

백일대장

수능 역전을 위한 백일 전략서

04

정답 및 해설

Day. 22

수학1, 수학2



22-1. ③

$$\log_3 a^6 = \log_{\sqrt{3}} \frac{b}{a} \text{에서 } \log_3 a^6 = \log_3 \frac{b^2}{a^2}$$

$$\text{따라서 } a^6 = \frac{b^2}{a^2} \text{ 이고 } a^8 = b^2 \text{에서 } b = a^4$$

($b > 1$ 이므로 b 는 양수)

$$\therefore (\log_5 a)(\log_b 25) = 2 \times \log_5 a \times \log_b 5 = 2 \log_b a = \frac{1}{2}$$

22-2. ②

$f(x)$ 는 최고차항의 계수가 1인 이차함수이므로

$$f(x) = x^2 + ax + b \text{라고 하자.}$$

$g(x)$ 는 $x = -1, 1$ 에서만 불연속이고

함수 $\{f(x) - g(x)\}^2$ 는 모든 실수 x 에 대하여 연속이므로
 $x = -1, 1$ 에서 연속임을 이용해 a, b 의 값을 구하면 된다.

$\{f(x) - g(x)\}^2$ 이 $x = -1, 1$ 에서 연속이려면

함수 $f(x) - g(x)$ 이 $x = -1, 1$ 에서 좌극한, 우극한, 함수값의
 절댓값이 같으면 된다.

$$\begin{aligned} & \lim_{x \rightarrow -1+} \{f(x) - g(x)\} \\ &= \lim_{x \rightarrow -1+} \{(x^2 + ax + b) - (x + 1)\} = 1 - a + b \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \lim_{x \rightarrow -1-} \{f(x) - g(x)\} \\ &= f(-1) - g(-1) = (1 - a + b) - (5 + 1) = -a + b - 5 \\ & \therefore |1 - a + b| = |-a + b - 5| \end{aligned}$$

$$\text{정리하면 } -(1 - a + b) = -a + b - 5, \quad a - b = -2$$

$$\lim_{x \rightarrow 1-} \{f(x) - g(x)\} = \lim_{x \rightarrow 1-} \{(x^2 + ax + b) - (x + 1)\} = a + b - 1$$

$$\begin{aligned} & \lim_{x \rightarrow 1+} \{f(x) - g(x)\} \\ &= f(1) - g(1) = (1 + a + b) - (5 - 1) = a + b - 3 \\ & \therefore |a + b - 1| = |a + b - 3| \end{aligned}$$

$$\text{정리하면 } -(a + b - 1) = a + b - 3, \quad a + b = 2$$

$$a - b = -2 \text{와 } a + b = 2 \text{를 연립하면 } a = 0, \quad b = 2$$

$$\therefore f(x) = x^2 + 2, \quad f(2) = 6$$

22-3. ④

점 $(2, f(2))$ 에서의 함수 $f(x)$ 의 접선의 방정식은

$$y = 2x + b \text{ 이므로 } f'(2) = 2, \quad f(2) = b + 4$$

(가)의 양변을 미분하면 $f'(x) + 2g(x) + 2xg'(x) = 0$ 이므로

$$f'(2) + 2g(2) + 4g'(2) = 0 \quad \dots \textcircled{㉠}$$

$$\text{또한 조건 (나)에서 } f(2) = 2g(2) \quad \dots \textcircled{㉡}$$

$$f'(2) - 2g'(2) = 4 \quad \dots \textcircled{D}$$

이때 $f'(2) = 2$ 이므로 $\textcircled{D}$ 에 대입하면 $g'(2) = -1$ 이고 이를 $\textcircled{C}$ 에 대입하면 $g(2) = 1$

이를 $\textcircled{A}$ 에 대입하면 $f(2) = 2$

$$\therefore f(2) = 2, g(2) = 1, f'(2) = 2, g'(2) = -1$$

$$a = f(2) + 4g(2) = 6$$

$$b = -4 + f(2) = -2$$

$$\therefore a + b = 4$$

22-4. ②

$y = 2^x + b$, $y = \log_2(x - b)$ 는 서로 역함수 관계이므로

$y = x$ 대칭

이때, 직선 AB의 기울기가 -1 이므로 점 A와 점 B도 $y = x$ 대칭

따라서 점 A의 좌표를 $(2, k)$ 로 놓으면 점 B의 좌표는 $(k, 2)$ 로 놓을 수 있다.

이 두 점 A, B가 함수 $y = -\frac{1}{8}x^2 + a$ 위에 있으므로 대입하면

$$k = -\frac{1}{8}2^2 + a, 2 = -\frac{1}{8}k^2 + a \text{이고 연립하면}$$

$$a^2 - 9a + \frac{65}{4} = 0 \text{이므로 } a = \frac{13}{2} \text{ or } \frac{5}{2}$$

이때, $a = \frac{13}{2}$ 인 경우 $k = 6$ 이고 $a = \frac{5}{2}$ 인 경우 $k = 2$ 인데

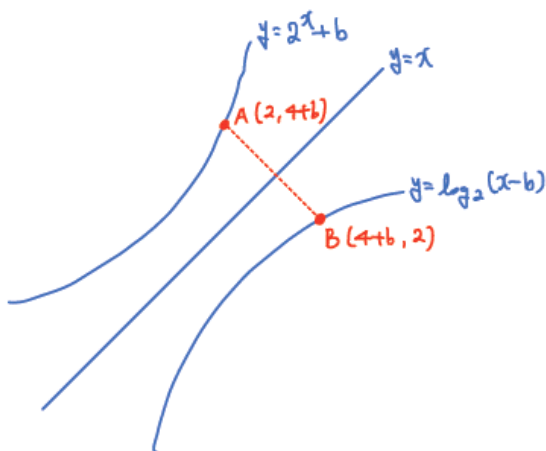
$k = 2$ 이면 $2 = 2^2 + b$, $b = -2$ 이므로 $b > 0$ 이라는 조건에 모순

$$\therefore a = \frac{13}{2}, k = 6$$

점 A는 $y = 2^x + b$ 위의 점이므로 $6 = 2^2 + b$, $b = 2$

$$\therefore a + b = \frac{17}{2}$$

<손풀이>



A, B는 $y = -\frac{1}{8}x^2 + a$ 위의 점
 $\hookrightarrow$ 직선 AB: $y = -x + 6 + b$

$$\therefore -\frac{1}{8}x^2 + a = -x + 6 + b$$

$$x^2 - 8x - 8(a - 6 - b) = 0$$

$$\therefore Ax + Bx = 6 + b = 8$$

$$\therefore b = 2 \longrightarrow A(2, 6) \longrightarrow a = \frac{13}{2}$$

$$\therefore a + b = \frac{17}{2}$$

22-5. 9

조건 (가)에 따라

$$a_{3n-2} + a_{3n-1} + a_{3n} = (\sqrt{2})^{n-1}(a_1 + a_2 + a_3)$$

이라고 표현할 수 있다.

$$\text{이때 } n=4 \text{인 경우 } a_{10} + a_{11} + a_{12} = (\sqrt{2})^3(a_1 + a_2 + a_3)$$

조건 (나)에 따라 $a_{10} + a_{11} + a_{12} = 0$ 이므로

$$a_1 + a_2 + a_3 = 0 \text{이고 } a_{3n-2} + a_{3n-1} + a_{3n} = 0$$

$$\sum_{n=10}^{20} a_n = -72 \text{에서 양변에 } a_{21} \text{을 더하면 } 0 = -72 + a_{21}$$

$$\therefore a_{21} = 72$$

$$a_{21} = a_3 \times (\sqrt{2})^6 \text{이므로 } a_3 = 9$$

22-6. 4

$$g(x) = \int_3^x \{f(x) - f(t)\} \times \{f(t)\}^2 dt$$

$$= f(x) \int_3^x \{f(t)\}^2 dt - \int_3^x \{f(t)\}^3 dt$$

이므로 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$g'(x) = f'(x) \int_3^x \{f(t)\}^2 dt + f(x) \{f(x)\}^2 - \{f(x)\}^3$$

$$= f'(x) \int_3^x \{f(t)\}^2 dt$$

함수 $g(x)$ 가 오직 하나의 극값을 가지려면 함수 $g'(x)$ 의 부호가 오직 한 번 바뀌어야 한다. ... ㉠

$$\text{이때 } f(x) = x^3 - \frac{3}{2}(a+1)x^2 + 3ax + 1 \text{에서}$$

$$f'(x) = 3x^2 - 3(a+1)x + 3a = 3(x-a)(x-1) \text{이므로}$$

함수 $f'(x)$ 의 부호는 $a=1$ 인 경우 바뀌지 않고 $a \neq 1$ 인 경우 $x=a$, $x=1$ 의 좌우에서 바뀐다.

$$\text{이때 } F(x) = \int_3^x \{f(t)\}^2 dt \text{라고 하면, 모든 실수 } t \text{에 대하여}$$

$$\{f(t)\}^2 \geq 0 \text{이므로}$$

함수 $F(x)$ 는 실수 전체 집합에서 증가하는 함수이고, 방정식 $F(x) = 0$ 의 실근은 $x=3$ 뿐이므로

함수 $F(x)$ 의 부호는 $x=3$ 의 좌우에서만 바뀐다.

따라서 ㉠을 만족시키려면 $a=1$ or $a=3$ 이어야 한다.

$$\therefore 1+3=4$$

22-7. 54

방정식 $2a \tan bx = 4a \sin bx$ 는 $2a \frac{\sin bx}{\cos bx} = 4a \sin bx$ 이고

정리하면 $\sin bx = 0$ or $\cos bx = \frac{1}{2}$ 이므로

$0 < x < \frac{5\pi}{2b}$ 의 범위에서 $\sin bx = 0$ 을 만족시키는 x 값은

$$x = \frac{\pi}{b}, x = \frac{2\pi}{b} \text{이고}$$

$\cos bx = \frac{1}{2}$ 을 만족시키는 x 값은

$$x = \frac{\pi}{3b}, x = \frac{5\pi}{3b}, x = \frac{7\pi}{3b}$$

따라서 점 A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 는 각각

$$\left(\frac{\pi}{3b}, 2\sqrt{3}a\right), \left(\frac{\pi}{b}, 0\right), \left(\frac{5\pi}{3b}, -2\sqrt{3}a\right)$$

$$\left(\frac{2\pi}{b}, 0\right), \left(\frac{7\pi}{3b}, 2\sqrt{3}a\right)$$

이때 선분 A_1A_5 를 지름으로 하는 원의 넓이가 π 이므로

이 원의 반지름의 길이는 1이고

선분 A_1A_5 의 길이는 2

$$\therefore \frac{7\pi}{3b} - \frac{\pi}{3b} = \frac{6\pi}{3b} = 2, b = \pi$$

이 원의 중심을 M이라고 할 때 원이 점 A_3 를 지나므로 선분

MA_3 의 길이는 반지름의 길이와 같다. ... ㉠

$M\left(\frac{4\pi}{3\pi}, 2\sqrt{3}a\right)$ 이므로 ㉠에 따라 식을 세워보면

$$\sqrt{\left(\frac{4\pi}{3\pi} - \frac{5\pi}{3\pi}\right)^2 + (2\sqrt{3}a + 2\sqrt{3}a)^2} = \sqrt{\frac{1}{9} + 48a^2} = 1 \text{이고}$$

$$\text{정리하면 } a = \frac{1}{3\sqrt{6}}$$

$$\therefore \left(\frac{b}{a\pi}\right)^2 = 54$$

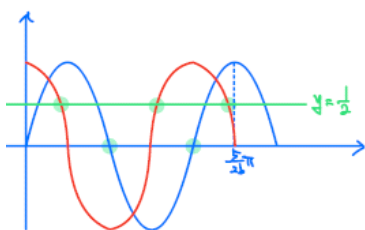
<손풀이>

$$2a \tan bx = 4a \sin bx$$

$$2a \sin bx = 4a \sin bx \cos bx$$

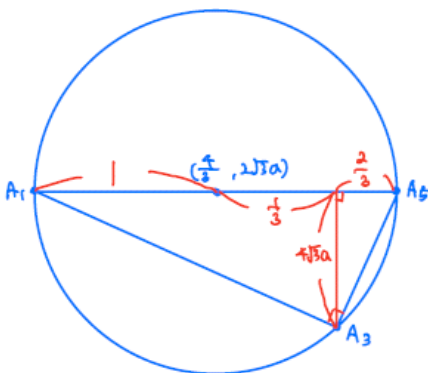
$$2a \sin bx \{1 - 2\cos bx\} = 0$$

$$\rightarrow \sin bx = 0 \text{ or } \cos bx = \frac{1}{2}$$



$$\therefore A_1\left(\frac{\pi}{12}, 2\sqrt{3}a\right), A_5\left(\frac{7\pi}{12}, 2\sqrt{3}a\right), A_3\left(\frac{5\pi}{12}, -2\sqrt{3}a\right)$$

$$\rightarrow \frac{b}{a\pi} = 1 \rightarrow \therefore \frac{b}{a} = 1 \rightarrow b = \pi$$



$$(4\sqrt{3}a)^2 = \left(1 + \frac{1}{3}\right) \times \left(\frac{2}{3}\right) \rightarrow a^2 = \frac{1}{54}$$

$$\therefore \left(\frac{b}{a\pi}\right)^2 = 54$$

22-8. 14

$p(x) = |f(x)|$ 라고 하면

$$g(x) = \lim_{h \rightarrow 0+} \frac{|f(x+h)| - |f(x)|}{h} = \lim_{h \rightarrow 0+} \frac{p(x+h) - p(x)}{h}$$

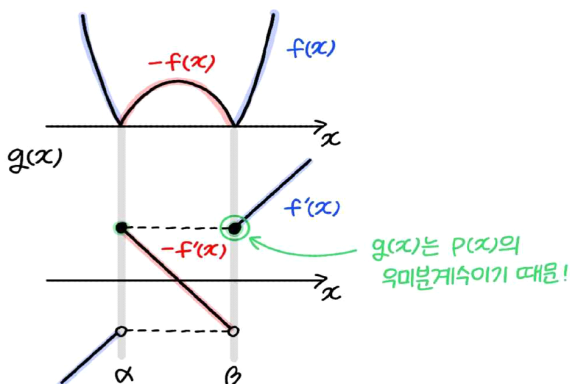
라고 표현할 수 있고

따라서 함수 $g(x)$ 는 함수 $p(x)$ 의 우미분계수를 나타낸다는 것을 알 수 있다.

그림으로 표현해 보면 다음과 같다.

(이때, 이차함수 $f(x)$ 의 최고차항 계수는 양수이고 조건 (가)에 따라 $f(4) = -1$, 즉 $f(x) < 0$ 인 부분이 존재하므로 함수 $f(x)$ 는 서로 다른 두 실근을 갖는다. 서로 다른 두 실근은 각각 α, β 로 표현)

$$P(x) = |f(x)|$$



조건 (나)에 의해 α 또는 β 의 값이 3인데 $\beta = 3$ 인 경우

$f(4) = -1$ 에 모순이므로 $\alpha = 3$

$g(3) = -\lim_{x \rightarrow 3^-} g(x)$ 이므로 조건 (나)에 의해

$$g(3) = 3 = -f'(3)$$

$$\therefore f'(3) = -3$$

따라서 $f(x) = a(x - \beta)(x - 3)$ 이라고 하면,

$f'(3) = -3$ 이므로 $a(3 - \beta) = -3$ 이고 $f(4) = -1$ 에서

$$a(4 - \beta) = -1$$

$\frac{3 - \beta}{4 - \beta} = 3$ 에서 $\beta = \frac{9}{2}$ 이고 이를 위 식에 대입하면 $a = 2$ 이므로

$$f(x) = 2(x - 3)\left(x - \frac{9}{2}\right)$$

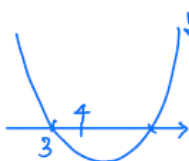
$$\therefore f(1) = 14$$

<손풀이>

$$\text{Let } z(x) = |f(x)|$$

$$g(x) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{z(x+h) - z(x)}{h}$$

$$= z'(x)$$



$$\Rightarrow g(3) = -f'(3)$$

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} g(x) = f'(3)$$

$$\Rightarrow f'(3) = -3 \quad (\text{by (a)})$$

$$\therefore f(x) - (-3x + 9) = k(x - 3)^2$$

$$\therefore f(x) = 2(x - 3)^2 - 3x + 9$$

$$f(1) = 8 + 6 = 14$$

확률과 통계



22-9. ③

주머니 A, B, C, D, E에 들어가는 공의 개수를

각각 a, b, c, d, e 라 할 때,

$$a = b \text{ 이므로 } 2a + c + d + e = 6$$

$$a = 0 \text{ 일 때, } {}_3H_6 = {}_8C_6 = 28$$

$$a = 1 \text{ 일 때, } {}_3H_4 = {}_6C_4 = 15$$

$$a = 2 \text{ 일 때, } {}_3H_2 = {}_4C_2 = 6$$

$$a = 3 \text{ 일 때, } 1$$

$$\therefore \text{ 모든 경우의 수는 } 28 + 15 + 6 + 1 = 50$$

22-10. ③

남학생 2명과 여학생 5명이 3인용 의자와 4인용 의자에 앉는 경우의 수는 $7! = 5040$

또한, 확률변수 X 가 가질 수 있는 값은 2, 3, 4이므로

$$P(X=2) = \frac{{}_5C_2 \times {}_2C_2 \times 4! \times 3!}{5040} = \frac{2}{7}$$

$$P(X=3) = \frac{{}_5C_3 \times {}_2C_1 \times 4! \times 3!}{5040} = \frac{4}{7}$$

$$P(X=4) = \frac{{}_5C_4 \times {}_2C_0 \times 4! \times 3!}{5040} = \frac{1}{7}$$

X	2	3	4	합계
$P(X=x)$	$\frac{2}{7}$	$\frac{4}{7}$	$\frac{1}{7}$	1

$$\text{따라서 } E(X) = 2 \times \frac{2}{7} + 3 \times \frac{4}{7} + 4 \times \frac{1}{7} = \frac{20}{7}$$

$$\therefore E(7X+2) = 7E(X) + 2 = 22$$

22-11. ③

(주머니에서 꺼낸 2개의 공 중에서 적어도 한 개가 검은 공일 확률)

$= 1 - (\text{주머니에서 꺼낸 2개의 공이 전부 흰 공일 확률})$ 이므로
먼저, 주머니에서 꺼낸 2개의 공이 전부 흰 공일 확률을 구해보면 다음과 같다.

주사위를 한 번 던져서 나온 눈의 수가 3의 배수인 경우

$$\text{주머니에서 꺼낸 2개의 공이 전부 흰 공일 확률은 } \frac{2}{6} \times \frac{1}{4C_2}$$

이고

주사위를 한 번 던져서 나온 눈의 수가 3의 배수가 아닌 경우

$$\text{주머니에서 꺼낸 2개의 공이 전부 흰 공일 확률은 } \frac{4}{6} \times \frac{{}_3C_2}{5C_2}$$

따라서 주머니에서 꺼낸 2개의 공이 전부 흰 공일 확률은

$$\frac{2}{6} \times \frac{1}{4C_2} + \frac{4}{6} \times \frac{{}_3C_2}{5C_2} = \frac{1}{18} + \frac{1}{5} = \frac{23}{90}$$

$$\therefore (\text{주머니에서 꺼낸 2개의 공 중에서 적어도 한 개가 검은 공일 확률}) = 1 - \frac{23}{90} = \frac{67}{90}$$

확률)

$= 1 - (\text{주머니에서 꺼낸 2개의 공이 전부 흰 공일 확률})$

$$= 1 - \frac{23}{90} = \frac{67}{90}$$

<손풀이>

3의 배수 $\frac{1}{3} : A$

3의 배수 $\frac{2}{3} : B$

$$\frac{1}{3} \left(1 - \frac{1}{4C_2} \right) + \frac{2}{3} \left(1 - \frac{2C_2}{5C_2} \right)$$

0744건 활용.

$$\begin{aligned} \frac{1}{3} \times \frac{5}{6} + \frac{2}{3} \times \frac{7}{10} &= \frac{5}{18} + \frac{7}{15} \\ &= \frac{25+42}{90} = \frac{67}{90} \end{aligned}$$

22-12. 72

조건 (나)에서 $a \times b \times c \times d = 10^7 = 2^7 \times 5^7$

이때,

$a = 2^{x_1} \times 5^{y_1}$, $b = 2^{x_2} \times 5^{y_2}$, $c = 2^{x_3} \times 5^{y_3}$, $d = 2^{x_4} \times 5^{y_4}$ 라 하자.

$a \times b \times c \times d = 2^7 \times 5^7$ 이므로

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 7, y_1 + y_2 + y_3 + y_4 = 7$$

조건 (가)에 의해 x_1, x_2, x_3, x_4 중 하나는 0이고

나머지 세 개는 자연수이다.

x_1, x_2, x_3, x_4 중 0이 될 것을 고르는 경우의 수는 4

나머지 세 수를 각각 $1 + z_1, 1 + z_2, 1 + z_3$ 라고 하면,

z_1, z_2, z_3 는 음이 아닌 정수이고 $z_1 + z_2 + z_3 = 4$

이를 만족시키는 순서쌍 (z_1, z_2, z_3) 의 개수는

$${}_3H_4 = {}_6C_4 = 15$$

y_1, y_2, y_3, y_4 는 음이 아닌 정수이고

$y_1 + y_2 + y_3 + y_4 = 7$ 을 만족시키는 순서쌍 (y_1, y_2, y_3, y_4) 의

개수는 ${}_4H_7 = {}_{10}C_7 = 120$

$$\therefore N = 4 \times 15 \times 120 = 7200$$

$$\therefore \frac{N}{100} = 72$$

<손풀이>

by (4)

$$a = 2^{x_1} \cdot 5^{y_1}$$

$$b = 2^{x_2} \cdot 5^{y_2}$$

⋮

$$a \times b \times c \times d = 2^7 \times 5^7$$

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 7$$

① 세속한 경우

$$4C_1 \rightarrow 2 \text{ 인디코 갖지 } \times$$

$$x_1 + x_2 + x_3 = 7 \quad (x_4 \geq 1)$$

$$3H_4 = 6C_4 = 6C_2$$

$$4 \times 15 = 60$$

$$\textcircled{2} \quad y_1 + y_2 + y_3 + y_4 = 7$$

$$4H_7 = 10C_3 = 120$$

$$60 \times 120 = 7200$$

$$\frac{N}{100} = \boxed{72}$$

미적분

22-9. ④

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt} = \frac{2 \tan t \times \sec^2 t}{1 - 2 \cos 2t}$$

$$t = \frac{\pi}{3} \text{ 을 대입하면}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2\sqrt{3} \times 2^2}{1+1} = 4\sqrt{3}$$

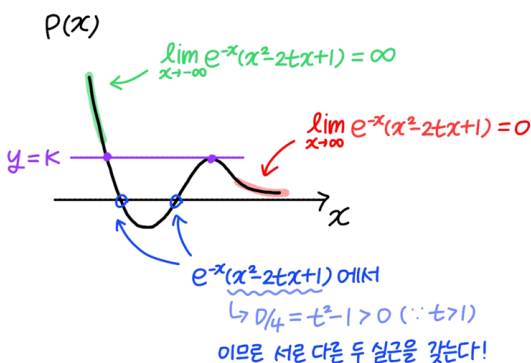
22-10. ④

방정식 $f(x) = g(x)$ 는 $x^2 - 2tx + 1 = ke^x$ 이고, 정리하면
 $e^{-x}(x^2 - 2tx + 1) = k$

이때, $p(x) = e^{-x}(x^2 - 2tx + 1)$ 라고 하면,

함수 $p(x)$ 가 $y = k$ 와 서로 다른 두 점에서 만날 때의 양수 k 값이 $h(t)$ 가 된다.

함수 $p(x)$ 의 그래프를 그려보면 다음과 같다.



함수 $p(x)$ 와 $y = k$ ($k > 0$)는 k 가 함수 $p(x)$ 의 극댓값일 때 서로 다른 두 점에서 만난다.

$$\begin{aligned}
 p'(x) &= e^{-x}(-x^2 + 2tx - 1 + 2x - 2t) \\
 &= -e^{-x}\{x^2 - 2(t+1)x + 1 + 2t\}
 \end{aligned}$$

방정식 $-e^{-x}\{x^2 - 2(t+1)x + 1 + 2t\} = 0$ 의 근은
 $x = 2t + 1, x = 1$

이때 더 큰 x 값에서 극댓값을 갖는데

$2t + 1 > 1$ ($\because t > 1$)이므로

함수 $p(x)$ 는 $x = 2t + 1$ 에서 극댓값을 갖는다.

$$\begin{aligned}
 \therefore p(2t+1) &= e^{-2t-1}(4t^2 + 4t + 1 - 4t^2 - 2t + 1) \\
 &= e^{-2t-1}(2t + 2) = h(t)
 \end{aligned}$$

$$h'(t) = e^{-2t-1}(-4t - 4 + 2) = e^{-2t-1}(-4t - 2)$$

$$\therefore h'(2) = -10e^{-5}$$

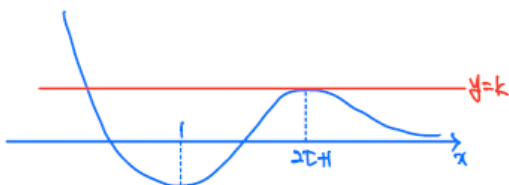
<손풀이>

$$(x^2 - 2tx + 1)e^{-x} = k$$

$$\begin{aligned}
 y &= (x^2 - 2tx + 1)e^{-x} \\
 \hookrightarrow D/4 &= t^2 - 1 > 0
 \end{aligned}$$

$$y' = -e^{-x}\{x^2 - 2(t+1)x + 2t + 1\}$$

$$= -e^{-x}(x - 2t - 1)(x - 1)$$



$$\therefore k = h(t) = (2t + 2)e^{-2t-1}$$

$$h'(t) = e^{-2t-1}\{-4t - 2\}$$

$$h'(2) = -10e^{-5}$$

22-11. ③

조건 (가) $\int_0^{\ln 3} e^x f(e^x) dx = 5$ 에서 $e^x = t$ 로 놓으면

$$e^x = \frac{dt}{dx} \text{ 이고 } \int_0^{\ln 3} e^x f(e^x) dx = \int_1^3 f(t) dt = 5, \quad g(3) = 5$$

$\int_1^3 f(x) \ln x dx$ 에서 부분적분법을 이용하면

$$\begin{aligned} \int_1^3 f(x) \ln x dx &= \left[g(x) \ln x \right]_1^3 - \int_1^3 \frac{g(x)}{x} dx \\ &= g(3) \ln 3 - \int_1^3 \frac{g(x)}{x} dx \end{aligned}$$

$$\text{이때, 조건 (나)에 의해 } \int_0^{\ln 3} g(e^x) dx = \int_1^3 \frac{g(t)}{t} dt = 2 \ln 3$$

이므로

$$\therefore \int_1^3 f(x) \ln x dx = 5 \ln 3 - 2 \ln 3 = 3 \ln 3$$

<손풀이>

$$\begin{aligned} \text{(가) } 5 &= \int_0^{\ln 3} e^x f(e^x) dx \\ &= \int_1^3 f(t) dt \end{aligned} \quad \begin{array}{l} \swarrow \\ e^x = t \text{ 치환} \end{array}$$

$$\therefore g(3) = 5$$

$$\begin{aligned} \text{(나) } 2 \ln 3 &= \int_0^{\ln 3} g(e^x) dx \\ &= \int_1^3 \underbrace{g(t)}_5 \times \underbrace{\frac{1}{t}}_{\frac{1}{t}} dt \quad \begin{array}{l} \swarrow \\ e^x = t \text{ 치환} \end{array} \\ &= g(3) \cdot \ln 3 - \int_1^3 f(t) \ln t dt \end{aligned}$$

$$\therefore \int_1^3 f(t) \ln t dt = 3 \ln 3$$

22-12. 80

조건 (가)에 의해 모든 자연수 n 에 대하여 a_n 은 $f(x) = c$ 의 한 실근

따라서 $f(x) = c$ 가 실근을 가져야 하므로 $c \geq 1$

$$(\because f(x) \geq 1)$$

조건 (나)에서 $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_{n+1} - a_n)^2 = c$ 인데 $c \neq 0$

$(\because c \geq 1)$ 이므로

$f(x) = c$ 가 서로 다른 두 실근을 갖고 그 두 실근을 α, β 라 할 때, $(\alpha - \beta)^2 = c$

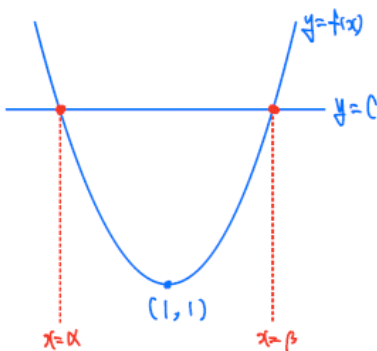
$$f(x) = c \Leftrightarrow x^2 - 2x + 2 - c = 0 \text{에서 } \alpha + \beta = 2 \text{이고}$$

$$\alpha\beta = 2 - c \text{ 이므로 } (\alpha - \beta)^2 = 4c - 4$$

$$\therefore 4c - 4 = c, \quad c = \frac{4}{3}$$

$$\therefore 60 \times c = 80$$

<손풀이>



→ $\alpha_n = \alpha \text{ or } \beta$ (α_n :제한된 (by α)

$x^2 - 2x + 2 - c = 0$ 의 두 근이 $x = \alpha, \beta$

$$\alpha + \beta = 2, \quad \alpha\beta = 2 - c$$

$$\therefore (\alpha - \beta)^2 = (\beta - \alpha)^2 = 4 - 4(2 - c) = c$$

$$\therefore c = \frac{4}{3}$$

Day. **23**

수학1, 수학2

23-1. ④

등차수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항을 a , 공차를 d 라 하자.

i) $a_2 - 8 = a_7 - 8$ 이면 $a_2 = a_7$ 이므로 공차가 0

이때, $|a_1 + a_2 + a_3| = a_4$ 가 되려면 $-3a = a$ 에서

$a = 0$ 이므로 첫째항이 음수라는 가정에 모순

ii) $a_2 - 8 = -a_7 + 8$ 이면 $a = -\frac{7}{2}d + 8$

이를 $|a_1 + a_2 + a_3| = a_4$ 에 대입하면

$$\left| -\frac{15}{2}d + 24 \right| = -\frac{1}{2}d + 8$$

이때, $-\frac{15}{2}d + 24 = -\frac{1}{2}d + 8$ 이면 $7d = 16$ 이고 이때

$a = 0$ 이므로 첫째항이 음수라는 조건에 모순

$$\therefore -\frac{15}{2}d + 24 = \frac{1}{2}d - 8, \quad d = 4$$

따라서, $a = -6$ 이고 $a_n = -6 + 4(n-1) \quad \therefore a_5 = 10$

23-2. ④

삼차함수 $f(x)$ 에서 x 의 값이 1부터 t ($t > 1$)까지 변할 때의 평균변화율이 $g(t)$ 이므로

$$\frac{f(t) - f(1)}{t - 1} = t^2 - 2t + 5 \text{ 이고 정리하면,}$$

$$f(t) = (t^2 - 2t + 5)(t - 1) + f(1)$$

$$\therefore f'(t) = (2t - 2)(t - 1) + (t^2 - 2t + 5), \quad f'(2) = 7$$

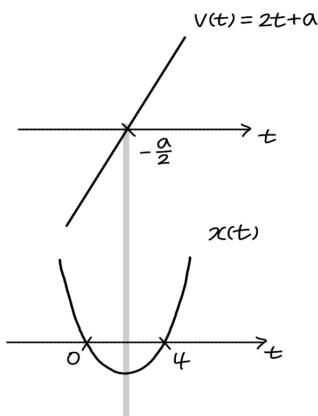
23-3. ④

위치함수 $x(t)$ 를 시간 t 에 대해 미분하면 속도함수 $v(t)$

이때, $t = 0, t = 4$ 에서 점 P의 위치가 원점이므로

$$x(0) = x(4) = 0$$

그림으로 표현해보면 다음과 같다.



따라서 $-\frac{a}{2} = \frac{0+4}{2} = 2$ 이고 정리하면 $a = -4$

점 P가 시각 $t = 0$ 에서 $t = k$ 까지 움직인 거리가 20이므로

$$\begin{aligned} \int_0^k |v(t)| dt &= \int_0^2 (-2t + 4) dt + \int_2^k (2t - 4) dt \\ &= 4 + k^2 - 4k + 4 = k^2 - 4k + 8 \end{aligned}$$

$$k^2 - 4k + 8 = 20, \text{ 계산하면 } k = 6 \quad (\because k > 0)$$

$$\therefore k = 6$$

23-4. ③

$\sin x = \pm \sqrt{k}$ 를 만족시키는 $0 < x < 2\pi$ 인 실수 x 는 4개이므로

그 값을 $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ ($\alpha < \beta < \gamma < \delta$)라 하면

4개의 수가 등차수열을 이루어야 한다.

$y = \sin x$ 의 그래프를 이용하면 $\beta = \pi - \alpha, \gamma = \pi + \alpha, \delta = 2\pi - \alpha$ 라고 표현할 수 있고

$\alpha, \beta, \gamma, \delta$ 가 등차수열을 이루기 때문에 $\beta - \alpha = \gamma - \beta$ 를 만족시켜야 한다.

따라서, $(\pi - \alpha) - \alpha = (\pi + \alpha) - (\pi - \alpha)$ 이고 정리하면

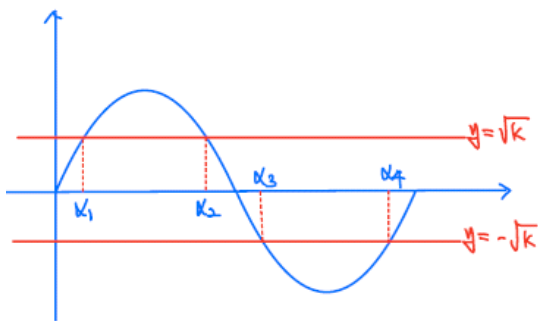
$$\alpha = \frac{\pi}{4}$$

$$\therefore \alpha = \frac{\pi}{4}, \beta = \frac{3\pi}{4}, \gamma = \frac{5\pi}{4}, \delta = \frac{7\pi}{4}$$

$$\therefore \sqrt{k} = \frac{\sqrt{2}}{2}, k = \frac{1}{2}$$

<손풀이>

$$\sin x = \pm \sqrt{k}$$



$$\alpha_2 = \pi - \alpha_1 \Rightarrow 2\pi - 2\alpha_1 = \pi + 2\alpha_1 \text{ (by 동차중합)}$$

$$\alpha_3 = \pi + \alpha_1 \quad \therefore \alpha_1 = \frac{\pi}{4}$$

$$\therefore \sqrt{k} = \sin \frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$k = \frac{1}{2}$$

23-5. ②

$\sum_{k=1}^n a_k = a_{n-1}$ ($n \geq 3$)에 $n=3$ 을 대입하면,

$$a_1 + a_2 + a_3 = a_2, \quad a_3 = -a_1 = 4$$

$$a_n = \sum_{k=1}^n a_k - \sum_{k=1}^{n-1} a_k = a_{n-1} - a_{n-2} \quad (n \geq 4) \text{ 이므로}$$

$$a_n = a_{n-1} - a_{n-2} \quad (n \geq 4)$$

이때, $a_2 = x$ 라고 하면

$$a_4 = a_3 - a_2 = 4 - x$$

$$a_5 = a_4 - a_3 = -x$$

$$a_6 = a_5 - a_4 = -4$$

$$a_7 = a_6 - a_5 = -4 + x$$

$$a_8 = a_7 - a_6 = x$$

$$a_9 = a_8 - a_7 = 4$$

$$a_{10} = a_9 - a_8 = 4 - x$$

$$a_{11} = a_{10} - a_9 = -x$$

이므로 $a_n = a_{n+6}$ ($n \geq 4$)

$$a_{22} = a_4 = 4 - x = 3, \quad x = 1$$

$$\sum_{n=3}^{100} \left(\sum_{k=1}^n a_k \right) = \sum_{n=3}^{100} (a_{n-1}) = S_{99} - a_1 = a_{98} - a_1$$

이때, $a_{98} = a_2 = x = 10$ 이므로

$$\therefore \sum_{n=3}^{100} \left(\sum_{k=1}^n a_k \right) = a_{98} - a_1 = a_2 - a_1 = 1 - (-4) = 5$$

<손풀이>

$$\begin{cases} a_n = a_{n-1} - a_{n-2} & (n \geq 4) \\ a_1 + a_2 + a_3 = a_2 & (n=3) \end{cases}$$

$$\text{Let } a_2 = k$$

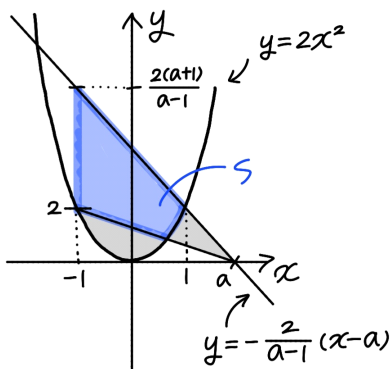
$$a_1 = -4, a_2 = k, a_3 = 4, a_4 = 4 - k, a_5 = -k, a_6 = -4, a_7 = -4 + k$$

$$a_8 = k, a_9 = 4, \dots, a_{22} = 4 - k = 3$$

$$\therefore k = 1$$

$$\begin{aligned} \sum_{n=3}^{100} \left(\sum_{k=1}^n a_k \right) &= \sum_{n=3}^{100} a_{n-1} = \sum_{n=1}^{99} a_n - a_1 = a_{98} + 4 \\ &= a_2 + 4 = 5 \end{aligned}$$

23-6. ③



위의 그림대로 색칠한 부분의 넓이를 S 라고 하자.

$$A - B = (A + S) - (B + S)$$

$$= - \int_{-1}^1 \left\{ 2x^2 + \frac{2}{a-1}(x-a) \right\} dx - \frac{4}{a-1} \times (a+1) \times \frac{1}{2}$$

$$= \frac{4a}{a-1} - \frac{4}{3} - \frac{2(a+1)}{a-1} = \frac{2}{3}$$

$$\therefore A - B = \frac{2}{3}$$

23-7. ①

$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(t+th) - f(t-4)}{h}$ 가 수렴할 때 분모가 0으로 가면

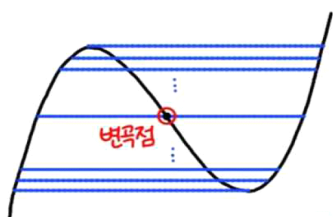
분자도 0으로 가야 하므로

$f(t) = f(t-4)$ 일 때 수렴

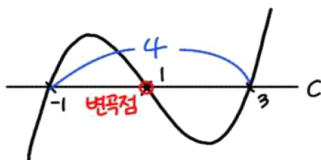
$t = 3$ 이 이 방정식의 유일한 해 이므로

$$f(x) = (x+1)(x-1)(x-3) + C$$

* $f(x) = (x+1)(x-1)(x-3) + C$ 인 이유



↑ ↗ 1개(유일)
변곡점을 지나는 선을 제외하곤
 전부 변곡점을 기준으로 위, 아래로
 같은 길이의 선이 2개씩 존재!
 따라서 $t=3$ 이 $f(t) = f(t-4)$ 의
유일한 해가 되기 위해서는
 $f(x)$ 가 다음과 같이 생겨야 함!



$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(3+3h) - f(3-4)}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(3+3h) - f(3)}{h} = 3f'(3) = 3 \times 8 = 24$$

이므로 $f(3) = C = 24$ 이고

$$f(x) = (x+1)(x-1)(x-3) + 24$$

$$\therefore f(5) = 72$$

<손풀이>

$$t=3 \rightarrow \begin{cases} f(3) - f(-1) = 0 \text{ (by 응푼)} \end{cases}$$

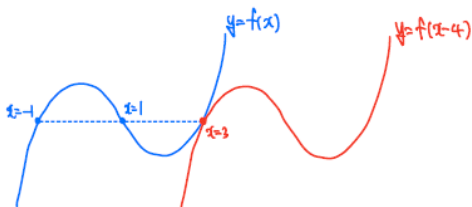
$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(3+3h) - f(-1)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(3+3h) - f(3)}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(3+3h) - f(3)}{3h} \times 3$$

$$= 3f'(3)$$

$$\therefore 3f'(3) = f(3)$$

$$t=3 \rightarrow f(t) - f(t-4) = 0 \rightarrow f(t) = f(t-4)$$



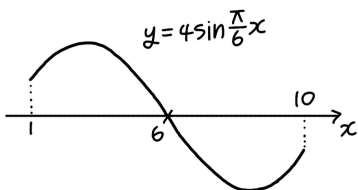
$$\therefore f(x) = (x+1)(x-1)(x-3) + \overset{24 \text{ (by } 3f'(3) = f(3))}{f(1)}$$

$$\therefore f(5) = 6 \times 4 \times 2 + 24 = 72$$

23-8. 22

$$-1 \leq x \leq 5 \text{에서 } 1 \leq f(x) \leq 10$$

이때, $1 \leq x \leq 10$ 에서 곡선 $y = 4\sin \frac{\pi}{6}x$ 의 그래프는 다음과 같다.



$g(f(x)) = m$ 이 서로 다른 세 실근을 가지려면

$1 \leq x \leq 10$ 에서 방정식 $g(x) = m$ 은 서로 다른 두 개의 실근을 가져야 한다.

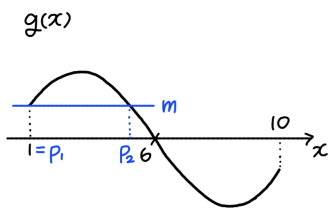
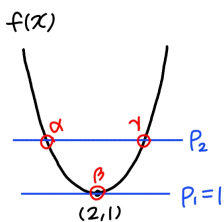
$$\text{즉, } g(1) = 2 \leq m < 4 \quad (\because 0 < m < 4)$$

이때, 방정식 $g(f(x)) = m$ 이 서로 다른 세 실근을 가지려면

$g(x) = m$ 의 서로 다른 두 실근을 각각 p_1, p_2 ($p_1 < p_2$)라고 할 때, $p_1 = f(2), p_2 > f(2)$ 이어야 한다.

이해를 돕기 위해 그림으로 표현해보면 다음과 같다.

($\alpha < \beta < \gamma$ 라고 가정)



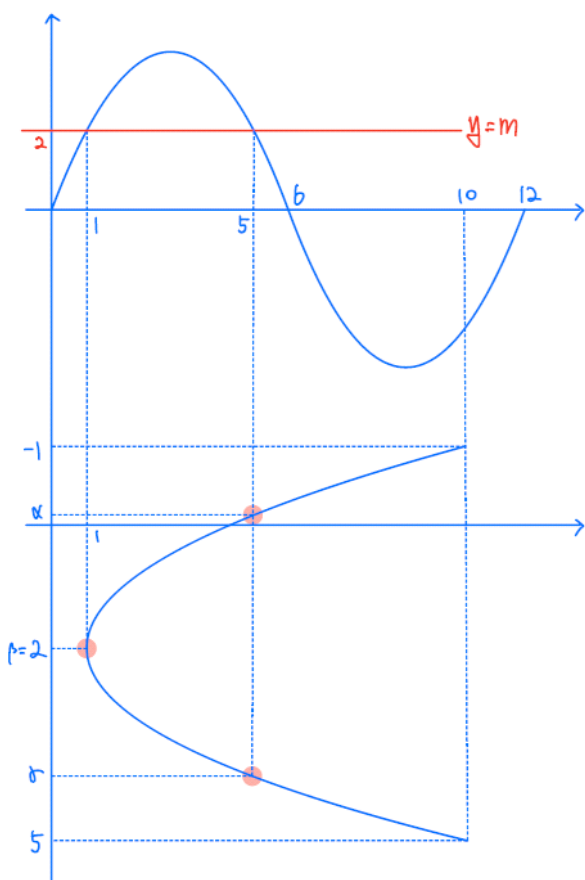
$p_1 = 1$ 이므로 대칭성을 이용하면 $p_2 = 5$ 이고

$$m = g(p_1) = g(1) = 2$$

$$\therefore m \times \{f(\alpha) + f(\beta) + f(\gamma)\}$$

$$= m \times (p_2 + p_1 + p_2) = 2 \times (5 + 1 + 5) = 22$$

<손플이>



$$\therefore m=2 \quad f(\alpha)=f(\beta)=5, \quad f(12)=1$$

확률과 통계

23-9. ③

한 상자에 담긴 삼각김밥 100개의 무게의 표본평균을 $\bar{X}$ 라 하면

$$E(\bar{X}) = 200, \quad \sigma(\bar{X}) = \frac{20}{\sqrt{100}} = 2$$

$\bar{X}$ 는 정규분포 $N(200, 2^2)$ 을 따른다.

따라서 이 식품회사에서 판매하는 삼각김밥 한 상자가 불량품으로 판정될 확률은

$$\begin{aligned} & P(100\bar{X} < 19680) \\ &= P(\bar{X} < 196.8) \\ &= P\left(Z < \frac{196.8 - 200}{2}\right) \\ &= P(Z < -1.6) \\ &= 0.5 - P(-1.6 \leq Z \leq 0) \\ &= 0.5 - P(0 \leq Z \leq 1.6) \\ &= 0.5 - 0.4452 = 0.0548 \\ &\therefore 0.0548 \end{aligned}$$

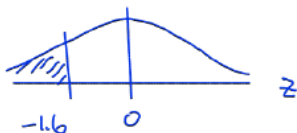
<손풀이>

$$X \sim N(200, 20^2), \quad n=100$$

$$\frac{\text{문제 값}}{100} = \bar{X} \leq 196.8 \quad : \text{눈감.}$$

$$\bar{X} \sim N(200, 2^2)$$

$$P(\bar{X} \leq 196.8) = P(Z \leq -1.6)$$



$$0.5 - 0.4452 = 0.0548.$$

23-10. 20

조건 (나)에서 $x \times y \times z$ 가 홀수이므로 x, y, z 는 모두 홀수

조건 (가)에서 $2x + 2y + 2z$ 이 짝수이므로 w 는 홀수
음이 아닌 정수 x', y', z', w' 에 대하여

$x = 2x' + 1, y = 2y' + 1, z = 2z' + 1, w = 2w' + 1$ 이라고
하면

$2x + 2y + 2z + w = 19$ 에서

$$2(2x' + 1) + 2(2y' + 1) + 2(2z' + 1) + 2w' + 1 = 19 \text{이고}$$

$$2(x' + y' + z') + w' = 6$$

이때, $2(x' + y' + z')$ 가 짝수이므로 w' 는 짝수

$w' = 0$ 일 때, 방정식 $x' + y' + z' = 3$ 을 만족시키는
음이 아닌 정수 x', y', z' 의 모든 순서쌍 (x', y', z') 의 개수는
 ${}_3H_3 = {}_5C_3 = 10$

$w' = 2$ 일 때, 방정식 $x' + y' + z' = 2$ 를 만족시키는
음이 아닌 정수 x', y', z' 의 모든 순서쌍 (x', y', z') 의 개수는
 ${}_3H_2 = {}_4C_2 = 6$

$w' = 4$ 일 때, 방정식 $x' + y' + z' = 1$ 를 만족시키는
음이 아닌 정수 x', y', z' 의 모든 순서쌍 (x', y', z') 의 개수는
 ${}_3H_1 = {}_3C_1 = 3$

$w' = 6$ 일 때, 방정식 $x' + y' + z' = 0$ 을 만족시키는
음이 아닌 정수 x', y', z' 의 모든 순서쌍 (x', y', z') 의 개수는
 ${}_3H_0 = {}_2C_0 = 1$

$$\therefore 10 + 6 + 3 + 1 = 20$$

<손풀이>

 $2x, 2y, 2z$ 각각 이므로.

$$w \text{ 각각 } = 2w' + 1 \quad (w' \geq 0)$$

$$x + y + z + w' = 9$$

 $\rightarrow x, y, z$ 각각 이므로. $(x', y', z' \geq 0)$

$$2x' + 1 + 2y' + 1 + 2z' + 1 + w' = 9$$

$$2x' + 2y' + 2z' + w' = 6 \quad \text{그러나 } w' \text{ 홀수이므로!}$$

$$w' = 2w'' \quad (w'' \geq 0)$$

$$x' + y' + z' + w'' = 3$$

$$4H_3 = 6C_3 = \boxed{20}$$

23-11. ③

타일을 색칠하는 경우의 수는 ${}_{12}C_7$

조건 (가)를 만족시키려면 3개의 가로 중에서 1개의 가로를 선택하고,

이 가로에는 3개의 타일을 색칠하고 나머지 2개의 가로에는 2개의 타일을 색칠해야 한다.

즉, 조건 (가)를 만족시키는 경우의 수는

$${}_3C_1 \times {}_4C_3 \times {}_4C_2 \times {}_4C_2 = 432$$

조건 (나)를 추가로 만족시키기 위해서는

조건 (가)에서 하나의 타일도 색칠하지 않는 세로가 존재하는 경우를 제외하면 된다.

하나의 타일도 색칠되지 않는 세로는 최대 1개이고,

이때의 경우의 수는

$${}_3C_1 \times {}_4C_3 \times {}_3C_2 \times {}_3C_2 = 108$$

따라서 조건 (가), (나)를 만족시키는 경우의 수는

$$432 - 108 = 324$$

$$\therefore \frac{324}{{}_{12}C_7} = \frac{9}{22}$$

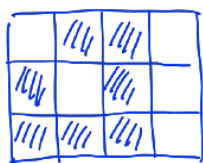
<손풀이>

All 경우의 수 ${}_{12}C_7$

_____	2	2	3
_____	2	3	2
_____	3	2	2

$$3 \times {}_4C_2 \times {}_4C_2 \times {}_4C_3$$

$$3 \times 6 \times 6 \times 4 = 432$$



이전 경우 제외

$$3 \times {}_4C_3 \times {}_3C_2 \times {}_3C_2$$

$$3 \times 4 \times 3 \times 3 = 108$$

$$\frac{432 - 108}{12C_7} = \frac{324}{12C_7} = \frac{9}{22}$$

23-12. 168

빨간 공을 넣는 주머니를 택하는 경우의 수는 ${}_4C_3 = 4$

택한 주머니에 빨간 공을 각각 1개씩 넣고 남은 빨간 공 2개를 넣는 경우의 수는 ${}_3H_2 = 6$

빨간 공이 들어 있는 세 주머니에 파란 공, 노란 공을 각각 1개씩 넣고 남은 1개씩을 네 주머니에 넣는 경우의 수는

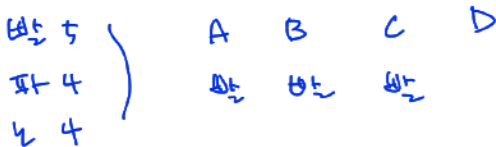
$${}_4H_1 \times {}_4H_1 = 16 \quad \cdots \textcircled{1}$$

①의 경우 중에 빨간 공이 들어 있지 않은 주머니가 비어 있는 경우의 수는

$${}_3H_1 \times {}_3H_1 = 3 \times 3 = 9$$

$$\therefore 4 \times 6 \times (16 - 9) = 168$$

<손풀이>



$$\textcircled{가} \quad {}_4C_3 = 4, \quad {}_3H_2 = {}_4C_2 = 6$$

$$4 \times 6 = 24 \quad (\text{빨간색 넣는 방법수})$$

$$\begin{array}{l} \textcircled{나} \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{파 1, 노 1} \\ \text{파 1, 노 0} \\ \text{파 0, 노 1} \end{array} \right. \end{array} \quad \begin{array}{l} 1 \\ {}_3C_1 = 3 \\ {}_3C_1 = 3 \\ \hline 7 \text{ 가지} \end{array}$$

$$24 \times 7 = \boxed{168}$$

미적분

23-9. ⑤

x 축 위의 점 $(t, 0) \left(0 \leq t \leq \frac{\pi}{3}\right)$ 를 지나고

x 축에 수직인 평면으로 자른 단면의 넓이를 $S(t)$ 라 하면

$$S(t) = \left(\sqrt{\frac{\sin t}{\cos t + 4}} \right)^2 = \frac{\sin t}{\cos t + 4}$$

따라서 구하는 입체도형의 부피를 V 라 하면

$$\begin{aligned} V &= \int_0^{\frac{\pi}{3}} S(t) dt \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin t}{\cos t + 4} dt \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\frac{\pi}{3} - (\cos t + 4)'}{\cos t + 4} dt \\ &= - \left[\ln |\cos t + 4| \right]_0^{\frac{\pi}{3}} \\ &= \ln \frac{10}{9} \\ \therefore \ln \frac{10}{9} \end{aligned}$$

23-10. ①

$$\begin{aligned} \text{조건 (가)에서 } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} \ln \left(1 + \frac{1}{x^2 + 2x + 3} \right) \\ = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x(x^2 + 2x + 3)} \ln \left(1 + \frac{1}{x^2 + 2x + 3} \right)^{x^2 + 2x + 3} = 2 \end{aligned}$$

따라서 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x^3 + 2x^2 + 3x} = 2$ 이고 $f(x)$ 는 최고차항의

계수가 2인 삼차함수이므로

$f(x) = 2x^3 + ax^2 + bx + c$ 라고 하자.

또한, 조건 (나)에서 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{e^{f(x)} - 1} = 1$ 이고

$\lim_{x \rightarrow 0} (e^{f(x)} - 1) = 0$ 이므로 $f(0) = 0 = c$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{e^{f(x)} - 1} \times \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{f(x)} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = f'(0) = 1 = b \quad (\because \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{e^{f(x)} - 1} = 1)$$

조건 (다)에서 $f(1) = 2 + a + b + c = 2 + a + 1 + 0 = 3 + a$

$$f'(1) = 6 + 2a + b = 6 + 2a + 1 = 7 + 2a$$

$f(1) = f'(1)$ 이므로 $3 + a = 7 + 2a$, $a = -4$

$$\therefore f(x) = 2x^3 - 4x^2 + x, \quad f(2) = 2$$

<손풀이>

$$(f) 2 = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x(x^2+2x+3)} \times \underbrace{\ln \left(1 + \frac{1}{x^2+2x+3} \right)^{x^2+2x+3}}_{1}$$

$$\therefore f(x) = 2x^3 + ax^2 + bx + c$$

$$(f) 1 = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{\underbrace{e^{f(x)} - 1}_{1}} \times \frac{x}{f(x)}$$

$$\therefore f(0) = 0, f'(0) = 1$$

$$\therefore f(x) = 2x^3 + ax^2 + x$$

$$(f) f(1) = f'(1) \Rightarrow a = -4$$

$$\therefore f(x) = 2x^3 - 4x^2 + x$$

23-11. ④

$$\sum_{n=1}^{\infty} (4 - S_n) \text{이 } 6 \text{으로 수렴하므로 } \lim_{n \rightarrow \infty} (4 - S_n) = 0$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = 4 \text{이므로 } \sum_{n=1}^{\infty} a_n = \frac{a_1}{1-r} = 4$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (4 - S_n) = 6 \text{에서}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left\{ 4 - \frac{a_1(1-r^n)}{1-r} \right\} = \sum_{n=1}^{\infty} 4r^n = \frac{4r}{1-r} = 6$$

$$\text{따라서 } r = \frac{3}{5}, a_1 = \frac{8}{5} \text{이고 } a_n = \frac{8}{5} \times \left(\frac{3}{5}\right)^{n-1}$$

$$\therefore \sum_{n=1}^{\infty} a_n a_{n+2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{64}{25} \left(\frac{9}{25}\right)^n = \frac{\frac{64}{25} \cdot \frac{9}{25}}{1 - \frac{9}{25}} = \frac{36}{25}$$

<손풀이>

$$\sum_{n=1}^{\infty} (4 - S_n) = 6 \text{형}$$

$$\rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} (4 - S_n) = 0 \rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = 4$$

$$\therefore \frac{a_1}{1-r} = 4$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(4 - \frac{a_1(1-r^n)}{1-r} \right) = \sum_{n=1}^{\infty} 4r^n = \frac{4r}{1-r} = 6$$

$$\therefore r = \frac{3}{5} \rightarrow a_1 = \frac{8}{5}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot a_{n+2} = \frac{a_1 \cdot a_3}{1-r^2} = \frac{36}{25}$$

23-12. 48

$$g(x) = \frac{f(x)}{e^{x-1}} \text{에서 } g'(x) = \frac{f'(x) - f(x)}{e^{x-1}} \text{ 이고}$$

$$\text{조건 (가)에서 } g'(\alpha) = 0 \text{ 이므로 } f'(\alpha) = f(\alpha)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = 0 \quad (\because \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3}{e^{x-1}} = 0) \text{ 이므로}$$

조건 (나)에서 $\lim_{t \rightarrow \alpha^+} h(t)$ 는 양의 무한대로 발산하며,

$$g(\alpha) = f(\alpha) = 0$$

조건 (다)에서 $\lim_{t \rightarrow \alpha^-} h(t)$ 가 존재하므로 $g''(\alpha) = 0$ 이고

$$f''(\alpha) = 0 \text{ 이므로}$$

삼차함수 $f(x)$ 는 $(x - \alpha)^3$ 을 인수로 가진다.

한편, $t \leq \alpha$ 일 때 $h(t) = t$ 이므로 $\alpha = -2$

$$\text{즉, } f(x) = k(x+2)^3 \quad (k < 0)$$

$$\text{따라서 } g'(x) = \frac{k(x+2)^2(1-x)}{e^{x-1}} \text{ 이고}$$

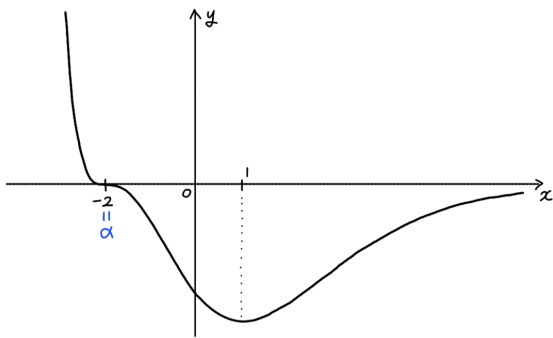
$g(x)$ 는 $x = 1$ 에서 (극솟값) = (최솟값) = $27k$ 를 가지므로

$$k = -\frac{1}{9}$$

$$\therefore f(x) = -\frac{1}{9}(x+2)^3$$

$$\therefore \alpha \times f(4) = -2 \times (-24) = 48$$

* 이해를 돕기 위해 그림으로 표현해보면 다음과 같다.



Day. **24**

수학1, 수학2

**24-1. 60**

$$\begin{aligned}
 & \sum_{k=1}^{10} (k-1)(4-a_k) \\
 &= \sum_{k=1}^{10} 4k - \sum_{k=1}^{10} k a_k + \sum_{k=1}^{10} a_k - \sum_{k=1}^{10} 4 = 200 \\
 &= 220 - 40 + \sum_{k=1}^{10} a_k - 40 = 200 \\
 &\therefore \sum_{k=1}^{10} a_k = 60
 \end{aligned}$$

24-2. ⑤

$f(x) = x^2 - 2x - 1$ 이므로 $-1 \leq x \leq 2$ 에서

$$-2 \leq f(x) \leq 2$$

$(g \circ f)(x) = a^{f(x)}$ 이 최댓값을 갖는 경우는 a 의 값의 범위에 따라 달라진다.

i) $0 < a < 1$

밑이 1보다 작은 양수이고 $-2 \leq f(x) \leq 2$ 이므로

$a^2 \leq a^{f(x)} \leq a^{-2}$ 이고 함수 $(g \circ f)(x) = a^{f(x)}$ 은 최댓값 a^{-2} 를 갖는다.

$$\text{따라서 } a^{-2} = 9 \text{에서 } a = \frac{1}{3}$$

ii) $a > 1$

밑이 1보다 큰 양수이고 $-2 \leq f(x) \leq 2$ 이므로

$a^{-2} \leq a^{f(x)} \leq a^2$ 이고 함수 $(g \circ f)(x) = a^{f(x)}$ 은 최댓값 a^2 을 갖는다.

따라서 $a^2 = 9$ 에서 $a = 3$

$$\therefore \frac{1}{3} + 3 = \frac{10}{3}$$

24-3. 15

로그의 진수조건에 의하여 $\sin x > 0$

방정식 $\log_2(\sin x) + \log_2(6\sin x + 4) = 1$ 을 정리하면

$$\log_2(\sin x(6\sin x + 4)) = \log_2 2 \text{이고}$$

$$\sin x(6\sin x + 4) = 2 \text{에서}$$

$$6\sin^2 x + 4\sin x - 2 = 2(3\sin x - 1)(\sin x + 1) = 0$$

$$\sin x = \frac{1}{3} \quad (\because \sin x > 0)$$

$0 \leq x \leq 2\pi$ 에서 방정식 $\sin x = \frac{1}{3}$ 의 모든 실근의 합은 π

$2\pi \leq x \leq 4\pi$ 에서 방정식 $\sin x = \frac{1}{3}$ 의 모든 실근의 합은 5π

$4\pi \leq x \leq 6\pi$ 에서 방정식 $\sin x = \frac{1}{3}$ 의 모든 실근의 합은 9π

따라서 모든 실근의 합은 $\pi + 5\pi + 9\pi = 15\pi$

$$\therefore a = 15$$

24-4. ④

주어진 식의 양변에 $x = 1$ 을 대입하면

$$1 + a + b = 0 \quad \dots \textcircled{㉠}$$

주어진 식의 양변을 미분하면

$$\int_1^x f(t)dt + xf(x) - xf(x) = 3x^2 + 2ax + b \text{이므로}$$

$$\int_1^x f(x)dx = 3x^2 + 2ax + b$$

$$\text{양변에 } x = 1 \text{을 대입하면 } 3 + 2a + b = 0 \quad \dots \textcircled{㉡}$$

①, ②을 연립하여 풀면 $a = -2, b = 1$

또한 $\int_1^x f(x)dx = 3x^2 + 2ax + b$ 의 양변을 미분하면

$$f(x) = 6x + 2a = 6x - 4$$

$$\therefore \int_a^b f(x)dx = \int_{-2}^1 (6x - 4)dx = \left[3x^2 - 4x \right]_{-2}^1 = -21$$

24-5. 25

$$f(x) = \frac{7}{4}x^3 + ax^2 + bx + 3 \text{ 에서 } f'(x) = \frac{21}{4}x^2 + 2ax + b$$

점 $A(0, 3), B(2, f(2))$ 에서의 접선을 각각 l, m 이라 할 때

직선 l 을 x 축에 대하여 대칭이동하면 직선 m 과 일치하므로

$$f'(2) = -f'(0) \text{이고}$$

$$4a + b + 21 = -b, 4a + 2b + 21 = 0 \quad \dots \textcircled{㉠}$$

$$l : y = bx + 3, m : y = -b(x - 2) + 4a + 2b + 17$$

이때, 직선 l, m 의 x 절편이 같으므로 $-\frac{3}{b} = \frac{2b - 4}{b}$ 이고

$$b = \frac{1}{2}$$

$$\text{이를 } \textcircled{㉠} \text{에 대입하여 } a \text{를 구하면 } a = -\frac{11}{2}$$

$$\text{따라서 } f(x) = \frac{7}{4}x^3 - \frac{11}{2}x^2 + \frac{1}{2}x + 3, f(1) = -\frac{1}{4}$$

$$\therefore 100 \times |f(1)| = 25$$

24-6. ⑤

$a_n = -2n + c, b_n = dn + e$ 라 하면

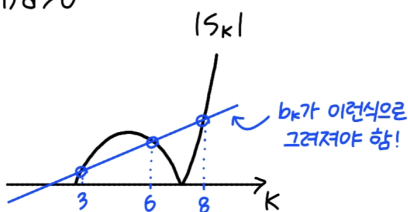
$$S_n = -n^2 + (c - 1)n$$

$|S_k| = b_k$ ($k = 3, 6, 8$)이 성립하려면

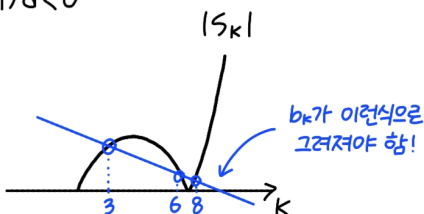
$$S_3 = b_3, S_6 = b_6, -S_8 = b_8$$

* $S_3 = b_3, S_6 = b_6, -S_8 = b_8$ 인 이유

i) $d > 0$



ii) $d < 0$



i), ii)의 경우에서 모두

$$S_3 = b_3, S_6 = b_6, -S_8 = b_8$$

$$\text{따라서 } -12 + 3c = 3d + e, -42 + 6c = 6d + e,$$

$$72 - 8c = 8d + e$$

연립하여 풀면 $c = \frac{67}{8}, d = -\frac{13}{8}, e = 18$ 이고

$$a_n = -2n + \frac{67}{8}, b_n = -\frac{13}{8}n + 18$$

$$\therefore a_1 + b_1 = \frac{91}{4}$$

24-7. 128

$\angle B$ 의 이등분선이 선분 AC와 만나는 점이 D이므로

$$\overline{AB} : \overline{BC} = \overline{AD} : \overline{DC} = 6 : 3 \text{ 이고}$$

$$\overline{AC} = 6 \text{ 이므로 } \overline{AD} = 4, \overline{DC} = 2$$

$$\cos \angle ABC = \frac{6^2 + 3^2 - 6^2}{2 \times 6 \times 3} = \frac{1}{4} \text{ 이므로 } \sin \angle ABC = \frac{\sqrt{15}}{4}$$

$$\overline{AC} = 2R_1 \sin \angle ABC \text{ 이므로 } R_1 = \frac{\overline{AC}}{2 \sin \angle ABC} = \frac{4\sqrt{15}}{5}$$

$\angle ABD = \theta$ 라 하면 $\angle ABD = \angle ACE = \theta$

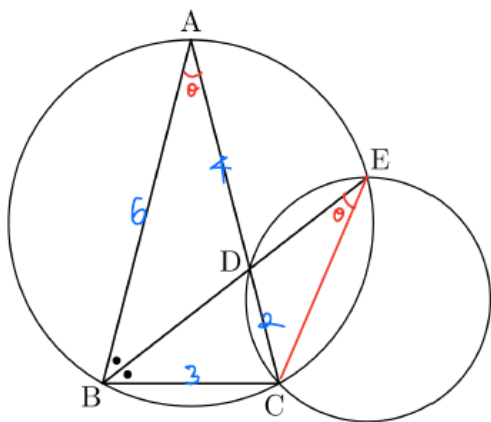
$$\overline{AE} = 2R_1 \sin \theta, \overline{DE} = 2R_2 \sin \theta \text{ 이므로 } \frac{R_2}{R_1} = \frac{\overline{DE}}{\overline{AE}}$$

이때, $\triangle ADE \sim \triangle BDC$ (AA 닮음)이므로

$$\frac{R_2}{R_1} = \frac{\overline{DE}}{\overline{AE}} = \frac{\overline{CD}}{\overline{BC}} = \frac{2}{3}$$

$$\therefore 20 \times R_1 \times R_2 = 20 \times \frac{2}{3} R_1^2 = 128$$

<손풀이>



$$\sin \angle B = \frac{\sqrt{5}}{4} \quad \cos \angle A = \frac{7}{8},$$

$$2R_1 = \frac{6}{\sin \angle B} = \frac{6}{\frac{\sqrt{5}}{4}} = \frac{24}{\sqrt{5}}$$

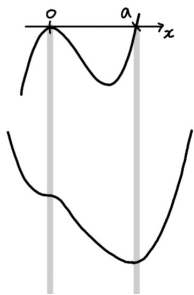
$$2R_2 = \frac{2}{\sin \angle E} = \frac{2}{\frac{\sqrt{5}}{8}} = \frac{16}{\sqrt{5}}$$

$$\therefore 20R_1 \cdot R_2 = 5 \times \frac{24}{\sqrt{5}} \times \frac{16}{\sqrt{5}} = 128$$

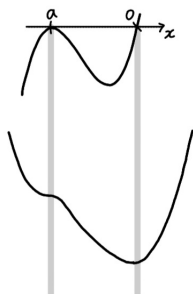
24-8. ⑤

조건 (가)에 따라 $f(x) = 4x^2(x-a)$ 또는 $f(x) = 4x(x-a)^2$ 이에 따른 $f(x)$ 와 $g(x)$ 의 그래프를 그려보면 다음과 같다.

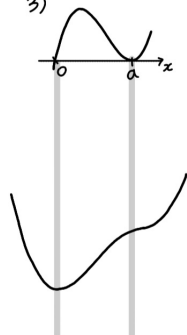
1)



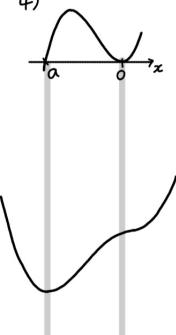
2)



3)



4)



이때 조건 (나)를 만족시키는 그림은 4) 뿐이므로

$$f(x) = 4x^2(x-a) \text{ 이고 } a \leq -1$$

$$g(1) = \int_{-1}^1 f(t) dt = \int_{-1}^1 4x^2(x-a) dt = -\frac{8a}{3}$$

$$\text{이때 } g(1) = a^2 - 1 \text{ 이므로 } -\frac{8a}{3} = a^2 - 1 \text{ 이고}$$

$$a = -3 \quad (\because a \leq -1)$$

$$\text{따라서 } f(x) = 4x^2(x+3)$$

함수 $g(x)$ 는 그림에서도 볼 수 있듯이 $x = a = -3$ 에서 극솟값을 가지므로

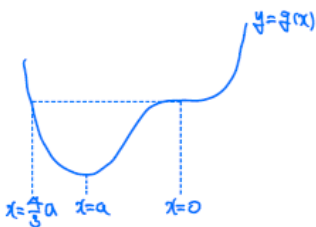
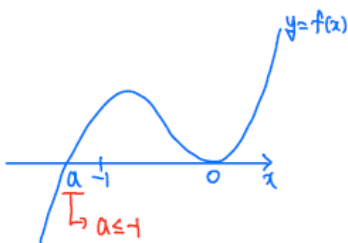
함수 $g(x)$ 의 극솟값은 $g(-3)$

$$\therefore g(-3) = \int_{-1}^{-3} f(t) dt = \int_{-1}^{-3} (4t^3 + 12t^2) dt = -24$$

<손풀이>

$$g(-1)=0, g'(x)=f(x)$$

$$(4) -1 < x \rightarrow g'(x) = f(x) \geq 0$$



$$\begin{aligned} g(x) &= x^3(x - \frac{4}{3}a) + g(0) \\ &= x^3(x - \frac{4}{3}a) - 1 - \frac{4}{3}a \quad (\text{by } g(-1)=0) \end{aligned}$$

$$g(1) = 1 - \frac{4}{3}a - 1 - \frac{4}{3}a = -\frac{8}{3}a = a^2 - 1$$

$$\therefore a = -3 \text{ or } a = \frac{1}{3}$$

$$\therefore a = -3$$

$$\therefore g(x) \text{의 극솟값} = g(-3) = -24$$

확률과 통계

24-9. ⑤

6장의 카드 1, 2, 3, 4, 5, 6 중에서 임의로 서로 다른 3장을 뽑아

일렬로 나열하여 만들 수 있는 모든 세 자리 자연수의 개수는

$${}_6P_3 = 6 \times 5 \times 4 = 120$$

임의로 뽑은 3장의 카드로 만든 세 자리 자연수가 3의 배수가 되는 경우는

각 자리의 수의 합이 3의 배수일 때이므로 이 경우를 순서쌍으로 나타내면 다음과 같다.

(1, 2, 3), (1, 2, 6), (1, 3, 5), (1, 5, 6),

(2, 3, 4), (2, 4, 6), (3, 4, 5), (4, 5, 6)

각각에 대하여 3장의 카드를 일렬로 나열하는 경우의 수는

$$3! = 6$$

세 자리 자연수가 3의 배수가 되는 경우의 수는

$$3! \times 8 = 48$$

$$\therefore \frac{48}{120} = \frac{2}{5}$$

<손풀이>

3으로 나누는 나머지 기준 분류

1	2	0
1	2	3
4	5	6

— — — 3의 배수

0 1 2

0	0	0	x
1	1	1	x
2	2	2	x

불가능.

공통분모

$$3! \times \frac{2}{6} \times \frac{2}{5} \times \frac{2}{4} = \boxed{\frac{2}{5}}$$

24-10. ⑤

문제에 주어진 주사위의 경우 각 면의 단면적이 다르기 때문에 주사위의 눈이 나올 확률이 다르게 나타난다.

주사위를 던졌을 때 나타나는 눈을 확률변수 X 라고 하면

$X=1, 2, 3, 4, 5, 6$ 의 값을 가질 수 있다.

1, 6의 눈이 적힌 면의 면적은 각각 $2 \times 1 = 2$,

2, 5의 눈이 적힌 면의 면적은 각각 $3 \times 2 = 6$,

3, 4의 눈이 적힌 면의 면적은 각각 $3 \times 1 = 3$

서로 마주보는 면의 확률은 서로 같으므로

1, 6의 눈이 나올 확률은 각각 $\frac{1}{11}$ 이고,

2, 5의 눈이 나올 확률은 각각 $\frac{3}{11}$ 이고,

3, 4의 눈이 나올 확률은 각각 $\frac{3}{22}$

따라서 이를 확률분포표로 나타내면 다음과 같다.

X	1	2	3	4	5	6	합계
$P(X=x)$	$\frac{1}{11}$	$\frac{3}{11}$	$\frac{3}{22}$	$\frac{3}{22}$	$\frac{3}{11}$	$\frac{1}{11}$	1

이 주사위를 1210번 던질 때 6의 눈이 나오는 횟수를 확률변수 Y 라 하면

Y 는 이항분포 $B\left(1210, \frac{1}{11}\right)$ 을 따른다.

시행횟수가 충분히 크므로

$$E(Y) = 1210 \cdot \frac{1}{11} = 110, V(Y) = 1210 \cdot \frac{1}{11} \cdot \frac{10}{11} = 10^2$$

이고

Y 는 정규분포 $N(110, 10^2)$ 으로 근사시킬 수 있다.

따라서 6의 눈이 115번 이하로 나올 확률은

$$\begin{aligned} P(Y \leq 115) &= P\left(Z \leq \frac{115-110}{10}\right) = P(Z \leq 0.5) \\ &= 0.5 + P(0 \leq Z \leq 0.5) = 0.5 + 0.1915 = 0.6915 \\ \therefore 0.6915 \end{aligned}$$

24-11. 130

N 은 짝수이므로 N 의 맨 끝자리는 2 또는 4

i) N 의 맨 끝자리가 2인 경우

전체 경우에서 3, 4가 이웃하는 경우를 빼주면 된다.

$$\frac{6!}{3!} - \frac{5!}{3!} \times 2 = 80$$

ii) N 의 맨 끝자리가 4인 경우

전체 경우에서 3, 4가 이웃하는 경우를 빼주면 된다.

$$\frac{6!}{3!2!} - \frac{5!}{3!2!} = 50$$

$$\therefore 80 + 50 = 130$$

<손풀이>

① _ _ _ _ _ 2

1 1 1 2 3 4

병치배열 사이에 3, 4 끼워넣기

$$4 \times 4P_2 = 80$$

② _ _ _ _ _ 4

1 1 1 2 2 3

한번씩만

다시밖에 오면 안됨.

$$10 \times 5 = 50$$

$$80 + 50 = \boxed{130}$$

24-12. 28

두 번째 시행 후 상자 A에 들어 있는 흰 공과 검은 공의 개수가 서로 같은 사건을 E ,

첫 번째 시행 후 상자 A에 들어 있는 흰 공과 검은 공의 개수가 서로 다른 사건을 D 라 하자.

한 번의 시행에서 흰 공 2개를 꺼내면 상자 A에 흰 공 1개만 다시 넣으므로

상자 A에 들어 있는 흰 공은 1개 적어지고 검은 공의 개수는 변하지 않는다.

같은 방법으로 검은 공 2개를 꺼내면

상자 A에 들어 있는 검은 공은 1개 적어지고 흰 공의 개수는 변하지 않는다.

흰 공 1개와 검은 공 1개를 꺼내면 상자 A에 들어 있는 흰 공과 검은 공은 각각 1개씩 적어진다.

시행 전에 상자 A에 들어 있는 흰 공과 검은 공의 개수가 같으므로

두 번째 시행 후 상자 A에 들어 있는 흰 공과 검은 공의 개수가 서로 같은 경우는 다음과 같다.

i) 첫 번째 시행에서 흰 공 2개를 꺼내고, 두 번째 시행에서 검은 공 2개를 꺼내는 경우

흰 공 3개와 검은 공 3개가 들어 있는 상자 A에서 흰 공

$$2\text{개를 꺼낼 확률은 } \frac{{}_3C_2}{{}_6C_2} = \frac{1}{5}$$

이제 상자 A에는 흰 공 2개와 검은 공 3개가 들어 있고,

$$\text{이 상자에서 검은 공 2개를 꺼낼 확률은 } \frac{{}_3C_2}{{}_5C_2} = \frac{3}{10}$$

$$\therefore \frac{1}{5} \times \frac{3}{10} = \frac{3}{50}$$

ii) 첫 번째 시행에서 검은 공 2개를 꺼내고, 두 번째 시행에서 흰 공 2개를 꺼내는 경우

흰 공 3개와 검은 공 3개가 들어 있는 상자 A에서 검은 공

$$2\text{개를 꺼낼 확률은 } \frac{{}_3C_2}{{}_6C_2} = \frac{1}{5}$$

이제 상자 A에는 흰 공 3개와 검은 공 2개가 들어 있고, 이

상자에서 흰 공 2개를 꺼낼 확률은 $\frac{{}_3C_2}{{}_5C_2} = \frac{3}{10}$

$$\therefore \frac{1}{5} \times \frac{3}{10} = \frac{3}{50}$$

- iii) 첫 번째 시행에서 흰 공 1개와 검은 공 1개를 꺼내고, 두 번째 시행에서도 흰 공 1개와 검은 공 1개를 꺼내는 경우 이때 첫 번째 시행 후 상자 A에 들어 있는 흰 공의 개수와 검은 공의 개수가 서로 다르고, 두 번째 시행 후 상자 A에 들어 있는 흰 공의 개수와 검은 공의 개수가 서로 같은 사건인 $E \cap D$ 는 i), ii)에서 일어나므로

$$P(E \cap D) = \frac{3}{50} + \frac{3}{50} = \frac{3}{25} = \frac{q}{p}$$

$$\therefore p + q = 28$$

<손풀이>

1회시행

흰공 2

	A	B
W	2	1
B	3	0

$\Rightarrow$ 검은공 2

검은공 2

	A	B
W	3	0
B	2	1

$\Rightarrow$ 흰공 2.

흰1,검1

	A	B
W	2	1
B	2	1

조건을 만족 X

$$\frac{{}_3C_2}{{}_6C_2} \times \frac{{}_3C_2}{{}_5C_2} = \frac{3}{15} \times \frac{3}{10} = \frac{3}{50}$$

$$\frac{3}{50} \times 2 = \frac{3}{25} \quad p+q = \boxed{28}$$

미적분

24-9. ①

$$\begin{aligned}
 & \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h) - f(1-h)}{h} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h) - f(1) + f(1) - f(1-h)}{h} = 2f'(1) \text{ 이므로} \\
 & 2f'(1) = \{2f(1)\}^3 \\
 & f'(x) = \frac{a(x^2-3) - 2ax^2}{(x^2-3)^2} = \frac{-ax^2-3a}{(x^2-3)^2} \text{ 이고 } f'(1) = -a, \\
 & f(1) = -\frac{a}{2} \text{ 이므로} \\
 & 2 \times -a = \left\{ 2 \times -\frac{a}{2} \right\}^3 \text{ 이고 정리하면 } a^2 = 2 \quad (\because a \neq 0) \\
 & \therefore a^2 = 2
 \end{aligned}$$

24-10. ②

함수 $f(x) = x^3$ 와 실수 t 에 대하여

곡선 $y = f(x)$ 와 직선 $y = t$ 가 만나는 x 좌표가 $g(t)$ 이므로

$$\{g(t)\}^3 = t, \quad g(t) = t^{\frac{1}{3}}$$

$$\int_1^3 g'(t^3 + 3t^2 + 3t + 1) dt \text{ 에서 } t^3 + 3t^2 + 3t + 1 = p \text{ 라고}$$

하면

$$(3t^2 + 6t + 3)dt = 3(t+1)^2 dt = dp \text{ 이고 } (t+1)^3 = p \text{ 이므로}$$

$$dt = \frac{1}{3} p^{-\frac{2}{3}} dp$$

$$\begin{aligned}
 \int_1^3 g'(t^3 + 3t^2 + 3t + 1) dt &= \frac{1}{3} \int_8^{64} g'(p) p^{-\frac{2}{3}} dp \\
 &= \frac{1}{9} \int_8^{64} p^{-\frac{4}{3}} dp = \frac{1}{12}
 \end{aligned}$$

$$\therefore \frac{1}{12}$$

<손풀이>

$$f(g(t)) = g(f(t)) = t$$

$$\begin{aligned}
 g(t^3) &= t \\
 \rightarrow g'(t^3) \cdot 3t^2 &= 1 \\
 g'(t^3) &= \frac{1}{3t^2}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \int_1^3 g'(t^3 + 3t^2 + 3t + 1) dt \\
 &= \int_2^4 g'(x^3) dx
 \end{aligned}$$

$$= \int_2^4 \frac{1}{3x^2} dx$$

$$= \frac{1}{12}$$

24-11. 8

$$S(t) = \int_0^t 2^x dx + 2 \times 2^t - \int_0^{t+2} 2^{x-2} dx \text{ 이므로}$$

$$S'(t) = 2^t + 2 \times 2^t \times \ln 2 - 2^t = 2 \times 2^t \times \ln 2 \text{ 이고}$$

$$S'(2) = 8 \ln 2$$

$$\therefore k = 8$$

24-12. ②

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3\{f(k)\}^n - 1}{6\{f(k)\}^{n+1} - 8} = \begin{cases} \frac{1}{8} & (0 < f(k) < 1) \\ -1 & (f(k) = 1) \\ \frac{1}{2f(k)} & (f(k) > 1) \end{cases}$$

에서 $f(k) = 1$ 인 자연수 k 가 존재하지 않으면 모든 a_k 가

양수이므로 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = 0$ 에 모순

따라서 $f(k) = 1$ 인 자연수 k 가 존재하려면 p 는 자연수

이 경우 $a_1 = \dots = a_{p-1} = \frac{1}{8}$, $a_p = -1$, $a_{p+1} = \frac{1}{4}$, $a_{p+2} = \frac{1}{8}$,

$a_{p+3} = \frac{1}{16}$, $\dots$ 이고

이를 통해 계산하면 $\sum_{n=p}^{\infty} a_n = -1 + \frac{\frac{1}{4}}{1 - \frac{1}{2}} = -\frac{1}{2}$ 이므로

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = 0$ 이라면 $a_1 + \dots + a_{p-1} = \frac{1}{8} \times (p-1) = \frac{1}{2}$ 이어야

하므로 $p-1 = 4$

$$\therefore p = 5$$

<손풀이>

$$a_k = \begin{cases} \frac{1}{8} & 0 < f(k) < 1 \\ -1 & f(k) = 1 \\ \frac{1}{2f(k)} & 1 < f(k) \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \frac{1}{8} & k < p \\ -1 & k = p \\ \frac{1}{2^{k+1-p}} & p < k \end{cases}$$

$$p \neq \text{자연수} \rightarrow a_k \approx \frac{1}{8} \text{ or } \frac{1}{2^{k+1}-p} : \text{보통 양수}$$

$$\rightarrow \sum a_n = 0 \text{ 보일}$$

$$\therefore p = \text{자연수}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \frac{1}{8} \times (p-1) - 1 + \frac{\frac{1}{4}}{1-\frac{1}{2}}$$

$$= \frac{p-1-4}{8} = 0$$

$$\therefore p = 5$$

Day. 25

수학1, 수학2

25-1. ②

$$a_n = \frac{n^3 + 2n^2 + 10}{n^2 + 2n} = n + \frac{10}{n(n+2)} = n + 5 \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+2} \right)$$

$$\sum_{n=1}^8 a_n = \sum_{n=1}^8 n + 5 \left(1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{9} - \frac{1}{10} \right) = 36 + \frac{58}{9} = \frac{382}{9}$$

$$\therefore \frac{382}{9}$$

25-2. ①

점 P의 시각 t에서의 가속도를 a(t)라 하면,

$$a(t) = 3t^2 - 12t + 9 = 3(t-1)(t-3)$$

가속도는 t=1, t=3에서 0

따라서, 구하는 거리는

$$\int_1^3 |v(t)| dt$$

$$= \int_1^2 (t^3 - 6t^2 + 9t - 2) dt - \int_2^3 (t^3 - 6t^2 + 9t - 2) dt$$

$$= \frac{5}{4} + \frac{5}{4} = \frac{5}{2}$$

25-3. ③

$$\cos(\theta_1 - \theta_2) = \frac{(2\sqrt{2})^2 + (\sqrt{6})^2 - (\overline{PQ})^2}{2 \times 2\sqrt{2} \times \sqrt{6}} = \frac{\sqrt{3}}{3} \text{ 이므로}$$

정리하면 $\overline{PQ} = \sqrt{6}$

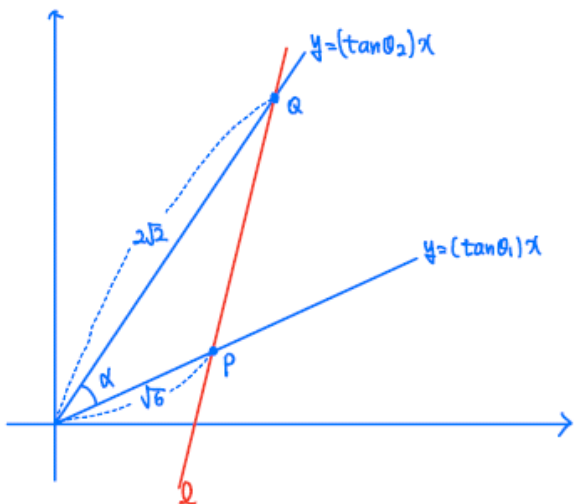
$$\cos(\theta_1 - \theta_2) = \cos(\theta_2 - \theta_1) = \frac{\sqrt{3}}{3} \text{ 이므로}$$

$$\sin(\theta_2 - \theta_1) = \frac{\sqrt{6}}{3}$$

$$\text{따라서 원의 반지름의 길이는 } \frac{\overline{PQ}}{2\sin(\theta_2 - \theta_1)} = \frac{\sqrt{6}}{2 \cdot \frac{\sqrt{6}}{3}} = \frac{3}{2}$$

$$\therefore \frac{3}{2}$$

<손풀이>



$$\cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{3}} \rightarrow \sin \alpha = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$$

$$\begin{aligned} \overline{PQ} &= \sqrt{8 + 6 - 2 \times 2\sqrt{2} \times \sqrt{6} \times \frac{1}{\sqrt{3}}} \\ &= \sqrt{6} \end{aligned}$$

$$R = \frac{\overline{PQ}}{2\sin \alpha} = \frac{\sqrt{6}}{\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}}} = \frac{3}{2}$$

25-4. ②

$a_{n+1} - a_n = -k$ 또는 $a_{n+1} - a_n = 1$ 이므로

$a_5 = 10$ 에서 a_1 이 될 수 있는 값은 $6, 7+k, 8+2k, 9+3k, 10+4k$

따라서 모든 a_1 의 값의 합은 $f(k) = 40 + 10k$

$$100 \leq 40 + 10k \leq 200$$

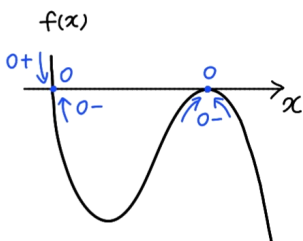
$$60 \leq 10k \leq 160, 6 \leq k \leq 16$$

$$\therefore \text{모든 } k \text{의 값의 합은 } \frac{6+16}{2} \times 11 = 121$$

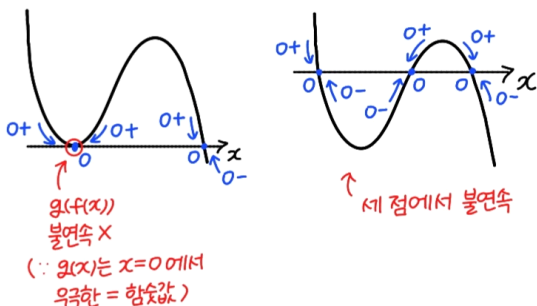
25-5. 72

조건 (가)에 따르면 함수 $(g \circ f)(x)$ 의 불연속인 점의 개수는 2인데, 함수 $g(x)$ 가 $x=0$ 에서

(좌극한) $\neq$ (우극한) = (함숫값)인 불연속이므로
삼차함수 $f(x)$ 가 다음 그림과 같이 생겨야 조건 (가)를
만족시킨다.



* 다른 형태는 안되는 이유



또한 조건 (나)에 따르면 함수 $(f \circ g)(x)$ 는 실수 전체의
집합에서 연속인데

함수 $g(x)$ 가 $x=0$ 에서 불연속이고

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} g(x) = -4, \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = g(0) = 0 \text{ 이므로}$$

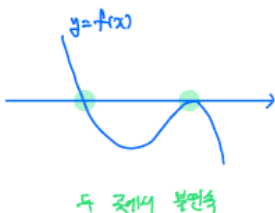
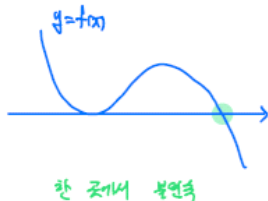
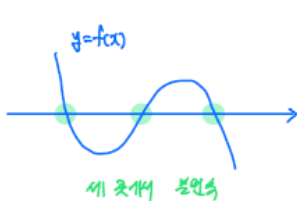
조건 (나)를 만족시키려면 $f(-4) = f(0)$ 이어야 한다.

$$\text{이때, } f(0) = 0 \text{ 이므로 } f(x) = -(x+4)x^2$$

$$\therefore f(-6) = 72$$

<손풀이>

(가) $g[f(x)] \rightarrow \therefore f(x)=0$ 인 x 에서 불연속 가능
↳ $x=0$ 불연속



(4) $f(g(x))$: $x=0$ 에서 연속

$$f(-4) = f(0)$$

$$\therefore f(x) = -x^2(x+4)$$

$$\therefore f(-6) = 72$$

25-6. ③

$f(x) = x^2 - 4x$ 라 하고, $P(t, f(t))$, $Q(s, f(s))$ 라 하자.

직선 PQ의 기울기가 1이므로 $\frac{f(s) - f(t)}{s - t} = 1$ 이고

$$\frac{s^2 - 4s - t^2 + 4t}{s - t} = 1, \quad s^2 - t^2 - 4(s - t) = s - t,$$

$$(s - t)(s + t) - 4(s - t) = s - t \text{ 이므로 } s = 5 - t \quad (\because s \neq t)$$

$\overline{OA} = \overline{AB} = 2\sqrt{5}$ 이므로 삼각형 OAP의 넓이는

$$\frac{1}{2} \times 2\sqrt{5} \times \frac{|2t + f(t)|}{\sqrt{5}} = -f(t) - 2t$$

삼각형 ABP의 넓이는

$$\frac{1}{2} \times 2\sqrt{5} \times \frac{|2s - f(s) - 8|}{\sqrt{5}} = 2s - f(s) - 8 = 2 - 2t - f(5 - t)$$

두 삼각형 OAP와 OBP의 넓이의 합을 $g(t)$ 라 하면

$$g(t) = -f(t) - f(5 - t) - 4t + 2 = -2t^2 + 6t - 3$$

이때 $g'(t) = -4t + 6$ 에서 $t = \frac{3}{2}$ 일 때, 함수 $g(t)$ 가

최대이므로

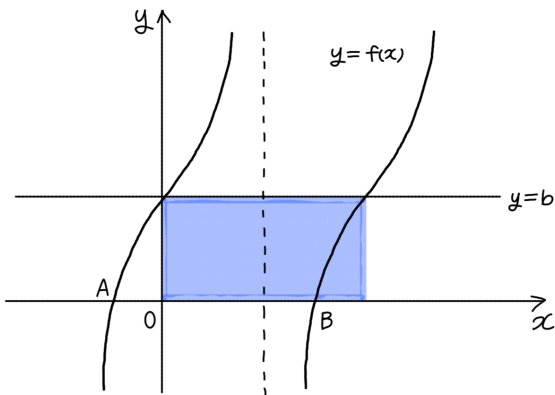
$$\therefore g\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{3}{2}$$

25-7. ②

$$\overline{AB} + \overline{OA} = \frac{5}{8}\pi \text{ 에서 } \overline{AB} = \frac{\pi}{2}$$

$$(\because f(x) = a \tan 2x + b \text{의 주기} = \frac{\pi}{2}) \text{ 이므로 } \overline{OA} = \frac{\pi}{8}$$

곡선 $y = f(x)$ 와 직선 $y = b$ 및 x 축으로 둘러싸인 부분의 넓이는 아래 그림에서 색칠한 부분의 넓이와 같으므로



$$\frac{\pi}{2} \times b = 4\pi \text{ 에서 } b = 8$$

앞서 구한대로 $\overline{OA} = \frac{\pi}{8}$ 이므로 점 A의 좌표는 $(-\frac{\pi}{8}, 0)$ 이고

이를 $f(x) = a \tan 2x + 8$ 에 대입하여 a 의 값을 구하면 $a = 8$

$$\therefore a + b = 16$$

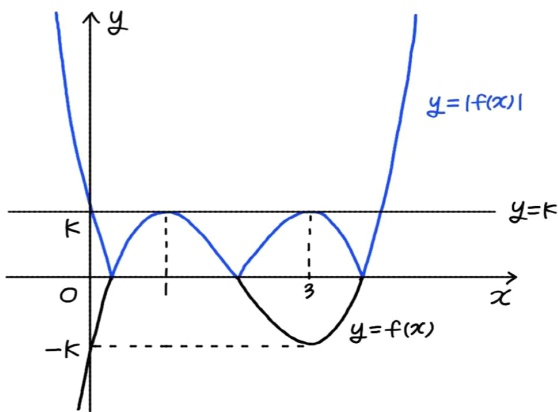
25-8. ①

조건 (가), (나)에 의하여 $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + b$

이때, $f'(x) = 3x^2 - 12x + 9 = 3(x-1)(x-3)$ 이므로

$x = 1$ 일 때 극대이고 $x = 3$ 일 때 극소

조건 (다)를 만족시키려면 다음 그림과 같이 함수 $f(x)$ 의 극댓값과 극솟값의 절댓값이 같아야 한다.



$$f(1) = b + 4, f(3) = b \text{ 이므로 } b + 4 = -b \text{ 이고 } b = -2$$

$$\therefore f(0) = b = -2$$

확률과 통계

25-9. ⑤

$$P(A^c \cap B) = P(B - A) = \frac{3}{7} \text{ 이므로}$$

$$P(A \cup B) - P(B - A) = P(A) = \frac{3}{14}$$

$$\therefore P(A^c) = 1 - P(A) = \frac{11}{14}$$

25-10. ⑤

표본의 크기가 16이고 표본평균은 $\bar{x}$, 모표준편차가 σ 일 때, 신뢰도 95%의 신뢰구간은

$$\bar{x} - 1.96 \times \frac{\sigma}{4} \leq m \leq \bar{x} + 1.96 \times \frac{\sigma}{4}$$

$$\text{즉, } \alpha - 19.6 = \bar{x} - 1.96 \times \frac{\sigma}{4}, \alpha = \bar{x} + 1.96 \times \frac{\sigma}{4}$$

α 와 $\bar{x}$ 를 소거하여 계산하면 $\sigma = 20$

$$P(m - 26.8 \leq X \leq m + 51.6)$$

$$\begin{aligned}
&= P\left(\frac{-26.8}{20} \leq \frac{X-m}{20} \leq \frac{51.6}{20}\right) \\
&= P(-1.34 \leq Z \leq 2.58) \\
&= P(0 \leq Z \leq 1.34) + P(0 \leq Z \leq 2.56) \\
&= 0.4099 + 0.4951 = 0.9050 \\
&\therefore 0.9050
\end{aligned}$$

25-11. 48

조건 (가)를 만족시키는 음이 아닌 정수 a, b, c 의 모든 순서쌍 (a, b, c) 의 개수는

$${}_3H_{10} = {}_{12}C_{10} = 66$$

조건 (나)에서 $a \neq 1, b \neq 2$ 이므로

i) $a = 1, b \neq 2$ 인 경우

$b+c=9$ 를 만족시키는 순서쌍 (b, c) 의 개수는

$${}_2H_9 = {}_{10}C_9 = 10 \text{이고}$$

$b=2$ 인 경우 하나 제외해주면 총 9개

ii) $a \neq 1, b=2$ 인 경우

$a+c=8$ 을 만족시키는 순서쌍 (a, c) 의 개수는

$${}_2H_8 = {}_9C_8 = 9 \text{이고}$$

$a=1$ 인 경우 하나 제외해주면 총 8개

iii) $a=1, b=2$ 인 경우

$c=7$ 이므로 1개

$$\therefore 66 - (9 + 8 + 1) = 48$$

25-12. ②

$a > 300$ 이 되려면 $n = 3, 4, 5$ 가 되어야 한다.

i) $n=3$ 이고 $a > 300$ 일 확률

$${}_5C_3 \left(\frac{1}{2}\right)^3 \left(\frac{1}{2}\right)^2 \times \frac{3}{5} = \frac{3}{16}$$

ii) $n=4$ 이고 $a > 300$ 일 확률

$${}_5C_4 \left(\frac{1}{2}\right)^4 \left(\frac{1}{2}\right) = \frac{5}{32}$$

ii) $n=5$ 이고 $a > 300$ 일 확률

$${}_5C_5 \left(\frac{1}{2}\right)^5 \left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{32}$$

$$\therefore \frac{3}{16} + \frac{5}{32} + \frac{1}{32} = \frac{3}{8}$$

미적분**25-9. ④**

조건 (가)에서 $f\left(\frac{\pi}{3}\right) = a \times \frac{\pi}{3} \times \frac{1}{2} + b \times \frac{\pi}{3} = 0$ 이므로

$$a = -2b \quad \dots \textcircled{㉠}$$

조건 (나)에서 $f'(\pi) = -3$ 이고

$f'(x) = a \cos x - ax \sin x + b$ 이므로

$$f'(\pi) = -a + b = -3 \quad \dots \textcircled{㉡}$$

㉠과 ㉡을 연립하면 $a=2, b=-1$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} \frac{f(x)}{3x - \pi} = \frac{f'\left(\frac{\pi}{3}\right)}{3} = -\frac{\sqrt{3}\pi}{9} = k\pi \text{ 이므로}$$

$$\therefore \frac{1}{k^2} = 27$$

25-10. ㉢

함수 $f'(x) = \frac{2x+2}{x^2+2x+1}$ 이므로 $x > -1$ 에서 $f(x)$ 는

증가함수

또한 $f'(0) = 2$ 이므로 곡선 $y = f(x)$ 위의 점 $(0, 0)$ 에서의 직선의 방정식은 $y = 2x$

곡선 $y = f(x)$ 위의 점 $(a, f(a))$ 에서의 직선의 기울기가 m 일 때,

$$\tan \theta = \frac{2-m}{1+2m} = \frac{6}{13} \text{ 이므로 } m = \frac{4}{5}$$

$$f'(a) = \frac{2a+2}{a^2+2a+1} = \frac{4}{5} \text{ 에서 } a = \frac{3}{2}$$

$$\therefore a = \frac{3}{2}$$

25-11. 4

$$\int_0^2 \{f'(x)\}^2 dx = \left[f(x)f'(x) \right]_0^2 - \int_0^2 f(x)f''(x) dx$$

$$\text{이때, } \left[f(x)f'(x) \right]_0^2 = 0 \text{ 이므로}$$

$$\int_0^2 \{f'(x)\}^2 dx = - \int_0^2 f(x)f''(x) dx$$

$$= \int_0^2 (x - f'(x)) dx$$

$$= \left[\frac{x^2}{2} - f(x) \right]_0^2 = 2 - f(2)$$

$$f(x)f''(x) = f'(x) - x \text{ 에서 } f(2)f''(2) = f'(2) - 2$$

$$\text{이때, } f'(2) = 0, f''(2) = 1 \text{ 이므로 } f(2) = -2$$

$$\therefore 2 - f(2) = 4$$

<손풀이>

$$\text{㉠ } x=2 \text{ 대입 } \rightarrow f(2)f''(2) = f'(2) - 2$$

$$\rightarrow f(2) = -2 \text{ (bq(4))}$$

$$\int_0^2 \{f'(x)\}^2 dx$$

$$= \int_0^2 \underbrace{f'(x)}_{\text{그}} \cdot \underbrace{f'(x)}_{\text{저}} dx$$

$$\begin{aligned}
&= [f'(x)f(x)]_0^2 - \int_0^2 f''(x)f(x)dx \\
&= \underbrace{f'(2)f(2) - f'(0)f(0)}_{=0 \text{ (by 4)}} - \int_0^2 f'(x) \cdot x dx \text{ (by 3)} \\
&= -[f(x) - \frac{1}{2}x^2]_0^2 \\
&= -f(2) + 2 + f(0) \\
&= 4
\end{aligned}$$

25-12. ③

$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = 2$ 이고 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} f(S_n)$ 이 수렴하므로 $f(2) = 0$

급수 $\sum_{n=1}^{\infty} f(a_n)$ 이 수렴하고 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ 이므로 $f(0) = 0$

따라서 $f(x) = x^2 - 2x$

$$a_1 = f(3) = 3$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n = 2 \text{이므로}$$

등비수열 $\{a_n\}$ 의 공비를 r 이라고 할 때,

$$\frac{a}{1-r} = \frac{3}{1-r} = 2 \text{이고 정리하면 } r = -\frac{1}{2}$$

$$\therefore a_5 = 3 \times \left(-\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{3}{16}$$

<손플이>

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = 2 \rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0, \frac{a_1}{1-r} = 2$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} f(a_n) = \text{수렴} \rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) = 0 \rightarrow f(0) = 0$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} f(S_n) = \text{수렴} \rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} f(S_n) = 0 \rightarrow f(2) = 0$$

$$\therefore f(x) = x(x-2) \rightarrow a_1 = f(3) = 3$$

$$\therefore r = -\frac{1}{2} \text{ (by } \frac{a_1}{1-r} = 2 \text{)}$$

$$\therefore a_5 = 3 \times \left(-\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{3}{16}$$

Day. 26

수학1, 수학2



26-1. ②

극한값의 조건에 의하여 $\int_1^1 f(t)dt - f(1) = 0$

$$\therefore f(1) = 0 \quad \dots \textcircled{㉠}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x^2 - 1} \left\{ \int_1^x f(t)dt - f(x) \right\} = \frac{1}{2} \{f(1) - f'(1)\} = 2$$

$$\therefore f'(1) = -4 \quad \dots \textcircled{㉡}$$

㉠, ㉡에 의해 $f(x) = x^2 - 6x + 5$

$$\therefore f(2) = 4 - 12 + 5 = -3$$

26-2. ③

$$P_n((\log_2 n)^2, \log_2 n), P_{n+1}(\{\log_2(n+1)\}^2, \log_2(n+1))$$

이므로

$$a_n = \frac{\log_2(n+1) - \log_2 n}{\{\log_2(n+1)\}^2 - (\log_2 n)^2}$$

$$= \frac{1}{\log_2(n+1) + \log_2 n}$$

$$= \frac{1}{\log_2(n^2 + n)}$$

$$\therefore \frac{1}{a_n} = \log_2(n^2 + n), \quad 2^{\frac{1}{a_n}} = n^2 + n$$

$$\therefore \sum_{n=1}^{10} 2^{\frac{1}{a_n}} = \sum_{n=1}^{10} (n^2 + n) = 440$$

26-3. 770

$$\overline{OP_n} = \overline{OQ_n} = \sqrt{n^2 + \frac{1}{n^2}}$$

$$\overline{P_n Q_n} = \sqrt{2 \left(n - \frac{1}{n} \right)^2}$$

$$\cos \theta_n = \frac{n^2 + \frac{1}{n^2} + n^2 + \frac{1}{n^2} - 2n^2 + 4 - \frac{2}{n^2}}{2 \cdot \left(n^2 + \frac{1}{n^2} \right)}$$

$$= \frac{4}{2 \cdot \left(n^2 + \frac{1}{n^2} \right)} = \frac{2n^2}{n^4 + 1}$$

$$\therefore \sum_{n=1}^{10} \{(n^4 + 1) \cos \theta_n\} = \sum_{n=1}^{10} 2n^2 = 770$$

26-4. ①

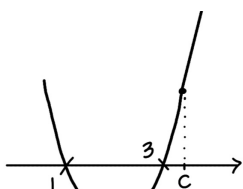
$f(x)$ 가 실수 전체의 집합에서 미분가능하므로 $y = ax + b$ 는
 $y = x^2 - 4x + 3$ 의 $x = c$ 에서의 접선의 방정식

$f(x) = 0$ 의 모든 실근의 합이 $\frac{17}{4}$ 인데

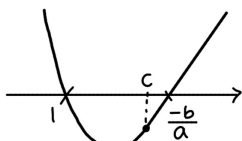
$$x^2 - 4x + 3 = (x-1)(x-3) \text{ 이므로}$$

$$1+3 \neq \frac{17}{4} \text{ 이고 따라서 } c < 3$$

또한, $x = c$ 에서의 접선이 $\left(\frac{13}{4}, 0\right)$ 을 지나야 한다.



서로 다른 모든
 실근의 합: 4 (X)



서로 다른 모든
 실근의 합: $1 - \frac{b}{a} = \frac{17}{4}$

$y = x^2 - 4x + 3$ 의 $x = c$ 에서의 접선의 방정식은

$y = (2c-4)(x-c) + c^2 - 4c + 3$ 이고 $\left(\frac{13}{4}, 0\right)$ 를 지나므로

$$0 = (2c-4)\left(\frac{13}{4} - c\right) + c^2 - 4c + 3$$

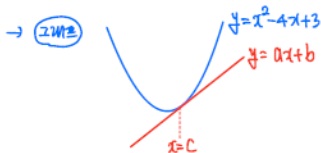
$$\text{즉, } 2c^2 - 13c + 20 = 0 \text{에서 } c = \frac{5}{2}$$

$$\therefore S = \int_1^{\frac{5}{2}} (-x^2 + 4x - 3) dx + \int_{\frac{5}{2}}^{\frac{13}{4}} \left(-x + \frac{13}{4}\right) dx = \frac{45}{32}$$

* S 를 구할 때, 이차함수의 넓이 공식과 삼각형 넓이를 이용하여 계산할 수 있다.

<손풀이>

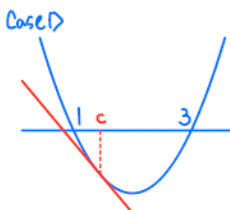
$f(x)$: $x=c$ 에서 미분가능



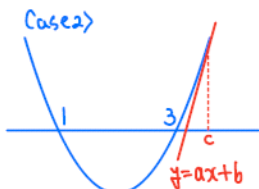
$$\therefore x^2 - (4+a)x + 3-b = (x-c)^2$$

$$\text{or } D = (4+a)^2 - 4(3-b) = 0 \quad \text{--- ①}$$

$f(x)=0$ 의 서로 다른 모든 실근의 합 = $\frac{17}{4}$

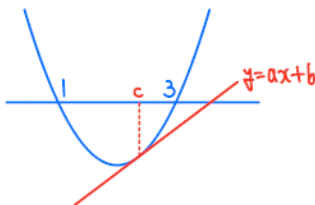


$f(x)=0 \rightarrow x=1 \rightarrow 3$



$f(x)=0 \rightarrow x=1, 3 \rightarrow 3$

Case 2)



$$f(x)=0 \rightarrow x=1, -\frac{b}{a}$$

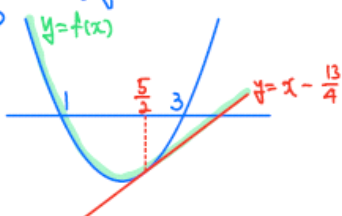
$$\rightarrow 1 - \frac{b}{a} = \frac{17}{4} \rightarrow \frac{b}{a} = -\frac{13}{4}$$

$$\rightarrow a^2 - 5a + 4 = 0 \text{ (by ④)}$$

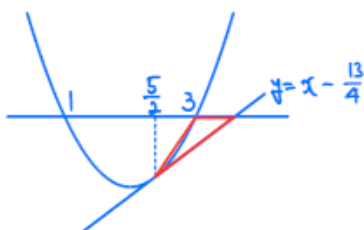
$$\rightarrow a=1 \text{ or } a=4$$

$$\rightarrow a=1 \text{ (by } a=4 \text{ 일 때는 Case 2)}$$

$$\rightarrow y=f(x)$$



또는



$$S = \frac{1}{6}(2)^3 + \frac{1}{2}\left(\frac{13}{4} - 3\right) \times \frac{3}{4} - \frac{1}{6}\left(3 - \frac{5}{2}\right)^3 = \frac{45}{32}$$

$$\therefore S = \int_1^{\frac{5}{2}} (x^2 - 4x + 3) dx + \int_{\frac{5}{2}}^{\frac{13}{4}} -(x - \frac{13}{4}) dx = \frac{45}{32}$$

26-5. 14

함수 $f(x)$ 가 연속이 되려면 분모가 0이 되면 안되므로 $a \geq 3$

함수 $\sqrt{f(x)}$ 가 연속이려면 $\sqrt{\quad}$ 안의 식이 항상 0 이상이어야

하므로 $D = a^2 - 16a \leq 0$

따라서 $3 \leq a \leq 16$ 이고 총 14개

26-6. ②

i) a_1 이 홀수인 경우

$$a_2 = 2a_1$$

$$a_3 = 2a_1 + 1$$

$$a_4 = 4a_1 + 2$$

$$a_5 = 4a_1 + 3$$

$$a_2 \times a_5 = 2a_1(4a_1 + 3)$$

$$50 < 2a_1(4a_1 + 3) < 150$$

에서 $a_1 = 3$

ii) a_1 이 짝수인 경우

$$a_2 = a_1 + 1$$

$$a_3 = a_1 + 2$$

$$a_4 = a_1 + 3$$

$$a_5 = a_1 + 4$$

$$a_2 \times a_5 = (a_1 + 1)(a_1 + 4)$$

$$50 < (a_1 + 1)(a_1 + 4) < 150$$

에서 $a_1 = 6$ 또는 $a_1 = 8$

i), ii)에 의하여 모든 a_1 의 값의 합은

$$3 + 6 + 8 = 17$$

<손풀이>

$$a_2 \rightarrow a_3 = a_2 + 1 \begin{cases} a_3: \text{홀} & a_4 = 2a_3 = 2a_2 + 2 \rightarrow a_5 = 2a_2 + 3 \\ a_3: \text{짝} & a_4 = a_3 + 1 = a_2 + 2 \rightarrow a_5 = a_2 + 3 \end{cases}$$

$$\textcircled{1} a_3: \text{홀} \rightarrow a_2: \text{짝}$$

$$50 < a_2(2a_2 + 3) < 150$$

$$a_2 = 6 \rightarrow a_1 = 3$$

$$\textcircled{2} a_3: \text{짝} \rightarrow a_2: \text{홀}$$

$$50 < a_2(a_2 + 3) < 150$$

$$a_2 = 7, 9 \rightarrow a_1 = 6, 8$$

26-7. ③

$f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 8$ 에서

$f'(x) = 3x^2 - 12x + 9 = 3(x-1)(x-3)$ 이므로

$f(x)$ 는 $x=1$ 에서 극댓값 12를 가지고 $x=3$ 에서 극솟값 8을 가진다.

또한 함수 $g(x)$ 가 미분가능하므로 $a=1$ 또는 $a=3$

$\int_t^{t+2} g(x)dx$ 의 최댓값은 $a=1$, $t \geq 1$ 일 때,

$$\therefore \int_t^{t+2} g(x)dx = 24$$

<손풀이>

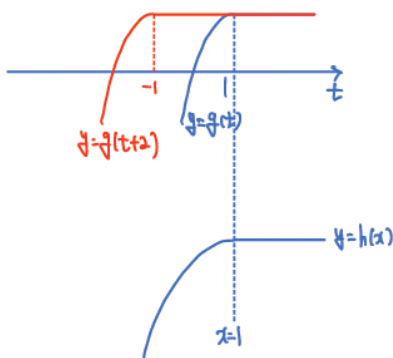
$$f'(x) = 3x^2 - 12x + 9 = 3(x-1)(x-3)$$

$$f'(a) = 0 \quad (\text{by } f: \text{미분})$$

$$\Rightarrow a = 1 \text{ or } 3$$

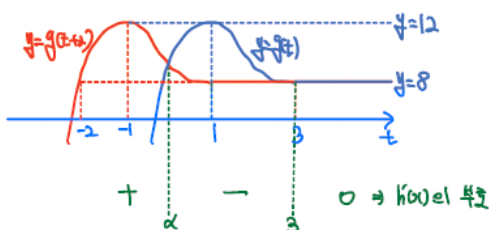
$$\text{Let } h(x) = \int_t^{t+2} g(x) dx \rightarrow h'(x) = g(t+2) - g(t)$$

① $a=1$



$$\therefore h(x) \leq h(1) = \int_1^3 g(x) dx = 24$$

② $a=3$



$$h(x) \leq h(\alpha) = \int_{\alpha}^{t+2} g(x) dx < 24 \quad (\text{by } g(x) \text{의 최대값}=12)$$

26-8. ①

점 Q_n 은 직선 $y=x$ 위의 점이고 조건 (가)에 따라

$$\overline{OQ_n} = \sqrt{2} \times n \text{ 이므로 점 } Q_n \text{의 좌표는 } (n, n)$$

$\overline{P_n Q_n} = \sqrt{2} \times u$ 라고 하면 직선 $P_n Q_n$ 의 기울기가 -1 이므로 점 P_n 의 좌표는 $(n-u, n+u)$

$$y = \log_2 \frac{x-a}{2^a} = \log_2(x-a) - a \text{ 이므로}$$

$y = \log_2 x$ 그래프를 x 축 방향으로 a 만큼, y 축 방향으로 $-a$ 만큼 평행이동 한 것과 같다.

따라서 점 R_n 의 좌표는 $(n+u+a, n-u-a)$

($y=2^x$ 와 $y=\log_2 x$ 가 역함수 관계이므로 $(n-u, n+u)$ 을 $y=x$ 대칭시킨 좌표인

$(n+u, n-u)$ 에서 x 축 방향으로 a 만큼, y 축 방향으로 $-a$ 만큼 평행이동 시킨 것)

$$\text{즉, } a_n = n-u \text{ 이고 } b_n = n+u+a$$

$$\therefore a_n + b_n = 2n + a$$

$$\sum_{k=1}^{10} a_k + \sum_{k=1}^{10} b_k = \sum_{k=1}^{10} (a_k + b_k) = 110 + 10a = 130$$

$$\therefore a = 2$$

확률과 통계



26-9. ⑤

$f(a) = f(b)$ 가 성립하기 위해서는 다음 두 가지 경우 중 하나를 만족해야 한다.

i) $a = b$

ii) $a \neq b$ 이고 $x = \frac{a+b}{2}$ 가 곡선 $y = f(x)$ 의 대칭축 $\left(x = \frac{k}{2}\right)$

$$f(a) = f(b) \text{ 일 확률은 } \frac{5}{18} = \frac{10}{36} \text{ 이고}$$

이는 i), ii)를 만족하는 경우가 10가지임을 의미

이때, i)의 경우를 만족하는 순서쌍 (a, b) 의 개수는 6 이고

따라서 ii)의 경우를 만족하는 순서쌍 (a, b) 의 개수는 4

이를 만족시키는 실수 k 는 5, 6, 8, 9

$$\therefore 5 + 6 + 8 + 9 = 28$$

26-10. 3

동전이 모두 앞면이 나올 확률은 $\frac{1}{4}$ 이고 그 외의 경우는 $\frac{3}{4}$

이 시행을 100번 할 때, 두 동전이 모두 앞면이 나오는 시행의 횟수를 확률변수 Y 라 하면 확률변수 Y 는 이항분포

$B\left(100, \frac{1}{4}\right)$ 를 따른다.

$$\text{따라서 } E(Y) = 100 \times \frac{1}{4} = 25, \quad V(Y) = 100 \times \frac{1}{4} \times \frac{3}{4} = \frac{75}{4}$$

$$X = 3Y - (100 - Y) = 4Y - 100$$

$$\text{따라서 } V(X) = V(4Y - 100) = 16 \times \frac{75}{4} = 300$$

$$\therefore V\left(\frac{X-5}{10}\right) = \frac{V(X)}{100} = 3$$

26-11. 34

A, B, C, D가 받는 공의 개수를 각각 a, b, c, d 라 하자.

조건 (가)에 따라 A는 3, 5, 7개의 공을 받을 수 있다.

조건 (나)에서 b 는 적어도 하나의 공을 받으므로 $b = b' + 1$ (단, b' 는 음이 아닌 정수)이라 할 수 있다.

c, d 가 음이 아닌 정수이므로

i) $a = 3$ 인 경우

$b + c + d = 6$ 에서 $b' + c + d = 5$ 이고 b', c, d 가 음이 아닌 정수이므로

$$\text{순서쌍 } (b', c, d) \text{의 개수는 } {}_3H_5 = {}_7C_5 = 21$$

ii) $a = 5$ 인 경우

$b + c + d = 4$ 에서 $b' + c + d = 3$ 이고 b', c, d 가 음이 아닌 정수이므로

$$\text{순서쌍 } (b', c, d) \text{의 개수는 } {}_3H_3 = {}_5C_3 = 10$$

iii) $a = 7$ 인 경우

$b + c + d = 2$ 에서 $b' + c + d = 1$ 이고 b', c, d 가 음이 아닌 정수이므로

순서쌍 (b', c, d) 의 개수는 ${}_3H_1 = {}_3C_1 = 3$

$\therefore$ 구하는 경우의 수는 $21 + 10 + 3 = 34$

26-12. 16

$\sum_{k=1}^3 a_k = 4$ 일 때, 주사위의 눈의 수가 3의 배수인 횟수가 홀수일

확률은

$$\frac{{}_3C_1 \times \frac{1}{6} \times \frac{1}{6^2} + 3! \times \frac{1}{6} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{6}}{{}_3C_2 \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{6^2} + {}_3C_2 \times \frac{1}{2^2} \times \frac{1}{6}} = \frac{5}{11} \text{ 이므로}$$

$p = 11, q = 5$

$\therefore p + q = 16$

<손풀이>

a_n	3의 배수	3의 배수 x
0	① $\frac{1}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{6}$	② $\frac{2}{3} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{6}$
1	③ $\frac{1}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{6}$	④ $\frac{2}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{3}$
2	⑤ 0	⑥ $\frac{2}{3} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{6}$

(1) : $a_1 + a_2 + a_3 = 4$

i) 2 2 0 : $\frac{3!}{2!} \times \left(\frac{1}{6}\right)^2 \times \left(\frac{1}{6} + \frac{1}{6}\right)$ 배열 ①+②

ii) 2 1 1 : $\frac{3!}{2!} \times \left(\frac{1}{6}\right) \times \left(\frac{1}{6} + \frac{1}{3}\right)$ ③+④

(2) : $a_1 + a_2 + a_3 = 4$ & 3의 배수 1번

iii) 2 2 0 : $\frac{3!}{2!} \times \left(\frac{1}{6}\right)^2 \times \frac{1}{6}$ ①

iv) 2 1 1 : $3! \times \frac{1}{6} \times \frac{1}{6} \times \frac{1}{3}$ ③ ④

$$\text{확률} = \frac{\text{iii) + iv)}}{\text{i) + ii)}} = \frac{5}{11}$$

미적분

26-9. ⑤

$f(x) = \ln(x^2 + 1) - tx + t$ 의 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$f'(x) = \frac{2x}{x^2 + 1} - t$$

이때, 함수 $h(x) = \frac{2x}{x^2+1}$ 라 하면 $f'(x) = 0$ 이 되는 x 는 곡선

$y = h(x)$ 와 직선 $y = t$ 의 교점의 x 좌표

$0 < t < 1$ 일 때, 곡선 $y = h(x)$ 와 직선 $y = t$ 의 교점의 개수는 항상 2개

이때, 서로 다른 두 교점의 x 좌표를 각각 α, β 라 하면

$$f'(\alpha) = f'(\beta) = 0$$

($x = \alpha, x = \beta$ 근처에서 $f'(x)$ 의 부호가 바뀜)

따라서 모든 극값의 합은 $f(\alpha) + f(\beta)$

$$f'(\alpha) = 0 \text{에서 } \alpha^2 + 1 = \frac{2\alpha}{t}, f'(\beta) = 0 \text{에서}$$

$$\beta^2 + 1 = \frac{2\beta}{t} \text{이므로}$$

$$f(\alpha) + f(\beta) = \ln\left(\frac{4\alpha\beta}{t^2}\right) - t(\alpha + \beta) + 2t$$

방정식 $f'(x) = 0$ 의 서로 다른 두 실근이 α, β 이므로

$$\alpha + \beta = \frac{2}{t}, \alpha\beta = 1$$

$$\text{따라서 } f(\alpha) + f(\beta) = \ln 4 - 2\ln t - 2 + 2t$$

즉, 실수 t 에 대하여 $g(t) = 2t - 2\ln t + \ln 4 - 2$ 이므로

$$g'(t) = 2 - \frac{2}{t}$$

$$\therefore g'\left(\frac{1}{4}\right) = -6$$

26-10. ④

방정식 $x^2 = nx$ 에서 $x(x-n) = 0$ 이므로 점 P_n 의 좌표는 (n, n^2)

점 Q_n 의 x 좌표를 t ($0 < t < n$)라 하고 점 Q_n 에서 직선 OP_n 에 내린 수선의 발을 R_n 이라 하자.

$\overline{Q_n R_n}$ 이 최대일 때, 삼각형 $OP_n Q_n$ 의 넓이가 최대

$$\overline{Q_n R_n} = \frac{|nt - t^2|}{\sqrt{n^2 + 1}} = \frac{\left| -\left(t - \frac{n}{2}\right)^2 + \frac{n^2}{4} \right|}{\sqrt{n^2 + 1}}$$

이므로 $0 < t < n$ 에서 $t = \frac{n}{2}$ 일 때, $\overline{Q_n R_n}$ 의 최댓값은

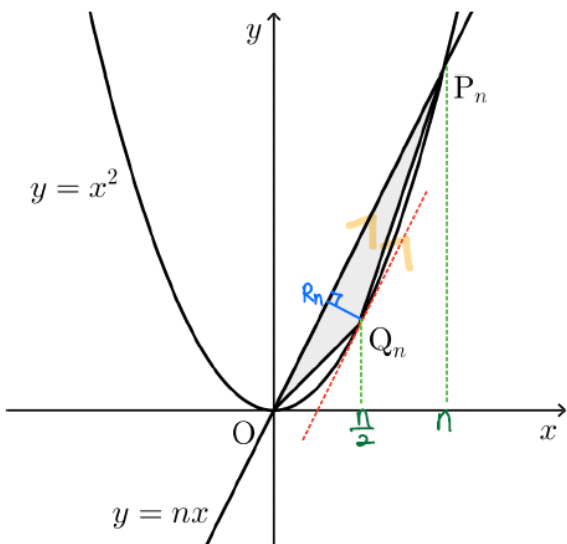
$$\frac{n^2}{4\sqrt{n^2 + 1}}$$

$$\overline{OP_n} = \sqrt{n^2 + n^4} \text{이므로}$$

$$S_n = \frac{1}{2} \times \sqrt{n^2 + n^4} \times \frac{n^2}{4\sqrt{n^2 + 1}} = \frac{n^3}{8}$$

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S_n}{n^3 + 1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3}{8(n^3 + 1)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{8\left(1 + \frac{1}{n^3}\right)} = \frac{1}{8}$$

<손풀이>



$$S_n = \frac{1}{6} \cdot n^3 - \left\{ \frac{1}{6} \cdot \left(\frac{n}{2}\right)^3 + \frac{1}{6} \left(\frac{n}{2}\right)^3 \right\}$$

$$= \frac{1}{8} n^3$$

26-11. ①

$$S = \int_1^e \left\{ e^x \ln x - \left(-\frac{e^x}{x^2} \right) \right\} dx = \int_1^e \left(e^x \ln x + \frac{e^x}{x^2} \right) dx$$

$$\begin{aligned} \text{이때, } \int_1^e e^x \ln x \, dx &= \left[e^x \ln x \right]_1^e - \int_1^e \frac{e^x}{x} \, dx \\ &= \left[e^x \ln x \right]_1^e - \left(\left[\frac{e^x}{x} \right]_1^e + \int_1^e \frac{e^x}{x^2} \, dx \right) \\ &= e^e - e^{e-1} + e - \int_1^e \frac{e^x}{x^2} \, dx \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S &= \int_1^e \left(e^x \ln x + \frac{e^x}{x^2} \right) dx \\ &= e^e - e^{e-1} + e - \int_1^e \frac{e^x}{x^2} \, dx + \int_1^e \frac{e^x}{x^2} \, dx = e^e - e^{e-1} + e \end{aligned}$$

26-12. 20

곡선 $y = \sin x$ 위의 점 $(t, \sin t)$ 에서의 접선은 $y = \cos t(x - t) + \sin t$ 이고이 접선이 $\left(\frac{\pi}{2}, 0\right)$ 을 지나므로 $0 = \cos t\left(\frac{\pi}{2} - t\right) + \sin t$,

$$\tan t = t - \frac{\pi}{2}$$

$$\left(n - \frac{1}{2}\right)\pi < a_n < \left(n + \frac{1}{2}\right)\pi \text{ 이고 } \tan(a_{n+k}) = a_{n+k} - \frac{\pi}{2}$$

이므로

$$(n+k-1)\pi < \tan(a_{n+k}) < (n+k)\pi$$

따라서

$$\sum_{k=0}^{n-1} \left(1 + \frac{k}{n}\right) \frac{\pi}{n} < \sum_{k=1}^n \frac{1}{n^2} \times \tan(a_{n+k}) < \sum_{k=1}^n \left(1 + \frac{k}{n}\right) \frac{\pi}{n}$$

이고

n 이 무한대로 갈 때 좌우 값은 모두 $\pi \int_1^2 x dx = \frac{3}{2}\pi$ 으로

수렴하므로

수열 극한의 대소관계에 의해

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{n^2} \times \tan(a_{n+k}) = \frac{3}{2}\pi \text{ 이고 } \frac{p}{\pi} \times \frac{3}{2}\pi = 30 \text{ 이므로}$$

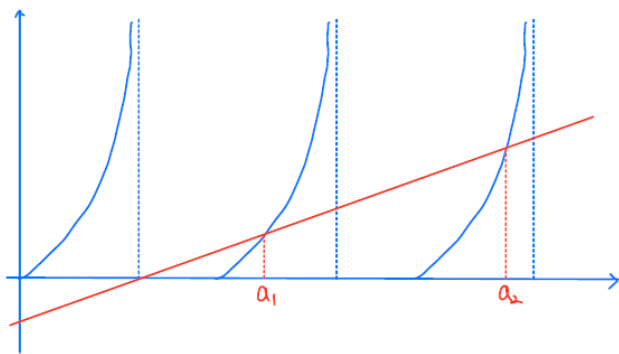
$$\therefore p = 20$$

<손풀이>

$$y = (\cos t)(x - t) + \sin t$$

$$0 = \left(\frac{\pi}{2} - t\right) \cos t + \sin t$$

$$t - \frac{\pi}{2} = \tan t$$



$$\frac{\pi}{2} < a_1 < \frac{3\pi}{2}$$

$$\frac{3\pi}{2} < a_2 < \frac{5\pi}{2}$$

$\vdots$

$$\Rightarrow \frac{2n-1}{2}\pi < a_n < \frac{2n+1}{2}\pi$$

$$\tan a_{n+k} = a_{n+k} - \frac{\pi}{2} \text{ 이므로}$$

$$\frac{2(n+k)-2}{2}\pi < \tan a_{n+k} = a_{n+k} - \frac{\pi}{2} < \frac{2(n+k)}{2}\pi$$

$$\left(1 + \frac{k-1}{n}\right)\pi \times \frac{1}{n} < \frac{1}{n^2} \tan a_{n+k} < \left(1 + \frac{k}{n}\right)\pi \cdot \frac{1}{n}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n \left(1 + \frac{k}{n}\right)\pi \cdot \frac{1}{n} < \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{n^2} \tan a_{n+k} < \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \left(1 + \frac{k}{n}\right)\pi \cdot \frac{1}{n}$$

$$\parallel$$

$$\pi \int_1^2 x dx$$

$$\parallel$$

$$\pi \int_1^2 x dx$$

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{n^2} \tan a_{n+k} = \pi \cdot \int_1^2 x dx = \frac{3}{2}\pi$$

$$\therefore p = 20$$