$y' = (x+1)e^x \text{ 이므로}$$

곡선 $y = xe^x$ 위의 점 (t, te^t) 에서의 접선의 방정식은 $y = (t+1)e^t(x-t) + te^t$, 즉 $y = (t+1)e^tx - t^2e^t$ 이고, $a = (t+1)e^t$, $m(a) = -t^2e^t$ 이다.

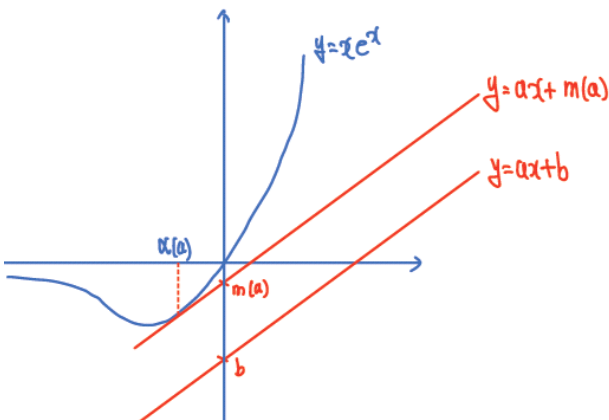
$$\frac{da}{dt} = (t+2)e^t, m'(a) \times \frac{da}{dt} = -(t^2+2t)e^t \text{ 이므로}$$

$$m'(a) = -t \text{ 이다.}$$

곡선 $y = m(x)$ 위의 점 $(2e, m(2e))$ 에서의 접선의 기울기는 $m'(2e) = -1$ 이고, $m(2e) = -e$ 이므로

따라서 접선의 방정식은 $y = -(x-2e) - e = -x + e$ 이고, 접선의 y 절편은 e 이다.

<손풀이>



$$\begin{aligned} \begin{cases} ae^a = a \cdot a + m(a) \Rightarrow m(a) = ae^a - a^2 \\ (a+1)e^a = a \end{cases} & \Rightarrow \begin{aligned} &= a \{ e^a - a \} \\ &= -\{a\}^2 e^a \end{aligned} \\ \Rightarrow (a+2)e^a \cdot a'(a) &= 1 \end{aligned}$$

$$\textcircled{1} \{a(2e)+1\}e^{2e} = 2e \rightarrow a(2e) = -1$$

$$m(2e) = -\{a(2e)\}^2 e^{2e} = -e$$

$$\textcircled{2} \{x(2e)+2\}e^{x(2e)} \cdot x'(2e)=1 \rightarrow x'(2e)=\frac{1}{3e}$$

$$m'(a)=-\{x(a)^2+2x(a)\}e^{x(a)} \cdot x'(a)$$

$$m'(2e)=-3e \cdot \frac{1}{3e}=-1$$

$$\therefore y=m'(2e)(x-2e)+m(2e)$$

$$=-x+e$$

$$\therefore y\text{절편} = e$$