백일대장

수능 역전을 위한 백일 전략서

03

정답 및 해설

100人대장

Day. 15

수학1, 수학2

15-1. ②

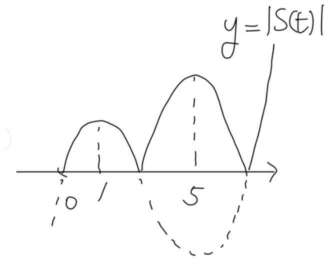
$v(t)=3(t-1)(t-5)$ 이므로

$S(t)=\int v(t)dt=t^3-9t^2+15t$ 이고,

점 P가 원점에서 가장 멀리 떨어져 있을 때는

$0 \le t \le 6$에서 $|S(t)|$가 최대일 때이다.

$0 \le t \le 6$에서 함수 $|S(t)|$의 그래프의 개형은 다음과 같다.



따라서 $t=5$ 일 때 점 P가 원점에서 가장 멀리 떨어져 있다.

$t=5$일 때까지 총 움직인 거리는

$$\int_0^5 |v(t)|dt=\int_0^1 v(t)dt-\int_1^5 v(t)dt$$

$$=2S(1)-S(5)=14+25=39$$ 이다.

15-2. 27

등차수열 $\{a_n\}$의 공차를 d라 할 때

$$\sum_{k=1}^{5}\{(a_{k+1})^2-(a_k)^2\}=(a_6)^2-(a_1)^2$$

$$=(3+5d)^2-3^2=315$$

$(3+5d)^2=324=18^2$에서 $d=3\,(\because d>0)$

$a_9=3+8d=27$

<손풀이>

sol) $315=\sum_{k=1}^{5} d\cdot(a_{k+1}+a_k)$

$=d\times\left\{\frac{5\{a_2+a_6\}}{2}+\frac{5\{a_1+a_5\}}{2}\right\}$

$=d\times 5\{a_4+a_3\}$

$=d\times 5\{6+5d\}$

$5d^2+6d-63=0$

$(d-3)(5d+21)=0$

$d=3$

sol2) $315 = \sum_{k=1}^{5} \{(a_{k+1})^2 - (a_k)^2\}$

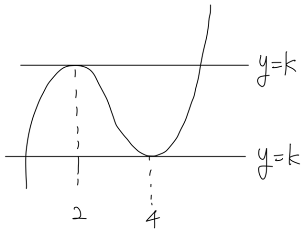
$= (a_6)^2 - (a_1)^2$

$a_6 = 18$

$\therefore a_9 = 18 + 9 = 27$

15-3. ③

방정식 $x^3-9x^2+24x-13=k$의 실근의 개수가 2이므로
직선 $y=k$가 곡선 $f(x)=x^3-9x^2+24x-13$와 두 점에서만 만나야 한다.
$f'(x)=3(x-2)(x-4)$이므로 직선 $y=k$의 위치는 다음과 같아야 한다.



따라서 $k=f(2)=7$ 또는 $k=f(4)=3$이므로
모든 실수 k의 합은 10이다.

15-4. ④

함수 $y=\tan\frac{\pi x}{4}$의 점근선은 $x=\pm 2$, $x=\pm 6$, $\cdots$이다.

함수 $y=\log_2(2x-a)=1+\log_2\left(x-\frac{a}{2}\right)$의 점근선은

$x=\frac{a}{2}$이고 a는 자연수이므로

$a=4,\ 12,\ 20,\ \cdots$일 때, 함수 $y=\tan\frac{\pi x}{4}$의 점근선과

일치한다.
따라서 $a_n=8n-4$이므로

$$\sum_{n=1}^{10} a_n = \sum_{n=1}^{10}(8n-4) = 400$$

<손풀이>

주기 = 4 → 탄젠트의 점근선 : $x = 2 \pm 4n$

로그함수의 점근선 : $x = \frac{a}{2}$

$\therefore \frac{a}{2} = 2,\ 6,\ 10,\ \cdots\cdots$

$a_n = 2 \times \{2 + 4(n-1)\}$

$= 8n - 4$

15-5. 16

$\lim\limits_{x \to a}\dfrac{(x-a)(x-2)}{(x-a)(x-b)(x-c)}=\lim\limits_{x \to a}\dfrac{x-2}{(x-b)(x-c)}>0$ 에서

분자의 극한값이 0인 경우와 0이 아닌 경우로 나누면 다음과 같다.

i) 분자의 극한값이 0인 경우, 즉 $a=2$ 인 경우

$\lim\limits_{x \to 2}\dfrac{(x-2)}{(x-b)(x-c)}$ 에서 $b \neq 2$, $c \neq 2$ 이면

극한값이 0 이므로

$b=2$ 또는 $c=2$ 이다.

$b=2$ 일 때, $\lim\limits_{x \to 2}\dfrac{1}{x-c}>0$, $2-c>0$ 이므로

($\because$ $c=2$ 이면 수렴하지 않는다.)

이를 만족시키는 자연수 c의 값은 1뿐이다.

$c=2$ 일 때도 위와 같으므로 $a=2$ 일 때 부등식을 만족시키는 순서쌍은 2개이다.

ii) 분자의 극한값이 0이 아닌 경우, 즉 $a \neq 2$ 인 경우

$\lim\limits_{x \to a}\dfrac{x-2}{(x-b)(x-c)}$ 가 수렴하려면 $a \neq b$, $a \neq c$ 이므로

$\lim\limits_{x \to a}\dfrac{x-2}{(x-b)(x-c)}=\dfrac{a-2}{(a-b)(a-c)}>0$ $\cdots$ ㉠

$a=1$ 일 때 b , c는 2 이상의 자연수이므로

$a<b$, $a<c$, $a<2$, ㉠을 만족시키지 않는다.

$a=3$ 일 때 $(3-b)(3-c)>0$

이를 만족시키는 $(b,\ c)$ 의 순서쌍은

$(1,\ 1)$, $(1,\ 2)$, $(2,\ 1)$, $(2,\ 2)$, $(4,\ 4)$ 총 5 개다.

$a=4$ 일 때 $(4-b)(4-c)>0$

b, c 가 3 이하의 자연수일 때 성립하므로 총 9 개다.

$\therefore$ $2+5+9=16$

<손풀이>

① $a=2$

$\lim\limits_{x \to a}\dfrac{(x-a)(x-2)}{(x-a)(x-b)(x-c)}$

$=\lim\limits_{x \to a}\dfrac{(x-2)}{(x-b)(x-c)}>0$

→ $b=2$ → $c=1$ → (a,b,c) 순서쌍 $=2$개

$c=2$ → $b=1$

② $a \neq 2$

$\lim\limits_{x \to a}\dfrac{(x-a)(x-2)}{(x-a)(x-b)(x-c)}$

$=\lim\limits_{x \to a}\dfrac{(x-2)}{(x-b)(x-c)}=\dfrac{(a-2)}{(a-b)(a-c)}>0$

i) $a=1 \rightarrow \dfrac{(1-2)}{(1-b)(1-c)} < 0$ 이므로 모순

ii) $a=3 \rightarrow (3-b)(3-c)>0$

$\rightarrow$ b와 c 둘다 3보다 작다 $\rightarrow$ (b. c)순서쌍 = 4개

또는

b와 c 둘다 3보다 크다 $\rightarrow$ (b. c) 순서쌍 = 1개

$\therefore$ (a.b.c) 순서쌍 = 5개

iii) $a=4 \rightarrow (4-b)(4-c)>0$

$\rightarrow$ b와 c 둘다 4보다 작다. $\rightarrow$ (b.c) 순서쌍 = 9개

$\therefore$ (a.b.c) 순서쌍 = 9개

15-6. ④

조건 (가)에서 함수 $f(x)$ 는 $x=2$ 대칭이므로

$\int_{-2}^{6} f(t)dt = 2\int_{2}^{6} f(t)dt$ 이다.

따라서

$\int_{-2}^{6} f(t)\, dt$

$= 2\int_{2}^{6} f(t)dt$

$= 2\left\{\int_{2}^{3} f(t)dt + \int_{3}^{4} f(t)dt + \int_{4}^{5} f(t)dt + \int_{5}^{6} f(t)dt\right\}$

이고

조건 (나)의 식 $\int_{k+2}^{k+3} f(t)dt = k^2+1$ 에서 k 에 $0,\ 1,\ 2,\ 3$ 을

차례대로 대입하면

$2\left\{\int_{2}^{3} f(t)dt + \int_{3}^{4} f(t)dt + \int_{4}^{5} f(t)dt + \int_{5}^{6} f(t)dt\right\}$

$= 2(1+2+5+10) = 36$

15-7. 495

삼각형 OAC, OBC, OCD 의 높이가 전부 같으므로

밑변의 길이 $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$ 는

이 순서대로 등차수열을 이룬다.

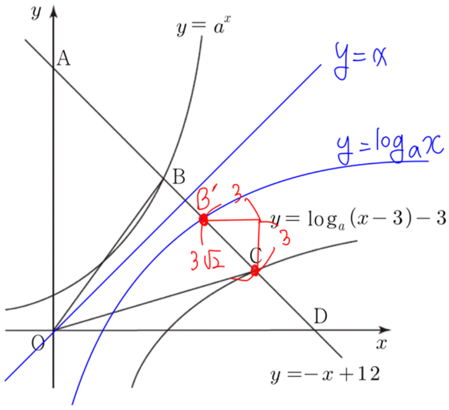
$\overline{AB}+\overline{BC}+\overline{CD}=\overline{AD}=12\sqrt{2}$ 이므로

등차중항인 $\overline{BC}=4\sqrt{2}$ 이다.

다음 그림과 같이 $y=a^x$ 의

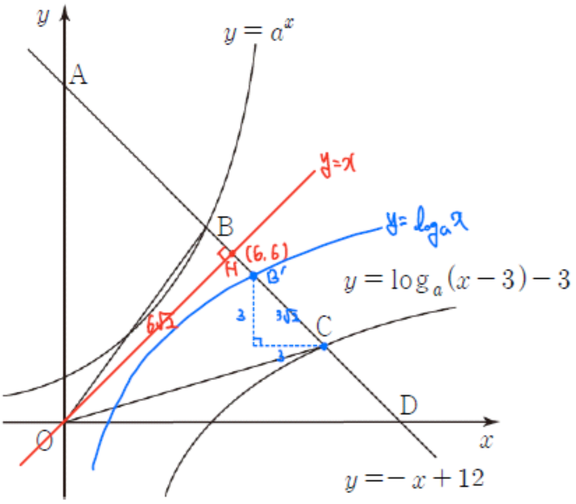
역함수인 곡선 $y=\log_a x$ 와

직선 $y=-x+12$ 의 교점을 점 B′ 이라고 하자.



점 B 와 B′ 은 $y=x$ 대칭이므로 $\overline{AB}=\overline{B'D}$ 이고,
곡선 $y=\log_a(x-3)-3$ 은 곡선 $y=\log_a x$ 를 x축으로 3,
y축으로 -3만큼 평행이동시킨 그래프이므로 $\overline{B'C}=3\sqrt{2}$ 이다.
따라서 $\overline{CD}=\overline{B'D}-\overline{B'C}=\overline{AB}-3\sqrt{2}$ 이므로
$\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$ 의 공차는 $-\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$ 이다.
$\overline{AB}=\dfrac{11}{2}\sqrt{2}$, $\overline{BC}=4\sqrt{2}$, $\overline{CD}=\dfrac{5}{2}\sqrt{2}$ 이고 삼각형의
높이는 $6\sqrt{2}$ 이므로 $S_1=33$, $S_3=15$ 이다.
$\therefore\ S_1\times S_3=495$

<손풀이>



S_1, S_2, S_3 : 등차수열 → $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$: 등차수열 (by 높이가 동일)

$\therefore\ 2\overline{BC}=\overline{AB}+\overline{CD}$, $\overline{AB}+\overline{BC}+\overline{CD}=\overline{AD}=12\sqrt{2}$

$\therefore\ \overline{BC}=4\sqrt{2} \rightarrow \overline{BB'}=\sqrt{2} \rightarrow \overline{BH}=\frac{1}{2}\sqrt{2}$

$\therefore\ B\left(\frac{11}{2}, \frac{13}{2}\right)$ (by H(6.6))

$\therefore\ \overline{AB}=\frac{11}{2}\sqrt{2} \rightarrow S_1=\frac{1}{2}\times\frac{11}{2}\sqrt{2}\times 6\sqrt{2}=33$

$C\left(\frac{19}{2}, \frac{5}{2}\right)$

$\therefore \overline{CD} = \frac{5}{2}\sqrt{2} \rightarrow S_3 = \frac{1}{2} \times \frac{5}{2}\sqrt{2} \times 6\sqrt{2} = 15$

15-8. 23

$g(t)=6$을 만족시키는 t의 값이 2개이기 위해서는 $f(x)$가 극대와 극소를 가져야 한다.

$f(x)=t$의 서로 다른 실근의 개수가 3,

즉 직선 $y=t$가 곡선 $f(x)$의 극대와 극소 사이에 위치할 때, 세 근의 합 $g(t)$는 일정하다.

($\because f(x)-t=0$의 세 실근의 합은 근과 계수의 관계에 따라 $f(x)$의 이차항의 계수로 일정.

따라서 $g(t)=6$을 만족시키는 $y=t$가 극대와 극소 사이에 위치한다면 이를 만족시키는 t는 극값 사이의 실수 전부 가능하므로

t의 값이 6과 38 뿐이라는 조건을 만족시키지 않는다.

즉, $g(t)=6$을 만족시키는 t의 값이 두 개뿐이기 위해서는 직선 $y=t$는 곡선 $y=f(x)$와 두 점 혹은 한 점에서 만나야 한다.

$f(x)=6$, $f(x)=38$의 각각의 실근의 합이 6으로 같아야 한다는 조건을 생각해보자.

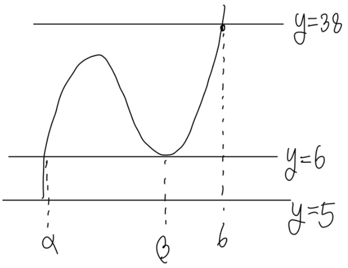
직선 $y=38$이 곡선 $f(x)$와 두 점에서 만나고 $y=6$이 한 점에서 만나는 경우, $f(x)=6$의 실근은 6이다.

이 때 $f(x)=38$의 두 실근 모두 6보다 크기 때문에 각각의 실근의 합이 같아질 수 없다.

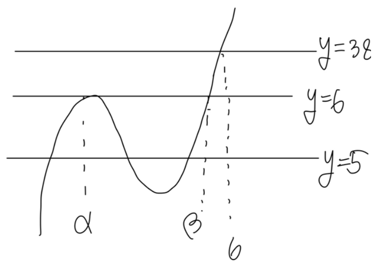
따라서, 직선 $y=6$이 곡선 $f(x)$와 두 점에서 만나야 한다.

다음과 같이 두 가지 경우를 생각할 수 있다.

i)



ii)



i)에서 $f(x)=5$의 실근이 α보다 작으므로 $g(5)<g(6)$, 조건을 만족시키지 않는다.

ii)에서 $f(x)=5$ 의 실근의 개수가 3 이면 $g(5)>g(6)$ 을 만족시킬 수 있다.

$f(x)=(x-\alpha)^2(x-\beta)+6$이고 $f(6)=38$이므로

$(6-\alpha)^2(6-\beta)=32$이다.

$\alpha+\beta=6$이므로 $\alpha(6-\alpha)^2=32$에서 $\alpha=2$ 또는 $\alpha=8$이고,

ii)에 따라 $\alpha<\beta$, 즉 $\alpha=2$, $\beta=4$ 이다.

따라서 $f(x)=(x-2)^2(x-4)+6$ 이고 $f(5)=15$이다.

한편 $f(x)=5$가 서로 다른 세 실근을 가지므로 근과 계수의 관계에 의하여 $g(5)=8$이다.

($g(5)>f(5)$ 도 만족함을 확인할 수 있다.)

$\therefore f(5)+g(5)=23$

확률과 통계

15-9. 17

$f(5)=\mathrm{P}(23\le X\le 25)$

$f(2)=\mathrm{P}(14\le X\le 16)$

$f(4)=\mathrm{P}(20\le X\le 22)$

확률 $f(5)$, $f(2)$, $f(4)$가 나타내는 범위의 길이는 모두 2이고 그 범위의 중간값은 각각 24, 15, 21이다.

이때 $f(5)<f(2)<f(4)$이므로

$|m-24|>|m-15|>|m-21|$

따라서 $m=19$

$\mathrm{P}(k-2\le X\le k+6)$의 값이 최대가 되려면 범위의 중간값이 정규분포 $\mathrm{N}(19,\ \sigma^2)$의 평균과 일치하면 되므로

$k+2=19$

따라서 $k=17$

15-10. 58

조건 (가)에 의해 $a\ne 1$, $b\ne 1$, $c\ne 1$

i) $a\ge 2$, $b\ge 2$, $c\ge 2$인 경우

$a'=a-2$, $b'=b-2$, $c'=c-2$라 놓으면

$a'+b'+c'=6$ $(a'\ge 0,\ b'\ge 0,\ c'\ge 0)$이므로

${}_3\mathrm{H}_6=28$

ii) a, b, c 중 1개가 0인 경우

$a=0$이라 가정하고 $b'=b-2$, $c'=c-2$라 놓으면

$b'+c'=8$ $(b'\ge 0,\ c'\ge 0)$이므로

${}_2\mathrm{H}_8=9$

$b=0$ 또는 $c=0$인 경우도 있으므로

$9\times 3=27$

iii) a, b, c 중 2개가 0인 경우

나머지 한 개가 12로 정해지므로

3

$\therefore$ $28+27+3=58$

15-11. ②

주사위를 한 번 던져 3의 배수의 눈이 나올 확률은 $\frac{1}{3}$

원점에 있던 점 P가 점 (6, 2)로 이동하려면 3의 배수인 눈이 2번, 3의 배수가 아닌 눈이 2번 나와야 하므로 점 P가 점 (6, 2)로 이동하는 사건을 A라 할 때

$$\mathrm{P}(A)=\frac{4!}{2!\times 2!}\left(\frac{1}{3}\right)^2\left(\frac{2}{3}\right)^2=6\times\left(\frac{1}{3}\right)^2\left(\frac{2}{3}\right)^2$$

점 P가 점 (3, 1)을 지나가려면 시행을 2번 반복하였을 때 3의 배수인 눈과 3의 배수가 아닌 눈이 각각 1번씩 나와야 하므로 점 P가 점 (3, 1)를 지나가는 사건을 B라 할 때

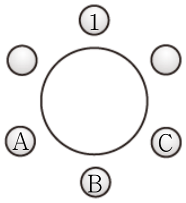
$$\mathrm{P}(A\cap B)=\left(2\times\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}\right)\times\left(2\times\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}\right)=4\times\left(\frac{1}{3}\right)^2\left(\frac{2}{3}\right)^2$$

따라서 $\mathrm{P}(B\mid A)=\dfrac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(A)}=\dfrac{4\times\left(\frac{1}{3}\right)^2\left(\frac{2}{3}\right)^2}{6\times\left(\frac{1}{3}\right)^2\left(\frac{2}{3}\right)^2}=\dfrac{2}{3}$

15-12. 32

(1과 6), (2와 5), (3과 4)는 서로 이웃하면 안 된다.

1을 고정시키면 그림과 같이 6이 적힌 의자를 놓을 자리는 A, B, C로 총 3자리가 있다.



이를 이용하여 케이스 별로 풀이하자.

i) 6을 A 또는 C에 놓는 경우

6을 A 또는 C에 놓는 경우 ${}_2\mathrm{C}_1$

만약에 6이 A자리에 있다면 1과 6사이의 한 자리에 놓을 수 있는 숫자는 2, 3, 4, 5 중 하나이므로 ${}_4\mathrm{C}_1$

남아 있는 3개의 수가 3, 4, 5라면 3과 4는 이웃하지 않으므로 C자리에 5가 있어야 한다. 따라서 3, 4를 배열하는 경우 2!

${}_2\mathrm{C}_1\times({}_4\mathrm{C}_1\times 2!)=16$

ii) 6을 B에 놓는 경우

A자리에 놓을 수 있는 숫자는 2, 3, 4, 5 중 하나이므로 ${}_4\mathrm{C}_1=4$

1과 A 사이에 놓을 수 있는 숫자는 2가지

나머지 자리에 남은 두 숫자를 배열하는 경우 2가지

따라서

${}_4\mathrm{C}_1\times 2\times 2=16$

i), ii)에 의하여 전체 경우의 수는 $16+16=32$

[다른 풀이]

1과 6, 2와 5, 3과 4는 이웃하면 안 된다.

포함배제의 원리를 이용하면
(6개의 의자를 임의로 배치하는 경우의 수)
$-$(세 쌍 중 한 쌍 이상이 이웃하게 배치하는 경우의 수)
$+$(세 쌍 중 두 쌍 이상이 이웃하게 배치하는 경우의 수)
$-$(세 쌍 중 세 쌍이 이웃하게 배치하는 경우의 수)
$= 5! - {}_3C_1 \times 4! \times 2 + {}_3C_2 \times 3! \times 2^2 - 2! \times 2^3$
$= 120 - 144 + 72 - 16 = 32$

미적분

15-9. 9

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n - \sum_{n=1}^{\infty} a_{n+1} = a_1 = 1$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_{n+1} - \sum_{n=2}^{\infty} (a_{2n} + a_{2n+1}) = a_2 + a_3 = 4$$

$\therefore\ (a_1 - a_2 - a_3)^2 = 9$

<손풀이>

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n - \sum_{n=1}^{\infty} a_{n+1} = a_1 = 1$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} (a_{2n} + a_{2n+1}) = (a_4 + a_5) + (a_6 + a_7) + \cdots\cdots$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} a_n - a_1 - a_2 - a_3$$

$$= 1$$

$\therefore\ a_1 + a_2 + a_3 = 5$

$\therefore\ a_2 + a_3 = 4$

$(a_1 - (a_2 + a_3))^2 = 9$

15-10. 81

함수 $f(x)$의 역함수가 $g(x)$이므로 $f(g(x)) = x$가 성립한다.
조건 (가)에 의해 $f(2g(x) - 3^{kx} + 5) = x$이므로
$g(x) = 2g(x) - 3^{kx} + 5$
$\therefore\ g(x) = 3^{kx} - 5$
조건 (나)에 의해 $f(4) = 1$이므로 $g(1) = 4$
$3^k - 5 = 4$, $k = 2$이다.
따라서 $g(x) = 3^{2x} - 5$이므로
$g'(x) = 3^{2x} \cdot \ln 3 \cdot 2$

$$\therefore\ \frac{g'(2)}{g'(0)} = \frac{81 \cdot 2\ln 3}{2\ln 3} = 81$$

<손풀이>

(가) $f(x)$의 역함수가 $2g(x)-3^{kx}+5$ 이다.

$\therefore g(x)=2g(x)-3^{kx}+5$

$\therefore g(x)=3^{kx}-5$

(나) $f(4)=1 \rightarrow g(1)=4 \rightarrow k=2$

$\therefore g(x)=3^{2x}-5$

$g'(x)=2\cdot 3^{2x}\cdot \ln 3$

$\dfrac{g'(2)}{g'(0)}=3^4=81$

15-11. ②

$\angle \mathrm{OAP}=\theta$라 하면 $\tan\theta=\dfrac{1}{3}$이고 $\angle \mathrm{QAP}=2\theta$ 이다.

$\angle \mathrm{BAP}=\alpha$라 하면 $\tan\alpha=\dfrac{2}{3}$이고 $\angle \mathrm{CAQ}=2\theta-\alpha$이다.

$\tan 2\theta=\dfrac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta}=\dfrac{3}{4}$,

$\tan(2\theta-\alpha)=\dfrac{\tan 2\theta-\tan\alpha}{1+\tan 2\theta\cdot\tan\alpha}=\dfrac{1}{18}$ 이고

$\angle \mathrm{CQA}=\dfrac{\pi}{2}$, $\overline{\mathrm{AQ}}=3$ 이므로

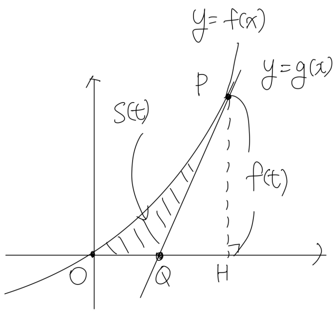
$\overline{\mathrm{QC}}=\overline{\mathrm{AQ}}\cdot\tan(2\theta-\alpha)=\dfrac{1}{6}$

15-12. ①

$g(x)=f'(t)(x-t)+f(t)$,

직선 $g(x)$ 의 x 절편은 $t-\dfrac{f(t)}{f'(t)}$ 이고 이를 점 Q 라고 하자.

$f(0)=0$ 이므로 아래 그림에서 $S(t)$ 를 다음과 같이 표현할 수 있다.



$S(t)=\displaystyle\int_0^t f(x)dx-\triangle\mathrm{PQH}$

$\overline{\mathrm{QH}} = t - \left(t - \frac{f(t)}{f'(t)}\right) = \frac{f(t)}{f'(t)}$ 이므로

$S(t) = \int_0^t f(x)dx - \frac{1}{2}(e^t + e^{-t} - 2)$ 이다.

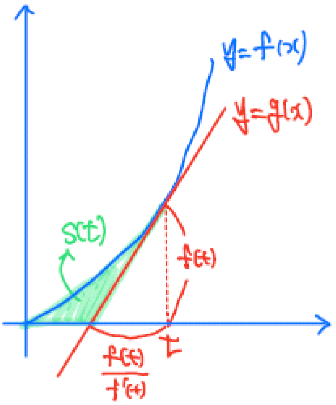
따라서 $S'(t) = f(t) - \frac{1}{2}(e^t - e^{-t}) = \frac{1}{2}(e^t + e^{-t}) - 1$,

$S'(a) = \frac{1}{12}$, $e^a + e^{-a} = \frac{13}{6}$ 이므로

$e^a = \frac{3}{2}$ or $e^a = \frac{2}{3}$

$\therefore a = \ln\frac{3}{2}$ $(\because t > 0)$

<손풀이>



$e^x - x$

$$S(t) = \int_0^t f(x)dx - \frac{1}{2} \times \frac{\{f(t)\}^2}{f'(t)}$$

$$= e^t - t - 1 - \frac{e^{2t} - 2e^t + 1}{2e^t}$$

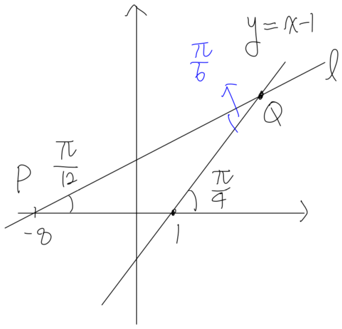
$$= \frac{1}{2}e^t - t - \frac{1}{2}e^{-t}$$

$$S'(t) = \frac{1}{2}e^t + \frac{1}{2}e^{-t} - 1$$

Day. 16

수학1, 수학2

16-1. ③



위의 그림에서 삼각형의 외각의 성질에 의해

직선 l 과 직선 $y=x-1$ 이 이루는 예각의 크기는 $\dfrac{\pi}{6}$

사인법칙에 의해 $\dfrac{9}{\sin\dfrac{\pi}{6}}=\dfrac{\overline{\mathrm{PQ}}}{\sin\dfrac{3}{4}\pi}$

$\therefore\ \overline{\mathrm{PQ}}=9\sqrt{2}$

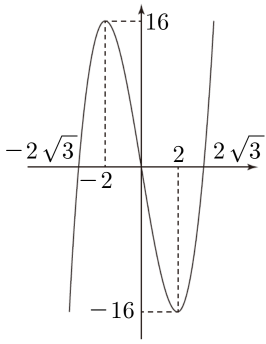
16-2. ④

$F(x)$ 가 오직 하나의 극값을 갖기 위해서는

$F'(x)=f(x)=0$ 의 실근의 개수가 1 또는 2 이어야 한다.

($\because$ 실근의 개수가 2 일 때 중근에서는 부호 변화가 없으므로 극값은 하나만 존재)

$f(x)=x^3-12x+p=0$, $x^3-12x=-p$

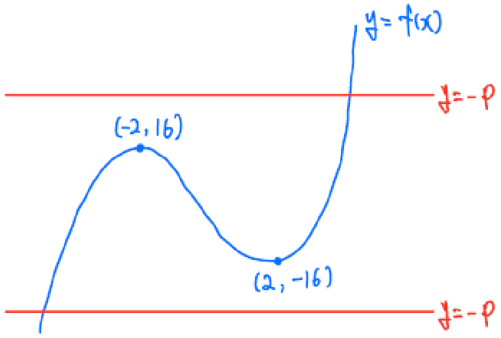


$-p\geq 16$ or $-p\leq -16$, 즉 $p\leq -16$ or $p\geq 16$ 이므로

자연수 p 의 최솟값은 16 이다.

<손풀이>

$F'(x)=f(x)=x^3-12x+p=x^3-12x-(-p)$



$\therefore -p\ge 16$ or $-p\le -16$

$\therefore p\le -16$ or $p\ge 16$

16-3. 20

함수 $f(x)+g(x)$ 의 불연속인 점이 한 개이므로
$f(x)$ 또는 $g(x)$ 가 하나는 불연속 함수, 다른 하나는 연속 함수이다.

i) $f(x)$가 $x=1$ 에서 불연속, $g(x)$ 가 $x=2$ 에서 연속일 때
$-1+a\neq 7-b,\ \ 2a+1=-4+b$
함수 $f(x)g(x)$ 가 $x=1$ 에서 연속이 되어야 하므로
$g(1)=a+1=0$
$a=-1,\ b=3$
$\therefore\ b-a=4$

ii) $f(x)$ 가 $x=1$ 에서 연속, $g(x)$ 가 $x=2$ 에서 불연속일 때
$-1+a=7-b,\ \ 2a+1\neq -4+b$
함수 $f(x)g(x)$ 가 $x=2$ 에서 연속이 되어야 하므로
$f(2)=14-b=0$
$a=-6,\ b=14$
$\therefore\ b-a=20$

따라서 $b-a$ 의 최댓값은 20 이다.

16-4. ⑤

$a^x-1=n$ 에서 $x=\log_a(n+1)$,
$a^x-1=n+2$ 에서 $x=\log_a(n+3)$ 이므로
선분 $\mathrm{A}_n\mathrm{A}_{n+2}$ 을 대각선으로 하는 직사각형의 넓이 S_n 은

$$S_n=2\{\log_a(n+3)-\log_a(n+1)\}$$
$$=2\log_a\frac{n+3}{n+1}$$
$$\sum_{n=1}^{7}S_n=2\sum_{n=1}^{7}\log_a\frac{n+3}{n+1}$$

$$=2\left\{\log_a\frac{4}{2}+\log_a\frac{5}{3}+\log_a\frac{6}{4}+\cdots+\log_a\frac{9}{7}+\log_a\frac{10}{8}\right\}$$

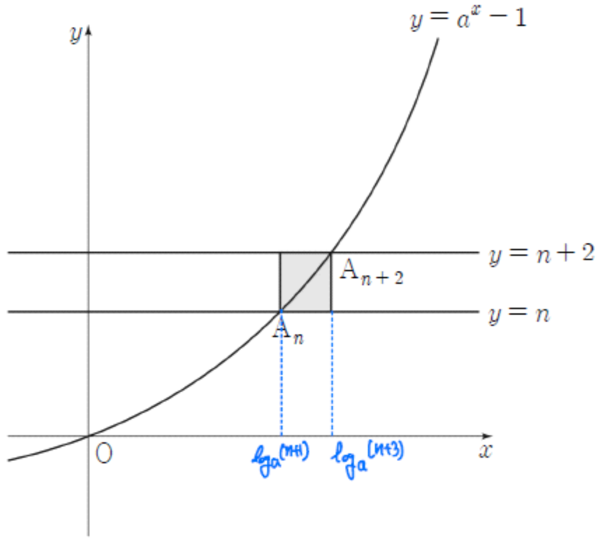
$$=2\log_a\left(\frac{4}{2}\times\frac{5}{3}\times\frac{6}{4}\times\ \cdots\ \times\frac{9}{7}\times\frac{10}{8}\right)$$

$$=2\log_a\left(\frac{9\times10}{2\times3}\right)=2\log_a 15$$

$\sum_{n=1}^{7}S_n=6$ 에서 $\log_a 15=3$

$\therefore\ a^3=15$

<손풀이>



$S_n=2\cdot\log_a\frac{n+3}{n+1}$

$6=\sum_{n=1}^{7}S_n=2\times\log_a\frac{4}{2}\times\frac{5}{3}\times\frac{6}{4}\times\cdots\times\frac{9}{7}\times\frac{10}{8}$

$=2\times\log_a\frac{9\times10}{2\times3}$

$\therefore\ a^3=15$

16-5. 85

$\sum_{k=1}^{1}b_k=b_1=3$이고 $n\ \geq\ 2$일 때,

$$\sum_{k=1}^{n}b_k-\sum_{k=1}^{n-1}b_k=b_n=\frac{3}{2}n(n+1)-\frac{3}{2}(n-1)n=3n$$

따라서 모든 자연수 n에 대하여 $b_n=3n$

조건 (나)에서

$$\sum_{k=1}^{n}a_kb_k-\sum_{k=1}^{n}3b_k=\sum_{k=1}^{n}b_k(a_k-3)$$

$$\sum_{k=1}^{n} 3k\cdot(a_k-3)=\frac{n(n+1)(2n+1)}{2}$$

$$3\sum_{k=1}^{n} k\cdot(a_k-3)=\frac{n(n+1)(2n+1)}{2}$$

$$\sum_{k=1}^{n} k\cdot(a_k-3)=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}=\sum_{k=1}^{n} k^2$$

따라서 $a_k-3=k$가 된다.

$$\therefore \sum_{k=1}^{10}(k+3)=\frac{10(4+13)}{2}=85$$

<손풀이>

(가) $b_n=\frac{3}{2}n(n+1)-\frac{3}{2}(n-1)n=3n$

$\therefore b_n=\begin{cases}3n & (n\geq 2)\\ 3 & (n=1)\end{cases}$

(나) $\sum_{n=1}^{n} a_k b_k=\frac{1}{2}n(n+1)\{9+2n+1\}=n(n+1)(n+5)$

$a_n b_n=n(n+1)(n+5)-n(n-1)(n+4)$

$=n\{3n+9\}$

$\therefore a_n b_n=\begin{cases}3n(n+3) & n\geq 2\\ 12 & n=1\end{cases}$

$\therefore a_n=n+3$

$\sum_{k=1}^{10} a_n=\frac{10(4+13)}{2}=85$

16-6. 34

$g(x)=\int_0^x\{f'(t+a)\times f'(t-a)\}dt$의 양변을 x에 대하여 미분하면 $g'(x)=f'(x+a)\times f'(x-a)$

$f'(x)$는 최고차항의 계수가 -3인 이차함수이므로 방정식 $f'(x)=0$의 서로 다른 실근의 개수는 0 또는 1 또는 2이다.

방정식 $f'(x)=0$의 서로 다른 실근의 개수가 0 또는 1인 경우, 모든 실수 x에 대하여 $f'(x)\geq 0$이므로

$g'(x)=f'(x+a)\times f'(x-a)\geq 0$

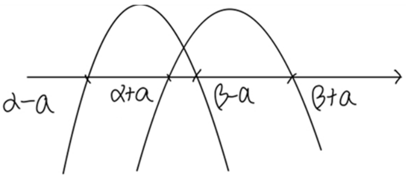
함수 $g(x)$는 극값을 갖지 않으므로 조건을 만족시키지 않는다.

따라서 방정식 $f'(x)=0$의 서로 다른 실근의 개수가 2이므로

$f'(x) = -3(x-\alpha)(x-\beta)\ (\alpha < \beta)$ 라고 하자.

i) $\alpha + a < \beta - a$ 일 때

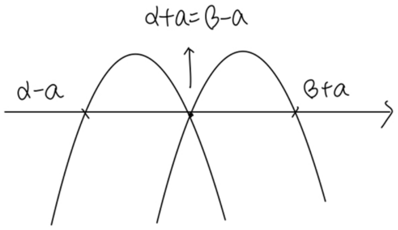
두 함수 $y = f'(x+a)$, $y = f'(x-a)$ 의 그래프의 개형은 그림과 같다.



함수 $g(x)$ 의 극값의 개수가 4 이므로 조건을 만족시키지 않는다.

ii) $\alpha + a = \beta - a$ 일 때

두 함수 $y = f'(x+a)$, $y = f'(x-a)$ 의 그래프의 개형은 그림과 같다.



함수 $g(x)$ 가 $x = \alpha - a$, $x = \beta + a$ 에서만 극값을 가지므로 조건에 의하여

$(\beta + a) - (\alpha - a) = (\beta - \alpha) + 2a = 8 - 0 = 8$,

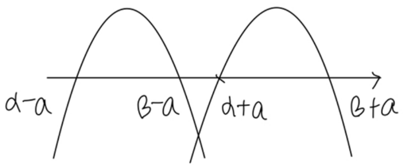
$\beta - \alpha = 2a$ 이므로

$4a = 8$ 에서 $a = 2$

그러므로 $\alpha - 2 = 0$ 에서 $\alpha = 2$, $\beta + 2 = 8$ 에서 $\beta = 6$ 이다.

iii) $\alpha + a > \beta - a$ 일 때

두 함수 $y = f'(x+a)$, $y = f'(x-a)$ 의 그래의 개형은 그림과 같다.



함수 $g(x)$ 의 극값의 개수가 4이므로 조건을 만족시키지 않는다.

따라서 (ii) 에서 $f'(x) = -3(x-2)(x-6)$

$f(x) = \int (-3x^2 + 24x - 36)dx$

$= -x^3 + 12x^2 - 36x + C$ (C는 적분상수)

$f(0) = 0$ 이므로 $f(x) = -x^3 + 12x^2 - 36x$

$\therefore\ a - f(a) = 2 - (-32) = 34$

(* 별해)

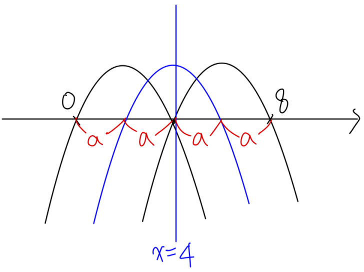
$g'(x) = f'(x+a) \times f'(x-a) = 0$ 에서 $g(x)$ 가 극값을 갖는 x 가 두 개뿐이려면 $f'(x+a) = 0$ 과 $f'(x-a) = 0$ 이 각각 두 실근을 가지고, 두 실근 중 하나가 서로 겹쳐야 한다.

다음과 같이 실근이 겹치면 $g'(x)$ 가 중근을 가지기 때문에 부호 변화가 없어 극값이 될 수 없기 때문이다.

$g'(x) = 9x(x-k) \times (x-k)(x-8)$

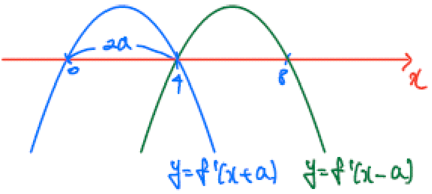
$\quad = 9x(x-8)(x-k)^2$

즉 $f'(x+a)$ 는 x 를, $f'(x-a)$ 는 $x-8$ 을 인수로 갖는다.
이때 $f'(x+a)$ 과 $f'(x-a)$ 는 각각 $f'(x)$ 를 x 축의 방향으로 $-a$, a 만큼, 즉 같은 크기만큼 평행이동시킨 이차함수이므로 $x=0$ 과 $x=8$ 의 중간인 $x=4$ 가 $f'(x+a)$ 과 $f'(x-a)$ 의 겹치는 실근이자 $f'(x)$ 의 축이 되어야 한다.
또한 $f'(x)=0$ 의 두 실근 중 작은 것에 a를 더한 것이 4가 되고, 큰 것에 $-a$를 더한 것이 4가 되어야하므로 두 실근을 각각 $4-a$, $4+a$라고 할 수 있다.
따라서 $4-2a=0$. $4+2a=8$ 에서 $a=2$ 이므로
$f'(x) = -3(x-2)(x-6)$ 임을 빠르게 찾을 수 있다.)



<손풀이>

$\begin{cases} g(0)=0 \\ g'(x) = f'(x+a) \times f'(x-a) \end{cases}$



$f'(x) = -3(x-2)(x-6)$, $a=2$

$f(x) = -x^3+12x^2-36x$

$a-f(a) = 2-f(2) = 34$

16-7. ①

$x<2$ 에서 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 중 y 좌표가 자연수인 점의 개수는 8 개다.

$x \geq 2$ 에서 곡선 $y = \left(\frac{1}{3}\right)^{x+a} - \left(\frac{1}{3}\right)^{2+a} + 9$ 와 직선 $y=n$ 과 $y=-n$ (n 은 자연수)의 교점의 개수의 총합을 세면 된다.

직선 $y=9$와 한 점에서 만나므로 점근선 $y = 9 - \left(\frac{1}{3}\right)^{2+a}$ 이

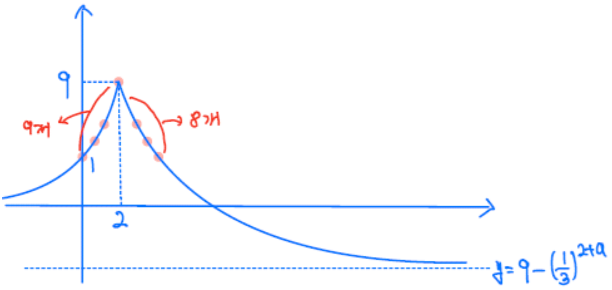
$y=1$보다 아래에 있어야 곡선 $f(x)$가 $y=n$과 총 17개의 점에서 만나게 된다.
($\because$ $x<2$에서 8개, $x\geq 2$에서 9개의 교점을 갖는다.)
따라서 $17\leq g(a)\leq 37$를 만족시키기 위해서
곡선 $y=\left(\frac{1}{3}\right)^{x+a}-\left(\frac{1}{3}\right)^{2+a}+9$와 직선 $y=-n$는
$0\sim 20$개의 교점을 가져야 한다.

$$-21\leq 9-\left(\frac{1}{3}\right)^{2+a}<1$$

$$72<\left(\frac{1}{3}\right)^{a}\leq 270$$

가능한 정수 a의 값은 -4, -5이다.

<손풀이>



$-21\leq 9-\left(\frac{1}{3}\right)^{2+a}<1$

$8<\left(\frac{1}{3}\right)^{2+a}\leq 30$

$-5\leq a\leq -4$

16-8. 345

조건 (가)에서 $f(0)=f(-2)$, 조건 (나)에서 $g(0)=0$이므로
$f(x)=x(x+2)(x^2+ax+b)$이다.
조건 (나)에서 좌우 극한값이 1로 같으므로

$$\lim_{x\to 0+}\frac{x^2+4x}{g(x)}=\lim_{x\to 0+}\frac{x^2+4x}{f(x-2)}=\frac{-2}{4-2a+b}=1$$

$$\lim_{x\to 0-}\frac{x^2+4x}{g(x)}=\lim_{x\to 0-}\frac{x^2+4x}{f(x)}=\frac{2}{b}=1$$

따라서 $a=4$, $b=2$, $f(x)=x(x+2)(x^2+4x+2)$이다.
$\therefore$ $g(5)=f(3)=345$

<손풀이>

$\begin{cases} f(0)=f(-2) \\ g(0)=0,\ \underbrace{g'(0)=4}_{g(x)\text{가 } x=0 \text{ 에서}} \end{cases}$

$f(0)=f(-2)=0$, $f'(0)=f'(-2)=4$

$f(x)=x(x-2)(x^2+4x+2)$
$g(5)=f(3)=345$

확률과 통계

16-9. ③

조건 (가)을 만족시키는 경우에서 조건 (나)를 만족시키지 않는 경우 즉 a, b, c가 모두 홀수인 경우를 제외하면 된다.

조건 (가)를 만족시키는 경우의 수는 ${}_4H_{13-4}={}_4H_9=220$

a, b, c가 모두 홀수인 경우, d는 짝수이므로 음이 아닌 정수 a', b', c', d'에 대하여

$a=2a'+1$, $b=2b'+1$, $c=2c'+1$, $d=2d'+2$라 하면

$(2a'+1)+(2b'+1)+(2c'+1)+(2d'+2)=13$

$a'+b'+c'+d'=4$이므로

조건 (나)를 만족시키지 않는 경우의 수는 ${}_4H_4=35$

따라서 $220-35=185$

16-10. 90

확률변수 X는 이항분포 $\mathrm{B}(120,\ p)$를 따른다.

$\mathrm{E}(X)=120\times p=30$이므로

$p=\dfrac{1}{4}$

$\mathrm{V}(X)=120\times\dfrac{1}{4}\times\dfrac{3}{4}=\dfrac{45}{2}$

따라서 $\mathrm{V}(2X-3)=4\mathrm{V}(X)=4\times\dfrac{45}{2}=90$

16-11. 101

조건 (나)는 $f(1)$, $f(2)$, $\cdots$ $f(5)$ 중 최대 3개까지 같은 값을 가질 수 있다는 뜻이므로 조건 (나)를 만족시키지 않는 경우는

$f(1)=f(2)=f(3)=f(4)=f(5)$이거나

$f(1)=f(2)=f(3)=f(4)<f(5)$이거나

$f(1)<f(2)=f(3)=f(4)=f(5)$인 경우이다.

조건 (가)를 만족시키는 함수의 개수는 ${}_5H_5=126$

조건 (나)를 만족시키지 않는 함수의 개수는 ${}_5C_1+2\times{}_5C_2=25$

따라서 $126-25=101$

16-12. 929

1에서 4개의 수의 곱이 6의 배수가 아닐 확률을 뺀다.

i) 4개의 수가 모두 1 또는 2일 확률

공을 1번 꺼내 확인한 수가 1 또는 2일 확률이 $\dfrac{3}{5}$이므로

$\left(\dfrac{3}{5}\right)^4=\dfrac{81}{625}$

ii) 4개의 수가 모두 1 또는 3일 확률

공을 1번 꺼내 확인한 수가 1 또는 3일 확률이 $\frac{4}{5}$ 이므로

$\left(\frac{4}{5}\right)^4 = \frac{256}{625}$

iii) 4개의 수가 모두 1일 확률

공을 1번 꺼내 확인한 수가 1일 확률이 $\frac{2}{5}$ 이므로

$\left(\frac{2}{5}\right)^4 = \frac{16}{625}$

단, iii)은 i)과 ii)에 중복해서 포함되어 있으므로

구하는 확률은 $1-\left(\frac{81}{625}+\frac{256}{625}-\frac{16}{625}\right)=\frac{304}{625}$

따라서 $p+q=929$

미적분

16-9. 3

열린구간 $(3, \infty)$ 에서 $f'(x) = \frac{x^2-8}{x^2} > 0$ 이므로

역함수 $g(x)$는 구간 $\left(\frac{11}{3}, \infty\right)$에서 미분가능하다.

(역함수 $g(x)$ 의 정의역은 $x > f(3)=\frac{8}{3}$)

함수 $h(x)$가 양의 실수 전체에서 미분가능하므로 $x=4$에서 미분가능해야 한다.

$h(x)$는 $x=4$ 에서 연속이어야 하므로

$f(4)=ag(4)+b$ 이고

$f(x)=4$ 에서 $x+\frac{8}{x}-2=4$, $x=4$ 즉, $f(4)=g(4)=4$

따라서 $4=4a+b$ 이다.

$h(x)$는 $x=4$에서 미분가능해야 하므로

$f'(4)=ag'(4)=\frac{a}{f'(4)}$, $f'(4)=\frac{1}{2}$

따라서 $a=\frac{1}{4}$, $b=3$

$\therefore\ 4ab=3$

16-10. ④

$a_{n+1}=a_1a_n$ 이라는 조건에서

수열 $\{a_n\}$이 공비가 a_1 인 등비수열임을 알 수 있다.

$a_n=(a_1)^n$

$\lim_{n\to\infty}\frac{3(a_1)^{n+2}-10(a_1)^{n+1}+9(a_1)^n+4}{2(a_1)^n+1}$ 에서

$a_1>1$이면 $\frac{3(a_1)^2-10a_1+9}{2}=\frac{1}{a_1}$, $a_1=2$

$0<a_1<1$ 이면 $\frac{4}{1}=\frac{1}{a_1}$, $a_1=\frac{1}{4}$

$a_1=1$이면 $\dfrac{3-10+9+4}{2+1}=2\neq 1$, 성립하지 않는다.

따라서 가능한 a_1 의 합은 $\dfrac{9}{4}$ 이다.

<손풀이>

$a_{n+1}=a_1 a_n \Rightarrow a_n=\{a_1\}^n$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{3a_{n+2}-10a_{n+1}+9a_n+4}{2a_n+1}$$

$$=\begin{cases} 4 & -1<a_1<1 \Rightarrow a_1=\dfrac{1}{4} \\ 2 & a_1=1 \\ \times & a_1=-1 \rightarrow n=2k,\ 2k-1 \text{ 일때 극한계산 해봐야한다.} \\ \dfrac{3a_1^2-10a_1+9}{2} & a_1<-1 \text{ or } a_1>1 \end{cases}$$

$\Rightarrow 3a_1^2-10a_1+9=\dfrac{2}{a_1}$

$3a_1^3-10a_1^2+9a_1-2=0$

$a_1=1$ or $\dfrac{1}{3}$ or 2

$\therefore a_1\neq 1$ 합 $=\dfrac{1}{4}+2=\dfrac{9}{4}$

16-11. 59

조건 (가)에서

$g(\alpha)=\dfrac{1}{2-\cos(f(\alpha))}=\dfrac{2}{3}$, $\cos(f(\alpha))=\dfrac{1}{2}$ 이므로

$f(\alpha)=\dfrac{\pi}{3}$ $\left(\because 0<f(\alpha)<\dfrac{\pi}{2}\right)$이다.

$g'(x)=\dfrac{-f'(x)\times\sin f(x)}{(2-\cos f(x))^2}$ 이고 $g(x)$가 $x=\alpha$에서 극값을 가지므로 $g'(\alpha)=0$, 따라서 $f'(\alpha)=0$ 이다.

함수 $f(x)$가 $x=\alpha$에 대하여 대칭인 이차함수이므로

조건 (나)를 만족시키려면 $f'(2)=0$, 즉 $\alpha=2$ 임을 알 수 있다.

따라서 함수 $f(x)$가 $f(x)=\pi(x-2)^2+\dfrac{\pi}{3}$ 이므로

$g'(4)=\dfrac{-f'(4)\times\sin f(4)}{(2-\cos f(4))^2}=-\dfrac{8\sqrt{3}}{9}\pi$,

$g'(1)=\dfrac{-f'(1)\times\sin f(1)}{(2-\cos f(1))^2}=-\dfrac{4\sqrt{3}}{25}\pi$,

$\dfrac{g'(4)}{g'(1)}=\dfrac{50}{9}$ 이다.

따라서 $p+q$의 값은 59이다.

<손풀이>

$$g'(x) = \frac{-f'(x)\sin f(x)}{(2-\cos f(x))^2}$$

$\therefore g(x)$가 $x=\alpha$에서 극값을 갖으므로

$f'(\alpha)=0$ or $\sin f(\alpha)=0$

(가) $g(\alpha)=\frac{2}{3} \rightarrow \cos f(\alpha)=\frac{1}{2} \rightarrow f(\alpha)=\frac{\pi}{3}$

$\therefore f'(\alpha)=0$ (by $\sin f(\alpha) \neq 0$)

$\therefore f(x)=\pi(x-\alpha)^2+\frac{\pi}{3}$

(나) $f'(-2)=-f'(6)$ and $f'(x)=2\pi(x-\alpha)$: $(\alpha, 0)$대칭

$\therefore \alpha=2$

$\therefore f(x)=\pi(x-2)^2+\frac{\pi}{3}$

16-12. 128

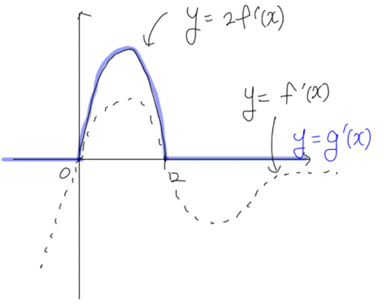
$f'(x)=-\frac{1}{2}x(x-2)e^{-x}$

주어진 조건에 의해 미분가능한 함수 $g(x)$ 는 다음을 만족시킨다.

$f'(x) \geq 0$ 에서 $g'(x)=2f'(x)$

$f'(x) < 0$ 에서 $g'(x)=0$

함수 $g'(x)$ 의 개형은 다음과 같다.



$g(x)-g(x-a)=\int_{x-a}^{x} g'(t)dt$ 이므로

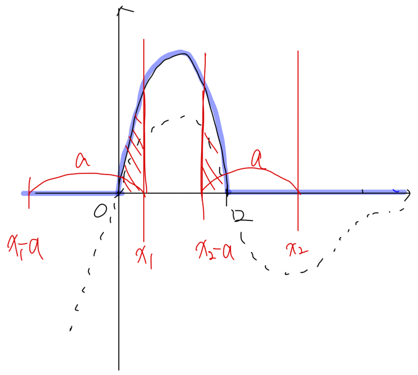
$\int_{x-a}^{x} g'(t)dt = k$ 를 만족시키는 정수해의 개수가 3 이 되어야 한다.

즉, $t=x-a$ 에서 $t=x$ 까지 함수 $y=g'(t)$ 의 넓이가 k 가 되는 정수해가 3 개만 존재해야 한다.

함수 $y=g'(x)$ 가 $x<0$, $x \geq 2$ 에서 0 이므로

양수 k 는 $k \le \int_0^2 g'(t)dt$ 를 만족시킨다.

이때, $k < \int_0^2 g'(t)dt$ 이면 $\int_{x-a}^{x} g'(t)dt = k$, 즉 넓이가 k 가 되도록 하는 해의 개수는 3 이 될 수 없다.
(* 다음 그림에서처럼 해가 2 개 존재하게 된다.

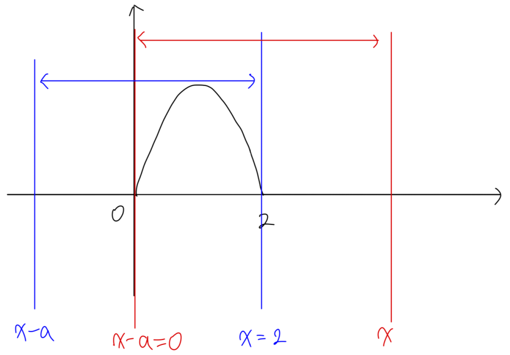


)

따라서 해가 3 개가 되려면

$$k = \int_0^2 g'(t)dt = \int_0^2 2f'(t)dt = 2f(2) - 2f(0) = \frac{4}{e^2}$$ 이다.

이제 $\int_{x-a}^{x} g'(t)dt = \int_0^2 g'(t)dt$ 를 만족시키는 정수해의 개수가 3 이라는 조건을 보자.
충분히 큰 a 에 대하여 $x=2$ 일 때부터 $x-a=0$, $x=a$ 까지,
즉 $2 \le x \le a$ 인 실수 x 는 전부 방정식을 만족시킨다..
*아래 그림을 참고

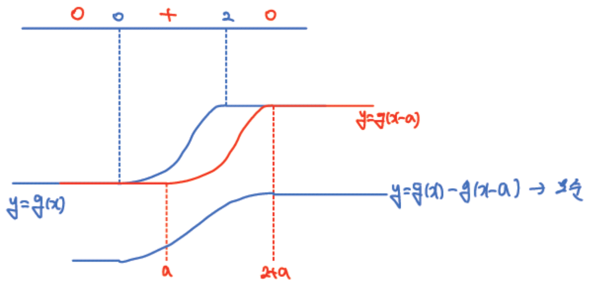


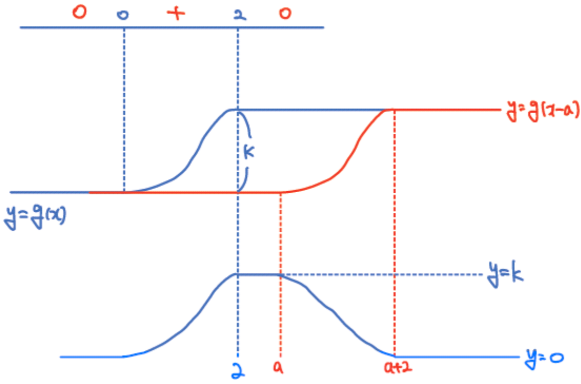
따라서 정수해의 개수가 3 이 되도록 하는 a 의 범위는
$4 \le a < 5$, a 의 최솟값은 4 이다.
$\therefore\ \alpha = 4,\ k = 4e^{-2},\ k^2 \times f(-\alpha) = 128$

<손풀이>

$f'(x) = \frac{1}{2}e^{-x}(-x^2+2x) = \begin{cases} \text{음수} & x<0 \text{ or } x>2 \\ 0\text{이상} & 0 \le x \le 2 \end{cases}$

$g'(x) = \begin{cases} 2f'(x) = e^{-x}(-x^2+2x) & 0 \le x \le 2 \\ 0 & x<0 \text{ or } x>2 \end{cases}$





$\therefore\ 4 \le a < 5 \rightarrow \alpha = 4$

$k = g(2) - g(0) = \int_0^2 g'(x)\,dx = \int_0^2 2f(x)\,dx = 2f(2) - 2f(0)$

$= \dfrac{4}{e^2}$

$\therefore\ k^2 f(-\alpha) = \dfrac{16}{e^4} \times f(-4) = 16 \times 8 = 128$

Day. 17

수학1, 수학2

17-1. ⑤

직선 AB 의 기울기는

$$\frac{k\left(3^{\frac{1}{6}}-3^{\frac{7}{6}}\right)}{3^{\frac{1}{3}}-3^{\frac{7}{3}}}=\frac{k}{3^{\frac{1}{6}}+3^{\frac{7}{6}}}=\frac{k}{4\cdot 3^{\frac{1}{6}}}=\frac{1}{12}$$

$$k=\frac{3^{\frac{1}{6}}}{3}=3^{\frac{1}{6}-1}=3^{-\frac{5}{6}}$$

17-2. ①

$$\lim_{x\to 2+}|f(x)-g(x)|=\lim_{x\to 2+}|x^2-2x+4|=4$$

$$\lim_{x \to 2-} |f(x) - g(x)| = \lim_{x \to 2-} |-3x + k + 3| = |k - 3|$$

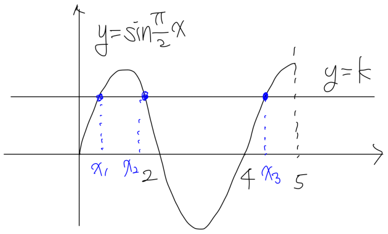
$4 = |k - 3|$

따라서 $k = 7$ 또는 $k = -1$, 모든 실수 k의 합은 6이다.

17-3. ④

다음 그림과 같이 곡선 $y = \sin\frac{\pi x}{2}$ $(0 \le x \le 5)$ 와

직선 $y = k$의 세 교점의 x 좌표를 x_1, x_2, x_3라고 하자.



$a > \frac{1}{2}$ 에서 $4a > 2$ 이므로 $x_3 = 4a$ 이다.

$x_1 = a$ 이면 사인함수의 주기성에 의해 $4a - a = 3a = 4$,

즉 $a = \frac{4}{3}$ 인데, $0 < x_1 < 1$ 을 만족하지 않는다.

$x_2 = a$ 이면 사인함수의 대칭성에 의해 $a + 4a = 5a = 6$,

즉 $a = \frac{6}{5}$ 이고, $1 < x_2 < 2$ 를 만족한다.

따라서 $x_1 = b$ 이고, 사인함수의 대칭성에 의해 $b + a = 2$ 이므로

$b = \frac{4}{5}$ 이다.

$\therefore\ a + 4b = \frac{22}{5}$

17-4. ④

$\int_0^a |v(t)|dt = S_1$, $\int_a^b |v(t)|dt = S_2$,

$\int_b^c |v(t)|dt = S_3$ 이라고 하자.

점 P가 두 번째로 운동 방향을 바꾸는 시점인 $t = b$일 때의

위치가 3이므로 $\int_0^b v(t)dt = S_1 - S_2 = 3$ 이다.

$\int_a^c v(t)dt = -S_2 + S_3 = 0$ 이므로 $S_2 = S_3$ 이고,

$\int_0^c |v(t)|dt = S_1 + S_2 + S_3 = 12$ 이다.

세 식을 연립하면 $(S_2 + 3) + S_2 + S_2 = 3S_2 + 3 = 12$ 이므로

$S_2 = S_3 = 3$ 이다.

따라서, $\int_a^c |v(t)|dt = S_2 + S_3 = 6$ 이다.

17-5. ②

등비수열 $\{a_n\}$의 공비를 r $(r \ne 1)$ 이라고 할 때,

조건 (가)에서 $S_{n+1}-S_n=a_{n+1}\geq 0$ 이므로 $r>0$ 이다.

$a_n=3r^{n-1}$ 를 조건 (나)의 식에 대입하면

$3r^{m-1}-3r^{m+1}=8r^m$, $\frac{3}{r}-3r=8$,

$r=\frac{1}{3}$ ($\because r>0$)이다.

$\therefore S_4=3+1+\frac{1}{3}+\frac{1}{9}=\frac{40}{9}$

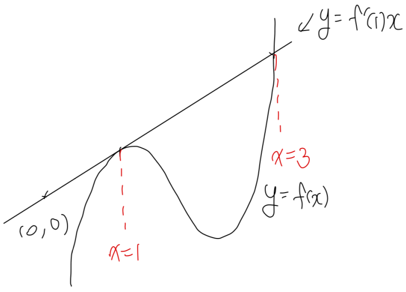
17-6. ④

조건 (가)에서 $\frac{f(a)}{a}=\frac{f(a)-0}{a-0}$ 으로 해석하면

원점과 점 $(a,\ f(a))$ 사이의 기울기가 $f'(1)$ 과 같음을 알 수 있다.

즉, $f'(1)=\frac{f(a)}{a}$ 을 만족시키는 a 는 곡선 $f(x)$ 와 직선 $y=f'(1)x$ 의 교점의 x 좌표이다.

이를 만족시키는 a 가 두 개뿐이고 $f'(1)=f(1)$ 이므로 다음과 같이 곡선 $y=f(x)$ 는 직선 $y=f'(1)x$ 와 $x=1$ 에서 접하고 $x=3$ 에서 만나야 한다.



$f(x)=(x-1)^2(x-3)+f'(1)x$

$f'(x)=2(x-1)(x-3)+(x-1)^2+f'(1)$

$f'(2)=-2+1+f'(1)=8$, $f'(1)=9$

$\therefore f(4)=45$

17-7. ③

점 A는 곡선 $y=\log_2(x+a)$ 와 직선 $y=x$ 의 교점이고,

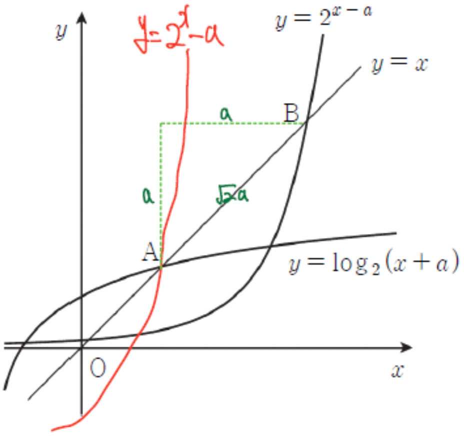
이는 역함수인 곡선 $y=2^x-a$ 와 직선 $y=x$ 의 교점이기도 하다.

$y=2^{x-a}$의 그래프는 $y=2^x-a$ 의 그래프를 x축의 방향으로 a만큼, y축의 방향으로 a만큼 평행이동한 그래프이므로

$A(t,\ t)$ 라 두면 $B(t+a,\ t+a)$ 이다.

이때 $l=\overline{AB}=4\sqrt{2}$ 이므로 $a=4$이다.

<손풀이>



$y=\log_2(x+a) \xrightarrow{\text{역함수}} y=2^x-a$

$y=2^x-a \Rightarrow \begin{cases} x\text{축 방향} : a \\ y\text{축 방향} : a \end{cases} \Rightarrow y=2^{x-a}$

$(\sqrt{2}a)^2=32 \rightarrow a=4$

17-8. ④

조건 (가)에서

$f(x)=x^3+ax^2+bx=x\{x^2+ax+(8-a)\}$

$(\because\ f(1)=a+b+1=9,\ b=8-a)$

조건 (나)를 만족시키려면 $x^2+ax+8-a=0$가 $x=0$을 제외한 실근을 1개 이하로 가져야 한다.

i) $x^2+ax+8-a=0$의 서로 다른 실근의 개수가 0 또는 1일 때

$D=a^2-4(8-a)\le 0$

$-8\le a\le 4$

ii) $x^2+ax+8-a=0$의 실근 중 하나가 $x=0$일 때

$a=8$

$\int_0^1\{x^3+ax^2+(8-a)x\}dx$

$=\left[\frac{1}{4}x^4+\frac{1}{3}ax^3+\frac{8-a}{2}x^2\right]_0^1=\frac{17}{4}-\frac{1}{6}a$ 이므로

$a=-8$일 때 최댓값을, $a=8$일 때 최솟값을 갖는다.

$\therefore\ M+m=\frac{17}{2}$

<손풀이>

(가) $f(x)=x(x^2+ax+b)$

$1+a+b=9$

(나) $f(x) = x(\underbrace{x^2+ax+8-a}_{h(x)})$

① $h(x)=0$의 실근 2개 $\Rightarrow a=8$

② $h(x)=0$의 실근 1개 이하

$a^2-4(8-a) \leq 0$

$-8 \leq a \leq 4$

$\int_0^1 f(x)\,dx = \frac{17}{4} - \frac{a}{6}$

$\therefore M+m = \frac{17}{2}$ (by $a=8 \rightarrow m$, $a=-8 \rightarrow M$)

확률과 통계

17-9. ①

x의 계수는 ${}_6C_1 \times 2 \times a^5 = 12a^5$

$12a^5 < 0$이므로 $a < 0$

x^3의 계수와 x^4의 계수의 합이 80이므로

${}_6C_3 \times 2^3 \times a^3 + {}_6C_4 \times 2^4 \times a^2 = 80$

$160a^3 + 240a^2 = 80$

$2a^3 + 3a^2 - 1 = (a+1)^2(2a-1) = 0$

$\therefore\ a = -1\ (\because\ a < 0)$

17-10. ⑤

i) 각 시행에서 숫자가 같은 2개의 카드를 선택할 확률

$$\left(\frac{{}_2C_2 + {}_3C_2 + {}_2C_2}{{}_7C_2}\right)^2 = \left(\frac{5}{21}\right)^2 = \frac{25}{441}$$

ii) 1번째 시행에서 숫자가 서로 다른 2개의 카드를 선택하고 그 2개의 카드를 2번째 시행에서 다시 선택할 확률

$$\left(1 - \frac{5}{21}\right) \times \frac{1}{21} = \frac{16}{441}$$

따라서 구하는 확률은 $\frac{25}{441} + \frac{16}{441} = \frac{41}{441}$

17-11. ④

크기가 16인 표본으로부터 얻은 표본평균 $\overline{x_1}$를 이용해 구한 모평균 m에 대한 신뢰도 95%의 신뢰구간은

$$\overline{x_1} - 1.96 \times \frac{\sigma}{\sqrt{16}} \leq m \leq \overline{x_1} + 1.96 \times \frac{\sigma}{\sqrt{16}}$$

이때 $57.06 \leq m \leq 62.94$이므로

$$\overline{x_1} - 1.96 \times \frac{\sigma}{\sqrt{16}} = 57.06,\ \overline{x_1} + 1.96 \times \frac{\sigma}{\sqrt{16}} = 62.94$$

두 식을 연립하여 풀면 $\overline{x_1} = 60,\ \sigma = 6$

크기가 36인 표본으로부터 얻은 표본평균 $\overline{x_2}$를 이용해 구한 모평균 m에 대한 신뢰도 99%의 신뢰구간은

$$\overline{x_2}-2.58\times\frac{6}{\sqrt{36}}\le m\le\overline{x_2}+2.58\times\frac{6}{\sqrt{36}}$$

이때 $a\overline{x_1}\le m\le b\overline{x_1}$이므로

$\overline{x_2}-2.58=a\overline{x_1}$, $\overline{x_2}+2.58=b\overline{x_1}$

$b\overline{x_1}-a\overline{x_1}=60(b-a)=2\times2.58$

따라서 $b-a=\dfrac{86}{1000}$, $c=86$

17-12. ③

i) $3=2+2+0+(-1)$: $\dfrac{4!}{2!}\times3=36$

ii) $3=2+1+1+(-1)$: $\dfrac{4!}{2!}=12$

iii) $3=2+1+0+0$: $\dfrac{4!}{2!}\times3^2=108$

iv) $3=1+1+1+0$: $\dfrac{4!}{3!}\times3=12$

$\therefore$ $36+12+108+12=168$

미적분

17-9. ③

$$f'(x)=a-\sin x+\cos 2x$$
$$=-2\sin^2 x-\sin x+a+1$$

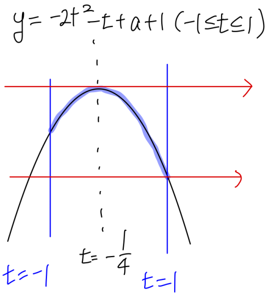
이때 $\sin x=t$로 두면

$f'(x)=g(t)=-2t^2-t+a+1 \quad (-1\le t\le 1)$

함수 $f(x)$가 극값을 가지려면 $g(t)=0$의 실근이 존재해야 한다. (*부호 변화도 존재해야 한다. x축과 접하면 극값이 아니다.)

$-1\le t\le 1$에서 $t=-\dfrac{1}{4}$일 때 $g(t)$는 최대이고 $t=1$일 때 $g(t)$는 최소이다.

(다음 그림을 참고)



따라서 x축이 최댓값과 최솟값 사이에 존재하므로

$g(1)<0<g\left(-\dfrac{1}{4}\right)$이다.

$-\dfrac{9}{8} < a < 2$, 정수 a는 -1, 0, 1이다.

$\therefore$ 3개

17-10. 61

서로 다른 두 등비수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$의 공비를 각각 r_a, r_b라고 하자. 공비는 양수이고 등비급수가 수렴하고 있으므로

$0 < r_a < 1$, $0 < r_b < 1$이다. $\cdots$ ㉠

조건 (나)에서 $\dfrac{a_1}{1-r_a} = \dfrac{b_1}{1-r_b} = 4$,

즉 $a_1 = 4(1-r_a)$, $b_1 = 4(1-r_b)$ 임을 알 수 있다.

이때 ㉠에서 $0 < 1-r_a < 1$, $0 < 1-r_b < 1$이므로

$0 < a_1 < 4$, $0 < b_1 < 4$이다,

이 범위 내에서 조건 (가)를 만족시키는 a_1, b_1은 1, 3 뿐이다.

$a_1 = 1$, $r_a = \dfrac{3}{4}$

$b_1 = 3$, $r_b = \dfrac{1}{4}$

(서로 다른 등비수열이므로 $a_1 \neq b_1$이고 1, 3 둘 중 뭐든 상관없다.)

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n = \frac{1 \cdot 3}{1 - \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{4}} = \frac{48}{13}$$

$\therefore$ $p+q = 61$

17-11. 4

$$\int_0^4 \sqrt{1+\{g'(x)\}^2}\,dx$$

$$= \int_0^1 \sqrt{1+\{f'(x)\}^2}\,dx + \int_1^4 \sqrt{1+\left(\frac{1}{2}x - \frac{1}{2x}\right)^2}\,dx$$

$$= \frac{19}{4} + \ln 2$$

$\displaystyle\int_1^4 \sqrt{1+\left(\frac{1}{2}x - \frac{1}{2x}\right)^2}\,dx$ 를 먼저 계산해보자.

$$= \int_1^4 \sqrt{\frac{1}{4}\left(x^2 + 2 + \frac{1}{x^2}\right)}\,dx = \int_1^4 \frac{1}{2}\left(x + \frac{1}{x}\right)dx$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}x^2 + \ln x\right]_1^4 = \frac{15}{4} + \ln 2$$

즉, $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{1+\{f'(x)\}^2}\,dx = 1$ 이다.

이때 $\{f'(x)\}^2 \geq 0$, $\sqrt{1+\{f'(x)\}^2} \geq 1$이므로

$\displaystyle\int_0^1 \sqrt{1+\{f'(x)\}^2}\,dx \geq 1$이다,

(* 적분 구간의 길이는 1, 적분하려는 함수가 $y \geq 1$인 상황이다. 넓이의 최솟값은 함수가 $y = 1$일 때 1임을 알 수 있다.)

따라서 적분값이 1이 되기 위해서는 $0 \leq x < 1$에서 $f'(x) = 0$이어야 한다.

함수 $g(x)$ 는 $x=1$ 에서 연속이므로 $f(1)=\dfrac{1}{4}$ 이다.

$f'(x)=0$ 이므로 $f(0)$ 역시 $\dfrac{1}{4}$ 이다.

$\therefore \dfrac{1}{f(0)}=4$

<손풀이>

$$\frac{19}{4}+\ln 2=\int_0^4\sqrt{1+(g'(x))^2}\,dx$$

$$=\int_0^1\sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx+\int_1^4\sqrt{1+\left(\frac{1}{2}x-\frac{1}{2x}\right)^2}\,dx$$

$$=\int_0^1\sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx+\int_1^4\frac{1}{2}x+\frac{1}{2x}\,dx$$

$$=\int_0^1\sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx+\frac{15}{4}+\frac{1}{2}\ln 4$$

$$\therefore \int_0^1\sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx=1$$

$\therefore\ 0\le x\le 1\quad f'(x)=0$

$\therefore\ f(x)=C=\frac{1}{4}$ (by $g(x)$가 $x=1$ 연속 $\to f(1)=\frac{1}{4}$)

17-12. 40

두 접선과 x축으로 둘러싸인 도형이 정삼각형이 되기 위해서는 두 접선의 기울기가 각각 $\sqrt{3}$, $-\sqrt{3}$ 이 되어야 한다.

기울기가 $\sqrt{3}$ 인 접선의 접점의 x좌표를 t라고 하면

$a\cos t=\sqrt{3}$ 이고 접선의 방정식은

$y=\sqrt{3}(x-t)+a\sin t$ 이다.

두 접점이 $x=\dfrac{\pi}{2}$ 에 대칭이므로 정삼각형의 높이는 x 좌표가

$\dfrac{\pi}{2}$ 일 때 접선의 방정식의 y 좌표와 같다.

즉, 정삼각형의 높이가 $\sqrt{3}\left(\dfrac{\pi}{2}-t\right)+a\sin t$ 이므로

넓이는 $f(a)=\dfrac{\sqrt{3}}{3}\left\{\sqrt{3}\left(\dfrac{\pi}{2}-t\right)+a\sin t\right\}^2$ 이다.

이제 $f(a)$ 를 a에 대해 미분해보자.

($*$ t를 미분할 때마다 매개변수를 붙여주어야 한다.)

$f'(a)$

$$=\frac{2\sqrt{3}}{3}\left\{\sqrt{3}\left(\frac{\pi}{2}-t\right)+a\sin t\right\}\left(-\sqrt{3}\frac{dt}{da}+\sin t+a\cos t\frac{dt}{da}\right)$$

이고

$a\cos t=\sqrt{3}$ 의 양변을 a에 대하여 미분하면

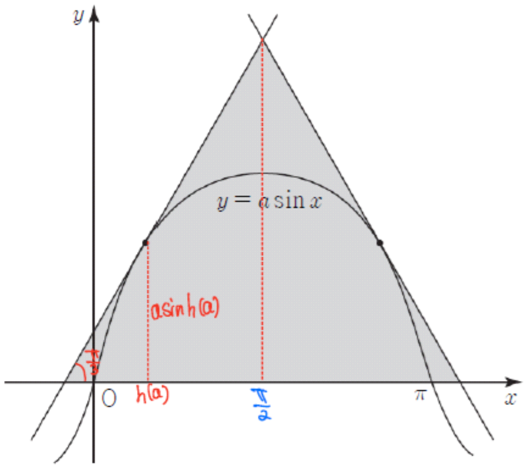
$\cos t-a\sin t\dfrac{dt}{da}=0$ 을 얻을 수 있다.

따라서 $a=2$이면 $t=\frac{\pi}{6}$이고 $\frac{dt}{da}=\frac{\sqrt{3}}{2}$이다.

$f'(2)=\frac{2\sqrt{3}}{3}\left(\sqrt{3}\times\frac{\pi}{3}+1\right)\left(-\frac{3}{2}+\frac{1}{2}+\frac{3}{2}\right)=\frac{\pi}{3}+\frac{\sqrt{3}}{3}$

$\therefore\ 60(p+q)=40$

<손풀이>



$a\cos h(a)=\sqrt{3} \Rightarrow h(2)=\frac{\pi}{6}$

$\cos h(a)-ah'(a)\sin h(a)=0 \Rightarrow h'(2)=\frac{\sqrt{3}}{2}$

$f(a)=\frac{\sqrt{3}}{4}\left\{\left(\frac{\pi}{2}-h(a)+\frac{1}{\sqrt{3}}\times a\sin h(a)\right)\times 2\right\}^2$

$=\sqrt{3}\left(\frac{\pi}{2}-h(a)+\frac{1}{\sqrt{3}}\times a\sin h(a)\right)^2$

$f'(2)=2\sqrt{3}\left(\frac{\pi}{2}-h(2)+\frac{2}{\sqrt{3}}\sin h(2)\right)\times\left\{-h'(2)+\frac{1}{\sqrt{3}}\sin h(2)+\frac{2}{\sqrt{3}}\times h'(2)\cos h(2)\right\}$

$=\frac{\pi}{3}+\frac{\sqrt{3}}{3}$

Day. 18

수학1, 수학2

18-1. ①

$\frac{1}{1-\cos\theta}-\frac{1}{1+\cos\theta}=-\frac{3}{4}$ 에서

$\frac{1}{1-\cos\theta}-\frac{1}{1+\cos\theta}=\frac{(1+\cos\theta)-(1-\cos\theta)}{1-\cos^2\theta}$

$=\frac{2\cos\theta}{1-\cos^2\theta}=-\frac{3}{4}$

$3\cos^2\theta-8\cos\theta-3=0$, $(3\cos\theta+1)(\cos\theta-3)=0$

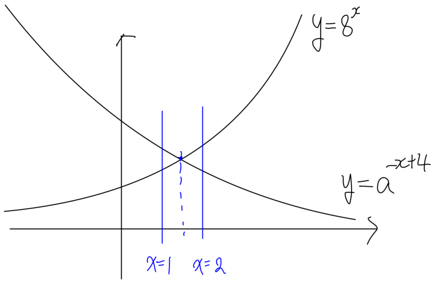
$\cos\theta = -\dfrac{1}{3}$ ($\because \cos\theta \le 1$)이다.

이때 $\tan\theta > 0$, $\cos\theta < 0$이므로 θ는 제3사분면의 각이다.
따라서 $\sin\theta < 0$ 이다.

$\therefore \sin\theta = -\sqrt{1-\cos^2\theta} = -\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$

18-2. ②

$a > 1$ 이므로 두 곡선의 교점의 x 좌표가 1 과 2 사이에 존재하려면 그래프의 개형은 다음과 같아야 한다.



$x=1$, $x=2$ 에서 두 함수의 대소 관계를 생각해보면
$8 < a^3$, $8^2 > a^2$ 임을 알 수 있다.
두 부등식의 공통 범위는 $2 < a < 8$이므로
가능한 자연수 a 의 값은 3, 4, 5, 6, 7이다.
$\therefore$ 25

18-3. 10

$f(0)=3$ 에서
$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + 3$ 라 하면
$x^2 f(x) = ax^5 + bx^4 + cx^3 + 3x^2$ 이다.
$y = ax^5$, $y = cx^3$ 은 기함수이고
$y = bx^4$, $y = 3x^2$ 은 우함수이므로

$$\int_{-1}^{1} x^2 f(x)\,dx = 2\int_0^1 (bx^4 + 3x^2)\,dx$$
$$= 2\left(\frac{b}{5}+1\right) = 6$$

$\therefore b = 10$

(* 적분 구간을 확인한 후, x^2 을 곱해도 $f(x)$ 의 홀수 차수의 항은 전부 사라지기 때문에 처음부터
$2\int_0^1 x^2(bx^2+3)\,dx = 6$ 으로 계산하면 좋을 것 같다.)

18-4. ①

$n=1$을 대입하면

$a_1 = \dfrac{1}{8}(a_1+2)^2$, $8a_1 = (a_1+2)^2$, $0 = (a_1-2)^2$

$a_1 = 2$ 이다.

$S_n = \dfrac{1}{8}(a_n+2)^2 = \dfrac{1}{8}\{(a_n)^2 + 4a_n + 4\}$,

$S_{n-1}=\frac{1}{8}(a_{n-1}+2)^2=\frac{1}{8}\{(a_{n-1})^2+4a_{n-1}+4\}$ 에서

두 식을 빼면

$a_n=\frac{1}{8}\{(a_n)^2+4a_n-(a_{n-1})^2-4a_{n-1}\}\quad(n\geq 2)$

이를 정리해보면

$(a_n)^2-(a_{n-1})^2-4(a_n+a_{n-1})=0$,

$(a_n+a_{n-1})(a_n-a_{n-1}-4)=0$ 이므로

$a_n=-a_{n-1}$ or $a_n=a_{n-1}+4\ (n\geq 2)$ 이다.

조건 (나)에 의하여 a_{10} 까지 항 중 음수인 항이 1개만 존재해야 하므로 각 항별로 음수인 항을 가정해보자.

a_2 가 음수인 경우,

$a_2=-2$ 이고 다른 항은 전부 양수여야 하므로

$a_3=2$ 이고 $n\geq 4$ 에서 전부 $a_n=a_{n-1}+4$ 을 만족해야 한다.

이때 $a_{10}=2+(4\times 7)$ 이 된다.

a_3 이 음수인 경우,

$a_2=6$, $a_3=-6$, $a_4=6$ 이고 $n\geq 5$에서 전부

$a_n=a_{n-1}+4$ 을 만족해야 한다.

이때 $a_{10}=2+(4\times 7)$ 이다.

a_4 이 음수인 경우,

$a_3=10$, $a_4=-10$, $a_5=10$ 이고 $n\geq 6$ 에서 역시 전부

$a_n=a_{n-1}+4$ 을 만족해야 한다.

역시나 $a_{10}=2+(4\times 7)$ 이다.

즉, 각 경우에 대해 $a_1\sim a_9$ 중에 음수 항이 하나만 존재하는 경우는 2개의 항이 지워지는 것과 같음을 알 수 있다.

따라서 9 개의 경우 모두 $a_{10}=2+(4\times 7)=30$ 으로 일정하다.

a_{10} 이 음수인 경우,

$2\leq n\leq 9$ 에서 전부 $a_n=a_{n-1}+4$ 를 만족시켜야 하므로

$a_9=2+(4\times 8)=34$ 이다.

따라서 $a_{10}=-a_9$ 이므로 $a_{10}=-34$ 이 된다.

따라서 서로 다른 a_{10} 의 값은 30 과 -34 이다.

$\therefore -4$

(*참고)

	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5
a_2 음수	2	-2	2	6	10
a_3 음수	2	6	-6	6	10
a_4 음수	2	6	10	-10	10
a_5 음수	2	6	10	14	-14
…	…				
a_{10}음수	2	6	10	14	18

a_6	a_7	a_8		a_{10}
14	18	22		$2+(4\times7)$
14	18	22		$2+(4\times7)$
14	18	22		$2+(4\times7)$
14	18	22		$2+(4\times7)$
				…
22	26	30		$-(2+4\times98)$

<손풀이>

$a_n = \frac{1}{8}\{(a_n+2)^2-(a_{n-1}+2)^2\}$

$8a_n = (a_n)^2+4a_n-(a_{n-1})^2-4a_{n-1}$

$(a_n+a_{n-1})(a_n-a_{n-1}-4)=0$

$\therefore \begin{cases} a_n=-a_{n-1} \text{ or } a_n=a_{n-1}+4 \quad (n\ge2) \\ a_1=2 \end{cases}$

$a_1=2 \to a_2=-2 \to a_3=2, \cdots, a_{10}=30$

$a_1=2 \to a_2=6 \to a_3=-6 \to a_4=6, \cdots a_{10}=30$

$a_1=2 \to a_2=6 \to a_3=10 \to a_4=-10 \to a_5=10, \cdots a_{10}=30$

동일

$a_1=2 \to a_2=6 \to \cdots \to a_9=34 \to a_{10}=-34$

$\therefore a_{10}=30$ or $a_{10}=-34$

18-5. ④

i) n이 홀수인 경우

$\sqrt[n]{\log_a 9}=-4 \Leftrightarrow \log_a 9=(-4)^n$

$\log_a 9=-2^{2n}$ $(0<a<1)$에서

$2\log_a 3=-2^{2n}$, $\log_a 3=-\frac{1}{2}\times4^n$ 이고,

역수를 취하면 $\log_3 a_n=-2\left(\frac{1}{4}\right)^n$ 이다.

이때 $\log_3 a_3=-2\left(\frac{1}{4}\right)^3$ 이다.

ii) n이 짝수인 경우

$-\left(\sqrt[n]{\log_a 9}\right)^2=-4 \Leftrightarrow \log_a 9=2^n$

$\log_a 9=2^n$ $(a>1)$에서

$2\log_a 3=2^n$, $\log_a 3=\frac{1}{2}\times2^n$ 이고,

역수를 취하면 $\log_3 a_n = 2\left(\frac{1}{2}\right)^n$ 이다.

이때 $\log_3 a_4 = 2\left(\frac{1}{2}\right)^4$

$\therefore \log_3 a_4 - \log_3 a_3 = 2\left(\frac{1}{2}\right)^4 + 2\left(\frac{1}{4}\right)^3 = \frac{5}{32}$

<손풀이>

$n=3 \rightarrow x^3 = \log_a 9 \rightarrow x = (\log_a 9)^{\frac{1}{3}}$

$\therefore (\log_a 9)^{\frac{1}{3}} = -4 \rightarrow \log_{a_3} 9 = -64$

$\therefore \log_{a_3} 3 = -32$

$\therefore \log_3 a_3 = -\frac{1}{32}$

$n=4 \rightarrow x^4 = \log_a 9 \rightarrow x = \pm(\log_a 9)^{\frac{1}{4}}$

$\therefore -(\log_a 9)^{\frac{1}{2}} = -4 \rightarrow \log_{a_4} 9 = 16$

$\therefore \log_3 a_4 = \frac{1}{8}$

$\therefore \log_3 a_4 - \log_3 a_3 = \frac{1}{8} + \frac{1}{32} = \frac{5}{32}$

18-6. ④

i) $a_1 < 7$일 때

$a_2 = 14 - a_1 > 7$ 이므로 $a_3 < 7$, $a_4 = 14 - a_3 > 7 \cdots$

즉, 모든 자연수 k에 대하여 $a_{2k-1} < 7$, $a_{2k} \geq 7$ 이고

$a_{2k-1} + a_{2k} = 14$ 를 만족한다.

$$\sum_{n=1}^{21} a_n = (a_1 + a_2) + (a_3 + a_4) + \cdots + (a_{19} + a_{20}) + a_{21}$$
$$= 140 + a_{21}$$

따라서 문제의 조건을 만족하기 위해서는 $a_{21} = 10$ 인데,

이는 $a_{2k-1} < 7$ 에 모순이다.

ii) $a_1 \geq 7$일 때

이 경우 $a_2 < 7$ 이므로 $a_3 = 14 - a_2 > 7$, $a_4 < 7 \cdots$

즉, 모든 자연수 k에 대하여 $a_{2k-1} > 7$, $a_{2k} < 7$ 이고

$a_{2k} + a_{2k+1} = 14$ 를 만족한다.

$$\sum_{n=1}^{21} a_n = a_1 + (a_2 + a_3) + (a_4 + a_5) + \cdots + (a_{20} + a_{21})$$
$$= a_1 + 140$$

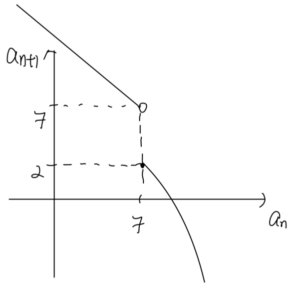
따라서 문제의 조건을 만족하기 위해서는 $a_1 = 10$ 이고,

이는 $a_1 \geq 7$ 을 만족한다.

$\therefore \ a_2=-19, \ a_3=33, \ a_4=-778, \ a_5=792$

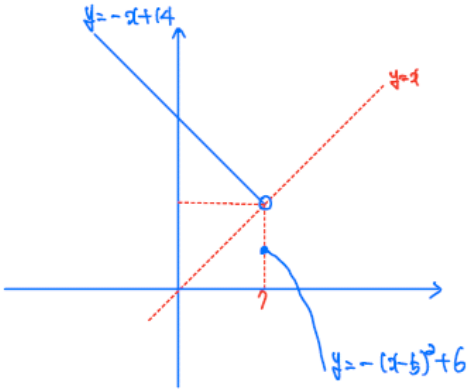
$a_1+a_3+a_5=835$

* 점화식의 그래프를 간단하게 그려보면



$a_n<7$ 이면 $a_{n+1}>7$ 이고, $a_n \geq 7$ 이면 $a_{n+1}<7$ 이므로 수열 $\{a_n\}$ 의 두 점화식이 번갈아 나올 것임을 바로 확인할 수 있다.

<손풀이>



① $a_1<7$

$a_2>7$, $a_3<7$, $a_4>7$, ----

$a_1+a_2=14$ $a_3+a_4=14$, ...

$\sum_{n=1}^{21} a_n = 14\times10+a_{21} < 147$ ⇒ 모순

② $a_1 \geq 7$

$a_2<7$, $a_3 \geq 7$

$a_2+a_3=14$, $a_4+a_5=14$, ...

$\sum_{n=1}^{21} a_n = a_1+140=150$. $a_1=10$

$\therefore a_1=10$, $a_2=-19$, $a_3=33$, $a_4=-778$, $a_5=792$

18-7. 30

삼각형 ACD 와 삼각형 BCD 의 외접원의 넓이의 비가

4 : 1 에서

반지름의 비는 2 : 1 이고, sin ∠ADC = sin ∠BDC 이므로

사인법칙에 의하여 $\overline{AC}$: $\overline{BC}$ = 2 : 1 임을 알 수 있다.

$\overline{AC} = 2k$, $\overline{BC} = k$ 라 하면 $\overline{BD} = \frac{2}{3}k$ 이고

이등변삼각형 ABC 에서 $\cos \angle DBC = \dfrac{\frac{k}{2}}{2k} = \dfrac{1}{4}$ 이므로

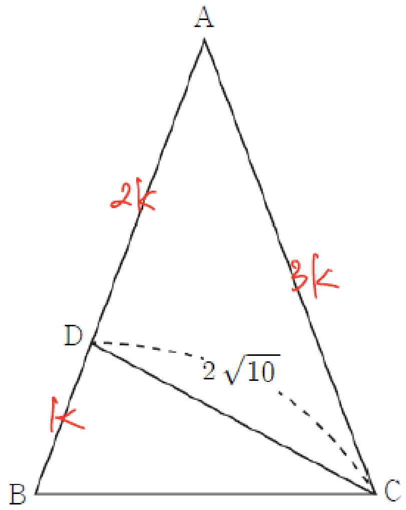
삼각형 BDC 에서 코사인법칙을 이용하면

$$\overline{CD}^2 = \left(\frac{2}{3}k\right)^2 + k^2 - 2 \cdot \frac{2}{3}k \cdot k \cdot \frac{1}{4} = \frac{10}{9}k^2 = 40$$

$k = 6$ 이다.

따라서 삼각형 ABC 의 둘레의 길이는 30 이다.

<손풀이>



$R_{\triangle ACD} : R_{\triangle BCD} = 2 : 1$

$\therefore \sin\angle A : \sin\angle B = 1 : 2$ or $\overline{AC} : \overline{BC} = 2 : 1$

$\therefore \overline{BC} = \frac{3}{2}k \rightarrow \cos\angle B = \frac{1}{4}$

$40 = k^2 + \frac{9}{4}k^2 - 3k^2 \times \frac{1}{4} = \frac{5}{2}k^2$

$\therefore k = 4$

$\therefore \triangle ABC$ 둘레의 길이 = 30

18-8. ④

$\cos\pi x = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ 의 모든 실근이 $g(x)=0$ 의 모든 실근과

같아야하므로 $0 \le x \le 2$ 에서 $f(x)$ 는 $x=\dfrac{1}{6}$, $x=\dfrac{11}{6}$ 을

실근으로 가져야 한다.

이때 $\cos\pi x$ 의 주기가 2 이고 조건 (나)에서 $g(x)$ 의 주기도 2 이므로 $0 \le x \le 2$ 에서 두 방정식의 실근이 같으면 모든 실수 전체에서 실근이 전부 같아진다.

따라서 $f(x)=\left(x-\dfrac{1}{6}\right)\left(x-\dfrac{11}{6}\right)$ 이므로

$$\int_0^2 f(x)dx = \int_0^2\left(x^2-2x+\frac{11}{36}\right)dx$$

$$=\left[\frac{1}{3}x^3-x^2+\frac{11}{36}x\right]_0^2=-\frac{13}{18}$$

$$\therefore \int_0^{10} g(x)dx = 5\int_0^2 f(x)dx = 5\times\left(-\frac{13}{18}\right)=-\frac{65}{18}$$

확률과 통계

18-9. ④

꺼낸 공이 모두 흰 공일 확률 : $\dfrac{{}_4C_3}{{}_7C_3}=\dfrac{4}{35}$

꺼낸 공이 모두 검은 공일 확률 : $\dfrac{{}_3C_3}{{}_7C_3}=\dfrac{1}{35}$

구하는 확률은 $1-\dfrac{4}{35}-\dfrac{1}{35}=\dfrac{6}{7}$

18-10. ⑤

짝수 번째 자리 4개 중 1개를 선택해 홀수 번째 자리 4개와 함께 총 5자리에 3 이상의 숫자를 배열하고 나머지 짝수 번째 자리 3개에 3 미만의 숫자를 배열하면 된다.

$${}_4C_1\times\frac{5!}{3!}\times\frac{3!}{2!}=240$$

18-11. ①

확률변수 X가 정규분포 $\mathrm{N}(2,\ \sigma^2)$을 따르고 확률변수 Y가 정규분포 $\mathrm{N}(6,\ \sigma^2)$을 따른다.

$$\mathrm{P}(0 \le X \le 2)+\mathrm{P}(Y \le 8)$$

$$=\mathrm{P}\left(-\frac{2}{\sigma} \le Z \le 0\right)+\mathrm{P}\left(0 \le Z \le \frac{2}{\sigma}\right)+\mathrm{P}(Z \le 0)$$

$$=2\mathrm{P}\left(0 \le Z \le \frac{2}{\sigma}\right)+0.5=1.1826$$

$$\mathrm{P}\left(0 \le Z \le \frac{2}{\sigma}\right)=0.3413$$

$$\therefore\ \sigma=2$$

따라서 확률변수 X가 정규분포 $\mathrm{N}(2,\ 2^2)$을 따르므로

$$\mathrm{P}(X \ge 6)=\mathrm{P}(Z \ge 2)=1-0.5-0.4772=0.0228$$

18-12. ⑤

조건 (가)에 의하여 학생 A는 초콜릿을 적어도 2개 받아야 한다.

i) 학생 A가 초콜릿을 2개 받는 경우

나머지 세 학생 중 두 학생이 초콜릿을 1개씩 받아야 하고,

학생 A가 받는 사탕의 개수는 0 또는 1이다.

${}_3C_2 \times ({}_3H_4 + {}_3H_3) = 75$

ii) 학생 A가 초콜릿을 3개 받는 경우

나머지 세 학생 중 한 학생이 초콜릿을 1개씩 받아야 하고,

학생 A가 받는 사탕의 개수는 0 또는 1또는 2이다.

즉 4명에게 제한 없이 사탕을 나누어 주는 경우의 수에서

학생 A가 사탕을 3개 또는 4개 받는 경우를 빼면 된다.

${}_3C_1 \times ({}_4H_4 - {}_3C_1 - 1) = 93$

iii) 학생 A가 초콜릿을 4개 받는 경우

나머지 세 학생은 초콜릿을 받지 않고,

학생 A가 받는 사탕의 개수가 4이면 안 된다.

${}_4H_4 - 1 = 34$

따라서 구하는 경우의 수는 $75 + 93 + 34 = 202$

<손풀이>

A B C D

초 1 0 0 0 X

초 2 1 1 0 $_3C_2 ({}_3H_4 + {}_3H_3) = 75$

≤1

초 3 1 0 0 $_3C_1 ({}_4H_4 - {}_4H_1) = 93$

사 ≤2

초 4 0 0 0 $1 \times ({}_4H_4 - 1) = 34$

$75 + 93 + 34 = \boxed{202}$

미적분

18-9. ②

점 P 에서의 접선의 방정식은 다음과 같다.

$y=-e^{-t}(x-t)+e^{-t}$

이 직선의 x 절편이 $t+1$, y 절편이 $(t+1)e^{-t}$ 이므로

삼각형 OAB 의 넓이 $S(t)=\frac{1}{2}(t+1)^2e^{-t}$ 이다.

$S'(t)=-\frac{1}{2}(t+1)(t-1)e^{-t}$

$t=1$ 일 때 $S(t)$ 가 극댓값을 가진다,

$\therefore$ 삼각형 OAB의 넓이의 최댓값은 $S(1)=\frac{2}{e}$

18-10. ④

$f'(x)=\frac{x^3}{\sqrt{9+x^2}}$ 에서 $\sqrt{9+x^2}>0$ 이므로 부호는

$x^3=0$ 일 때, 즉 $x=0$ 에서만 변한다.

$x<0$ 일 때 $f'(x)<0$, $x>0$ 일 때 $f'(x)>0$ 이므로

$f(x)$ 는 $x=0$에서만 극소를 갖는다.

따라서 조건 (나)에서 $f(x)=0$ 의 서로 다른 실근의 개수가

1 이려면 극솟값이 0, 즉 $f(0)=0$을 만족해야 한다.

$f(x)=\int \frac{x^3}{\sqrt{9+x^2}}dx$

$\sqrt{9+x^2}=t$ 로 치환하면

$9+x^2=t^2$, $2x=2t\frac{dt}{dx}$

$$\int \frac{x^3}{\sqrt{9+x^2}}dx=\int (t^2-9)dt$$

$$=\frac{1}{3}t^3-9t+C$$

$$=\frac{1}{3}\left(\sqrt{9+x^2}\right)^3-9\sqrt{9+x^2}+C$$

$f(0)=9-27+C=0$

$C=18$

$\therefore f(4)=\frac{125}{3}-45+18=\frac{44}{3}$

18-11. ①

함수 $y=f(x)$의 그래프가 y축에 대하여 대칭이므로 직선

$y=t$ 와의 두 교점 역시 y 축 대칭이다.

즉, $a+b=0$ 이므로 $g(t)=2a$ 이다.

$f(a)=\sin a+2a=t$ 이고

이 식을 a 에 대하여 미분하면 $\frac{dt}{da}=\cos a+2$ 를 얻을 수 있다.

$g'(t)=2\times\frac{da}{dt}$ 이므로 위의 식을 대입하면

$g'(t) = \dfrac{2}{\cos a + 2}$ 이다.

이제 $h'(2\pi)$ 를 구해보자.

$g(k) = 2\pi$ 라고 할 때 $g(k) = 2\pi = 2a$ 에서 $a = \pi$ 이므로

$\sin a + 2a = 2\pi = k$ 이다.

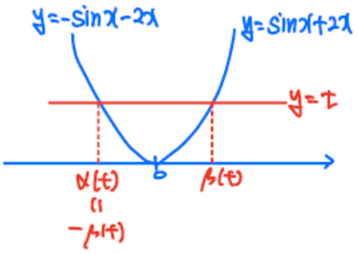
$g(2\pi) = 2\pi,\ \ h(2\pi) = 2\pi$ 에서

$$h'(2\pi) = \frac{1}{g'(h(2\pi))} = \frac{1}{g'(2\pi)} = \frac{1}{2}$$

$$\therefore\ h'(2\pi) = \frac{1}{2}$$

<손풀이>

$$f(x) = \begin{cases} \sin x + 2x & (x \geq 0) \\ -\sin x - 2x & (x < 0) \end{cases}$$



$g(t) = \beta(t) - \alpha(t)$, $\sin\beta(t) + 2\beta(t) = t$

$= 2\beta(t)$

$g(t) = 2\pi \rightarrow t = \pi$

$$\therefore h'(2\pi) = \frac{1}{g'(h(2\pi))} = \frac{1}{2g'(\pi)}$$

$$= \frac{1}{2\beta'(\pi)}$$

$$= \frac{1}{\dfrac{2}{\cos(\pi)+2}}$$

$$= \frac{1}{2}$$

18-12. ④

$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} |a_{n+1} - a_n| = 3a_1$ 에서 $a_1 > 0$ 이다.

한편 공비 r 이 양수이면

$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} |a_{n+1} - a_n| = \sum_{n=1}^{\infty} (a_n - a_{n+1}) = a_1$ 이므로

조건 (가)를 만족시키지 않는다,
따라서 r 이 음수이므로
$|a_{n+1}-a_n|=|a_n(r-1)|=(1-r)\cdot|a_n|$ 에서
수열 $\{|a_{n+1}-a_n|\}$ 은 첫째항이 $a_1(1-r)$ 이고 공비가 $-r$ 인 등비수열임을 알 수 있다.

$\sum_{n=1}^{\infty}|a_{n+1}-a_n| = \frac{a_1(1-r)}{1+r}=3a_1$ 에서 $r=-\frac{1}{2}$ 이고,
이를 조건 (나)에 대입하면

$$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n)^2=\frac{{a_1}^2}{1-\frac{1}{4}}=\frac{4}{3}{a_1}^2=12$$ 이므로 $a_1=3$ 이다.

$$\therefore \sum_{n=1}^{\infty}a_n=\frac{3}{1+\frac{1}{2}}=2$$ 이다.

<손풀이>

$|a_{n+1}-a_n| = |a_n(r-1)| = (1-r)|a_n|$

(가) $\sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{|a_{n+1}-a_n|}_{\text{양수}} = 3a_1 \to a_1>0$

Case1> $-1<r<0 \to |a_n|$: 첫번째 항 $=a_1$
공비 $=-r$

$\frac{\cancel{a_1}}{1+r}\times(1-r) = 3\cancel{a_1} \to r=-\frac{1}{2}$

(나) $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n)^2 = \frac{(a_1)^2}{1-r^2} = \frac{4}{3}(a_1)^2=12$

$\therefore a_1=3$ (by $a_1>0$)

$\therefore a_n=3\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

$\sum_{n=1}^{\infty}a_n = \frac{3}{1+\frac{1}{2}} = 2$

Case2> $0<r<1 \to |a_n|$: 첫번째 항 $=a_1$
공비 $=r$

$\frac{1-r}{1-r}\times a_1 = 3a_1 \to a_1=0 \to$ 모순

Day. 19

수학1, 수학2

19-1. 42

$x=1$ 을 대입하면 $0=1+k$, $k=-1$ 이다.

양변을 미분하면 $f(x)+f'(x)=4x^3-3x^2$ 이다. ⋯ ㉠

$f(x)$ 는 다항함수이므로 다음과 같다.

$f(x)=4x^3+ax^2+bx+c$

$f'(x)=12x^2+2ax+b$

이때 ㉠을 만족시키려면

$a=-15$, $b=30$, $c=-30$ 이므로

$f(x)=4x^3-15x^2+30x-30$ 이다.

$\therefore\ f(0)+f'(-1)=-30+72=42$

(* 참고 : '$e^x\times$ 다항함수' 꼴의 적분을 외우고 있다면 다음과 같이 ㉠의 식에 e^x 을 곱해서 $f(x)$ 를 바로 계산해도 된다.)

$$\int e^x\{f(x)+f'(x)\}dx=\int(4x^3-3x^2)e^x dx$$

$$=e^x f(x)=\{(4x^3-3x^2)-(12x^2-6x)+(24x-6)-24\}e^x$$

$$=(4x^3-15x^2+30x-30)e^x$$

$$\therefore\ f(x)=4x^3-15x^2+30x-30$$

<손풀이>

$\int_1^x f(t)+f'(t)\,dt=x^4+kx^3$

$x=1$ 대입 $\rightarrow$ $0=1+k$ $\rightarrow k=-1$

x에 대해 미분 $\rightarrow f(x)+f'(x)=4x^3-3x^2$

$f(x)$가 다항함수 이므로

Let $\begin{cases} f(x)=4x^3+ax^2+bx+c \\ f'(x)=12x^2+2ax+b \end{cases}$

$\therefore\ 12+a=-3,\ 2a+b=0,\ b+c=0$

$\therefore\ a=-15,\ b=30,\ c=-30$

$\therefore\ f(x)=4x^3-15x^2+30x-30$

19-2. ④

$$\sum_{n=1}^{m} a_n = \frac{m \times (a_1 + a_m)}{2} = 45$$

$\therefore\ m = 9$

19-3. ④

$f(x) = 2^{x-a} + b$ 이므로

역함수는 $g(x) = \log_2(x-b) + a$ 이다.

곡선 $y = g(x)$ 가 x 축과 만나는 점의 좌표는 $(2^{-a}+b,\ 0)$ 이고
점근선의 방정식은 $x = b$ 이므로

$2^{-a} + b = 8$, $b = 4$ 에서 $a = -2$ 이다.

$\therefore\ a + 2b = 6$

(*별해)

역함수의 식을 구하지 않고 함수 $f(x)$ 로만 생각해보자.
역함수의 점근선이 $x = 4$ 라는 조건은 곧 $f(x)$ 의 점근선이
$y = 4$ 라는 것과 같으니 $b = 4$ 임을 바로 구할 수 있다.
$g(8) = 0$ 에서 $f(0) = 8$ 을 얻을 수 있으므로 $2^{-a} + 4 = 8$ 에서
$a = -2$ 이다.

19-4. ④

i) $f(x)$ 가 $x = a$ 에서 연속인 경우

$2a - 6 = a^3 - 5a$

$a^3 - 7a + 6 = 0$

$(a-1)(a-2)(a+3) = 0$

$\therefore\ a = -3,\ 1,\ 2$

ii) $f(x)$ 가 $x = a$에서 불연속, $g(a) = 0$ 인 경우

$a - 3a - 8 = 0$

$\therefore\ a = -4$

따라서 모든 실수 a 의 값의 합은 -4 이다.

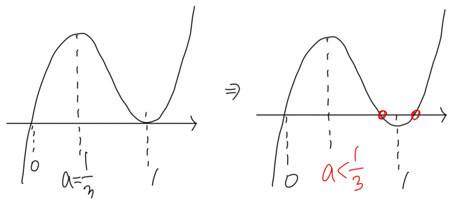
19-5. ③

위치를 $s(t)$ 라고 할 때, $s'(t) = v(t)$ 이고
점 P 가 $t = 0$ 일 때 원점을 출발하므로 $s(0) = 0$ 이다.
즉, 다시 원점을 지나는 횟수는 $s(t) = 0$ 의 $t > 0$ 인 실근의
개수로 해석할 수 있다.
구하고자 하는 두 극한값의 각각의 상황을 확인해보자.

i) $a = \dfrac{1}{3}$

$s'(t) = v(t) = 3(t-1)(t-a)$ 에서 $a < 1$ 이므로
삼차함수 $s(t)$ 는 $t = 1$ 에서 극소, $t = a$ 에서 극대이다.

다음 그림과 같이 $a = \dfrac{1}{3}$ 에서 $s(t) = 0$ 은 $t = 1$ 에서 중근을
갖는다.



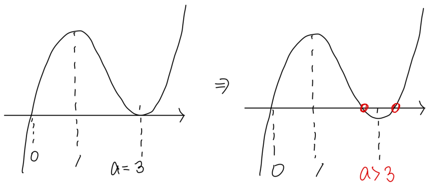
따라서 $a<\dfrac{1}{3}$ 에서 $t>0$ 인 실근을 두 개 가지므로

$\displaystyle\lim_{a\to\frac{1}{3}-} f(a)=2$ 이다.

ii) $a=3$

$s'(t)=v(t)=3(t-1)(t-a)$ 에서 $a>1$ 이므로 삼차함수 $s(t)$ 는 $t=a$ 에서 극소, $t=1$ 에서 극대이다.

다음 그림과 같이 $a=3$ 에서 $s(t)=0$ 은 $t=3$ 에서 중근을 갖는다.



따라서 $a>3$ 에서 $t>0$ 인 실근을 두 개 가지므로

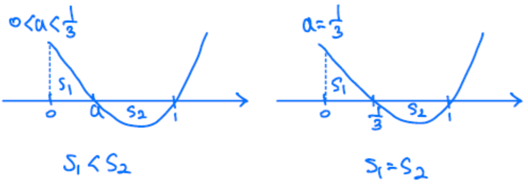
$\displaystyle\lim_{a\to 3+} f(a)=2$ 이다.

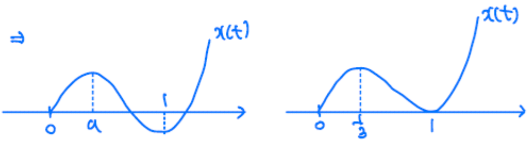
$\therefore \displaystyle\lim_{a\to\frac{1}{3}-} f(a)+\lim_{a\to 3-} f(a)=4$

<손풀이>

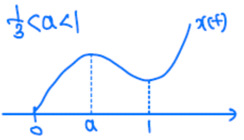
$x(t)=t^3-\frac{3}{2}(1+a)t^2+3at$

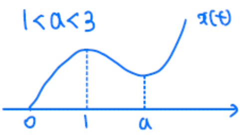
$x(1)=-\frac{1}{2}+\frac{3}{2}a$, $x(a)=-\frac{1}{2}a^3+\frac{3}{2}a^2$



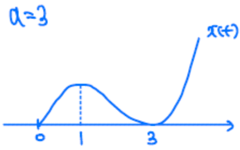
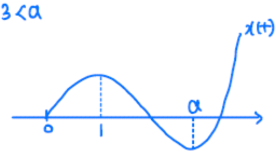


위와 마찬가지로 S_1, S_2의 넓이 비교를 통해 $x(t)$ 그래프 그리자.





$a=3$ $\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad$ $3<a$

$$\therefore f(a)=\begin{cases} 2 & 0<a<\frac{1}{3} \\ 1 & a=\frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{3}<a<3 \\ 1 & a=3 \\ 2 & 3<a \end{cases}$$

$f\left(\frac{1}{3}-\right)=2,\ f(3+)=2$

19-6. ②

조건 (나)에서 $f(x)$의 극값이 존재하므로

$f(x)=a(x+1)^2(x-4)$ 또는

$f(x)=a(x+1)(x-4)^2$ 이다. $(a>0)$

그런데 $f(x)=a(x+1)^2(x-4)$ 의 극댓값은 0 이므로

$f(x)=a(x+1)(x-4)^2$ 이다.

삼차함수의 비율 관계를 이용하면 $f(x)$ 는 $x=\frac{2}{3}$ 에서

극대이다.

따라서 극댓값은 $f\left(\frac{2}{3}\right)=\frac{500}{27}a=\frac{100}{9}$ 이므로 $a=\frac{3}{5}$ 이다.

$g(x)=\frac{5}{3}(x+1)^2(x-4)$

$g'(x)=5(x+1)(x-\frac{7}{3})$

$\therefore\ g'(2)=-5$

<손풀이>

(가) (나)조건에서 $f(x)$가 극값을 갖는다.

$\rightarrow f(x)=\underbrace{k(x+1)^2(x-4)}_{\text{극댓값}=0}$ or $\underbrace{k(x+1)(x-4)^2}_{\text{극댓값}>0}$

(나) $f(x)$의 극댓값 $=f\left(\frac{2}{3}\right)=\frac{500}{27}k=\frac{100}{9}$

$\therefore k=\frac{3}{5}$

$\therefore f(x)=\frac{3}{5}(x+1)(x-4)^2$

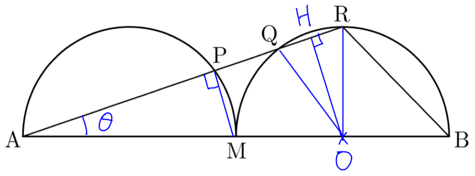
$g(x)=\frac{5}{3}(x+1)^2(x-4)$

19-7. ⑤

$\angle PAM = \theta$라 하자.

선분 BM의 중점을 점 O, 점 O에서 현 QR에 내린 수선의 발을 점 H라고 하자.

문제의 조건에 의해 $\overline{PQ} = \overline{QR}$이고, 점 H가 선분 QR을 수직이등분하므로 $\overline{QH} = \overline{HR} = \frac{1}{2}\overline{PQ}$ 가 성립한다. … ㉠



이때, 직각삼각형 APM에서 $\overline{AP} = 2\cos\theta$이고 직각삼각형 AHO에서 $\overline{AH} = 3\cos\theta$이므로 $\overline{PH} = \cos\theta$이다.

㉠에 의해 $\overline{PH} = \frac{3}{2}\overline{PQ} = \cos\theta$ 이므로 $\overline{PQ} = \frac{2}{3}\cos\theta$가 된다.

한편 직각삼각형 AHO에서 $\overline{OH} = 3\sin\theta$이고, 반지름인 $\overline{OQ} = 1$이므로 이등변삼각형 QOR에서 피타고라스 정리를 쓰면

$\overline{QH} = \sqrt{1 - 9\sin^2\theta}$ 이다.

즉, $\overline{QR} = 2\sqrt{1 - 9\sin^2\theta}$ 가 된다.

이제 다시 $\overline{PQ} = \overline{QR}$라는 식을 이용해보자.

$\frac{2}{3}\cos\theta = 2\sqrt{1 - 9\sin^2\theta}$, $\frac{1}{3}\cos\theta = \sqrt{1 - 9\sin^2\theta}$

$\frac{1}{9}\cos^2\theta = 1 - 9\sin^2\theta = 9\cos^2\theta - 8$

$\cos^2\theta = \frac{9}{10}$ 이므로

$\sin\theta = \frac{1}{\sqrt{10}}$, $\cos\theta = \frac{3}{\sqrt{10}}$ $\left(0 < \theta < \frac{\pi}{2}\right)$ 이다.

$\overline{AR} = \overline{AH} + \overline{HR} = 3\cos\theta + \sqrt{1 - 9\sin^2\theta} = \sqrt{10}$

삼각형 ABR에서 코사인법칙을 이용하면

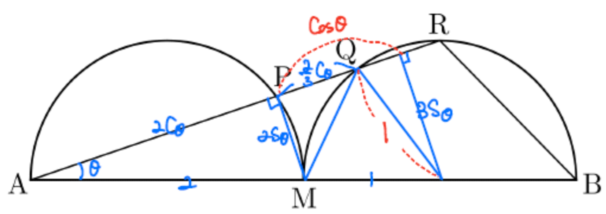
$\overline{BR}^2 = 10 + 16 - 8\sqrt{10} \times \frac{3}{\sqrt{10}} = 2$ 이다.

삼각형 ABR의 외접원의 반지름의 길이를 R이라 하면

$\overline{BR} = 2R\sin\theta$, $\sqrt{2} = \frac{2R}{\sqrt{10}}$

$\therefore R = \sqrt{5}$

<손풀이>



$1=\frac{1}{9}C_\theta^2+9S_\theta^2$

$\therefore C_\theta=\frac{3}{\sqrt{10}},\ S_\theta=\frac{1}{\sqrt{10}}$

$\overline{BR}^2=16+10-2\cdot4\cdot\sqrt{10}\cdot\frac{3}{\sqrt{10}}=2$

$R=\frac{\overline{BR}}{2\sin\theta}=\sqrt{5}$

19-8. ③

$g(2)=-2$이므로 $\lim_{x\to2}\frac{f(x)-f(2)}{f(x-2)}=-2$에서 분자의 극한값이 0 이므로 분모의 극한값 역시 0, 즉 $f(0)=0$ 이어야 한다.

이때

$g(t)=\lim_{x\to t}\frac{f(x)-f(t)}{x-t}\times\frac{x-t}{f(x-t)-f(0)}=\frac{f'(t)}{f'(0)}$ 이다.

$f'(t)$ 는 최고차항의 계수가 3 인 이차함수이므로

함수 $g(t)$ 가 최소일 때는 곧 $f'(t)$ 가 최소일 때이다.

즉, $f'(t)$ 의 축이 $t=2$ 이므로 다음과 같이 둘 수 있다.

$f'(t)=3(t-2)^2+k$

이제 최솟값이 -2 임을 이용해보면

$g(2)=\frac{f'(2)}{f'(0)}=\frac{k}{12+k}=-2$

따라서 $k=-8$ 이고 $f'(t)=3(t-2)^2-8$ 이다.

$f(t)=(t-2)^3-8t+C$라 두면

$f(0)=0$ 이므로 $C=8$

$\therefore f(6)=24$

확률과 통계

19-9. ②

이때 $\mathrm{P}(6\le X\le 8)\le \mathrm{P}(10+a\le X\le 12+a)$이려면 정규분포에서 $\mathrm{P}(10+a\le X\le 12+a)$의 범위가 $\mathrm{P}(6\le X\le 8)$의 범위보다 평균 m에 가깝거나 같은 거리에 있어야 한다.

i) $m<7$인 경우

$12+a\le 8,\ 10+a\ge 2m-8$

따라서 $2m-18\le a\le -4$

그러나 위 부등식에서 실수 a의 최댓값과 최솟값의 곱이 양수가 되므로 $m<7$이 아니다.

ii) $m\ge 7$

$12+a\le 2m-6,\ 10+a\ge 6$

따라서 $-4\le a\le 2m-18$

$-4(2m-18)=-8$이므로 $m=10$

19-10. 305

$f(1)+f(2)+f(3)+f(4)+f(5)=23\times f(6)$이려면
$f(1)+f(2)+f(3)+f(4)+f(5)=23$, $f(6)=1$
이어야 한다.
$a=6-f(1)$, $b=6-f(2)$, $c=6-f(3)$, $d=6-f(4)$,
$e=6-f(5)$라 놓으면
$a,\ b,\ c,\ d,\ e$는 6보다 작은 음이 아닌 정수이며
$a+b+c+d+e=7$를 만족시킨다.
$\therefore\ {}_5\mathrm{H}_7-\dfrac{5!}{3!}-5=305$
($\because$ $a,\ b,\ c,\ d,\ e$ 중 하나가 6 또는 7인 경우를 제외)

19-11. 20

조건 (가)와 (나)에 의해 x와 y는 짝수이고 z와 w는 홀수이다.
$x=2x'+2$, $y=2y'+2$, $z=2z'+1$, $w=2w'+1$이라 하면
$x',\ y',\ z',\ w'$은 음이 아닌 정수이며
$(2x'+2)+(2y'+2)+(2z'+1)+(2w'+1)=12$이므로
$x'+y'+z'+w'=3$
따라서 $(x,\ y,\ z,\ w)$의 개수는 ${}_4\mathrm{H}_3=20$

19-12. ④

$b=3a-2$이므로 $\mathrm{P}(A)=\dfrac{a}{n}$, $\mathrm{P}(B)=\dfrac{3a-2}{n}$이고

$\mathrm{P}(A\cup B)=\dfrac{4a-2}{n}$이다.

조건 (가)에서 a는 10보다 작은 자연수이다.

조건 (다)에서 $\mathrm{P}(A^C\cap B^C)=\mathrm{P}((A\cup B)^C)=\dfrac{1}{7}$이므로

$\mathrm{P}(A\cup B)=\dfrac{4a-2}{n}=\dfrac{6}{7}$이다.

$7(4a-2)=6n$에서
$a=2$, $n=7$ 또는
$a=5$, $n=21$ 또는
$a=8$, $n=35$이 가능하다.

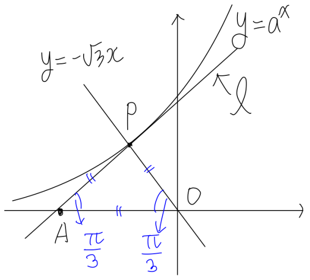
이때 $\mathrm{P}(A)=\dfrac{a}{n}$는 $a=8$, $n=35$일 때, 최솟값 $\dfrac{8}{35}$을 갖는다.

미적분

19-9. ③

$\angle\mathrm{POA}=\dfrac{\pi}{3}$ 이므로 정삼각형이 되려면 $\angle\mathrm{PAO}=\dfrac{\pi}{3}$ 이다.

따라서 직선 l의 기울기는 $\sqrt{3}$ 이다. $\cdots$ ㉠
(*그림 참고)



점 P 의 좌표를 $(k,\ -\sqrt{3}k)$ $(k<0)$ 이라 하자.

점 P$(k,\ -\sqrt{3}k)$가 곡선 $y=a^x$ 위의 점이므로

$-\sqrt{3}k=a^k$이다.

㉠에서 점 P 에서의 접선의 기울기가 $\sqrt{3}$ 이므로

$y'=a^x\ln a$에서 $a^k\ln a=\sqrt{3}$이다.

이제 a와 k에 대한 두 식을 연립하자.

$a^k\ln a=-\sqrt{3}k\times\ln a=\sqrt{3}$

$k\ln a=-1$, $a^k=\dfrac{1}{e}$

$-\sqrt{3}k=\dfrac{1}{e}$

$\therefore\ k=-\dfrac{1}{\sqrt{3}e}$

19-10. 4

$f(x)=\displaystyle\int_0^x\frac{2}{e^t+1}dt$에서 $f(0)=0$이고 양변을 미분하면

$f'(x)=\dfrac{2}{e^x+1}$ 이다.

$$\int_0^p\frac{2\ln\{f(x)+2\}}{e^x+1}dx$$
$$=\int_0^p\left[\ln\{f(x)+2\}\times\frac{2}{e^x+1}\right]dx$$
$$=\int_0^p[\ln\{f(x)+2\}\times f'(x)]dx$$

$f(x)+2=t$로 놓으면 $f'(x)=\dfrac{dt}{dx}$

$x=0$일 때 $t=f(0)+2=0+2=2$

$x=p$일 때 $t=f(p)+2=2+2=4$

$$\int_0^p\frac{2\ln\{f(x)+2\}}{e^x+1}dx=\int_0^p[\ln\{f(x)+2\}\times f'(x)]dx$$
$$=\int_2^4\ln t\,dt=\Big[t\ln t-t\Big]_2^4$$
$$=4\ln 4-2\ln 2-2=6\ln 2-2$$

$\therefore\ a+b=4$

19-11. ②

조건 (가)에서 분모의 극한값이 0 이므로 $f(3)=0$ 이고,

$\displaystyle\lim_{x\to3}\frac{f(x)}{x-3}=\lim_{x\to3}\frac{f(x)-f(3)}{x-3}=f'(3)=0$ 이므로 함수

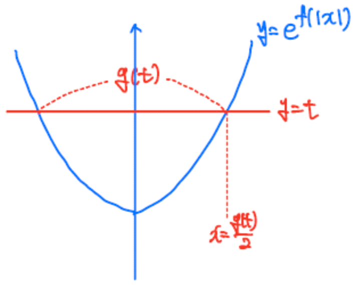
$f(x)$ 는 $(x-3)^2$ 를 인수로 가진다.
이때 조건 (나)에서 $f(x)$ 의 역함수가 존재해야 하므로
$f(x)=2(x-3)^3$ 임을 알 수 있다.
함수 $y=e^{f(|x|)}$ 의 그래프가 y 축 대칭이므로 $y=e^{f(|x|)}$ 와
$y=t$ 의 두 교점 역시 y 축 대칭이다.
따라서 곡선 $y=e^{f(x)}$ 와 직선 $y=t$ 의 교점의 x 좌표를 a 라고 하면
두 교점 사이의 거리는 $g(t)=2a$ 이다.
$e^{f(a)}=t$ 에서 $f(a)=\ln t$,
$2(a-3)^3=\ln t$ $\cdots$ ㉠
이 식을 t 에 대하여 미분하면
$6(a-3)^2\times\dfrac{da}{dt}=\dfrac{1}{t}$ $\cdots$ ㉡
$g'(t)=2\times\dfrac{da}{dt}$ 이고
$t=e^2$ 를 ㉠에 대입하면 $a=4$ 이고, 이를 ㉡에 대입하면
$\dfrac{da}{dt}=\dfrac{1}{6e^2}$ 를 얻을 수 있다.
$\therefore\ g'(e^2)=2\times\dfrac{1}{6e^2}=\dfrac{1}{3e^2}$

<손풀이>

(가) $f(x)=2(x-3)^2(x-a)$

(나) $f(x)=2(x-3)^3$

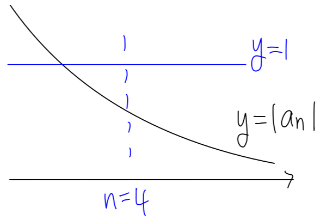
$y=\underbrace{e^{f(|x|)}}_{y\text{축 대칭 함수}}$



$e^{f\left(\frac{g(t)}{2}\right)}=t \Rightarrow \begin{cases} e^{f\left(\frac{g(e^2)}{2}\right)}=e^2 \Rightarrow \frac{g(e^2)}{2}=4 \Rightarrow g(e^2)=8 \\ \underbrace{e^{f\left(\frac{g(e^2)}{2}\right)}}_{e^2}\cdot\underbrace{f'\left(\frac{g(e^2)}{2}\right)}_{6}\cdot\frac{g'(e^2)}{2}=1 \end{cases}$

$\therefore g'(e^2)=\dfrac{1}{3e^2}$

19-12. 18



수열 $\{a_n\}$의 공비를 r이라고 할 때, a_n은 $-1<r<0$인 등비수열이므로 $|a_n|$을 위의 그래프와 같이 생각할 수 있다.

조건 (가)에서 $b_4 \neq 1$이므로 $n \geq 4$에서 $|a_n| < 1$이고 $b_n = a_n$이다.

한편 $b_1+b_2=2$에서 $b_1=b_2=1$이므로 $|a_1| \geq 1$, $|a_2| \geq 1$임을 알 수 있다.

즉, b_n은 $n=3$일 때만 정해지지 않았기 때문에 $|a_3| \geq 1$인 경우와 $|a_3|<1$인 경우로 나눠보자.

i) $|a_3|<1$, $b_3=a_3$일 때

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \frac{a_1}{1-r} = 9$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n = b_1+b_2+\sum_{n=3}^{\infty} b_n = 2+\frac{a_1 r^2}{1-r} = \frac{8}{3}$$

두 식을 연립하면 $r^2 = \dfrac{2}{27}$

이때 r이 유리수가 아니므로 모순이다.

ii) $|a_3| \geq 1$, $b_3=1$일 때

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \frac{a_1}{1-r} = 9$$

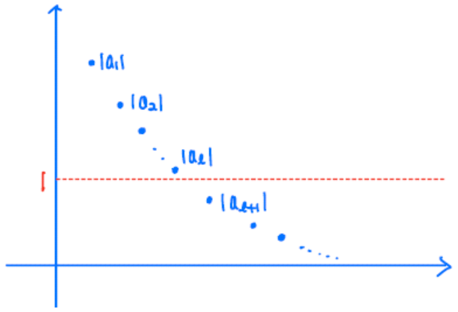
$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n = b_1+b_2+b_3+\sum_{n=4}^{\infty} b_n = 3+\frac{a_1 r^3}{1-r} = \frac{8}{3}$$

두 식을 연립하면 $r=-\dfrac{1}{3}$, $a_1=12$이다.

(이때 $a_3=\dfrac{4}{3}>1$, $|a_4|=\dfrac{4}{9}<1$이므로 조건을 전부 만족)

$$\therefore \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = \frac{12}{1-\frac{1}{3}} = 12 \times \frac{3}{2} = 18$$

<손풀이>



$$b_n = \begin{cases} 1 & 1 \le n \le l \\ a_n & l+1 \le n \end{cases}$$

$$\text{(가) } \left.\begin{array}{l} b_1 + b_2 = 2 \rightarrow 2 \le l \\ b_4 \ne 1 \rightarrow l \le 3 \end{array}\right\} \Rightarrow l = 2 \text{ or } l = 3$$

$$\text{(나) } \frac{a}{1-r} = 9 \qquad \frac{8}{3} = \sum_{n=1}^{\infty} b_n = \begin{cases} 2 + \dfrac{ar^2}{1-r} & (\text{단 } l=2) \\ 3 + \dfrac{ar^3}{1-r} & (\text{단 } l=3) \end{cases}$$

case1> $l=2$

$$\frac{8}{3} = 2 + 9 \times r^2 \rightarrow r = -\frac{\sqrt{2}}{3\sqrt{3}} \rightarrow \text{모순 (by } r = \text{유리수)}$$

case2> $l=3$

$$\frac{8}{3} = 3 + 9 \times r^3 \rightarrow r = -\frac{1}{3}$$

$$\therefore a = 12$$

$$\therefore \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = \frac{12}{1 - \frac{1}{3}} = 18$$