

백일대장

수능 역전을 위한 백일 전략서

02

정답 및 해설

Day. 8

수학1, 수학2

8-1. ②

(나)에서 자연수 a, b 에 대하여 $a^2 = b^3$ 이므로

$$b = a^{\frac{2}{3}}$$

(가)에서 $\log_2 abc = 17$ 이므로

$$abc = 2^{17}$$

a, b, c 는 모두 자연수이므로 2의 거듭제곱이어야 하고
 b 가 자연수가 되려면 a 가 8의 거듭제곱이어야 한다.

$a = 2^{3k}$ (k 는 음이 아닌 정수)이라 하면

$$b = 2^{2k}, c = 2^{17-5k} \text{이고}$$

$$\log_2 a + \log_2 b - \log_2 c = \log_2 \frac{ab}{c} = 10k - 17$$

c 가 자연수가 되려면 $0 \leq k \leq 3$ 이므로

구하고자 하는 최댓값은 13이다.

8-2. ④

점 A의 좌표는 $(-1, 0)$

점 B의 좌표는 $(0, \log_a 2)$ 이고

점 C의 y 좌표가 점 B의 y 좌표의 2배이므로

점 C의 y 좌표는 $2\log_a 2$ 이고

직선 AB와 직선 BC가 서로 수직이므로

점 C의 x 좌표가 $-(\log_a 2)^2$ 이다.

점 C는 $y = |\log_a(x+2)|$ 위의 점이므로

$(-(\log_a 2)^2, 2\log_a 2)$ 를 $y = -\log_a(x+2)$ 에 대입하면

$$2\log_a 2 = -\log_a(-(\log_a 2)^2 + 2)$$

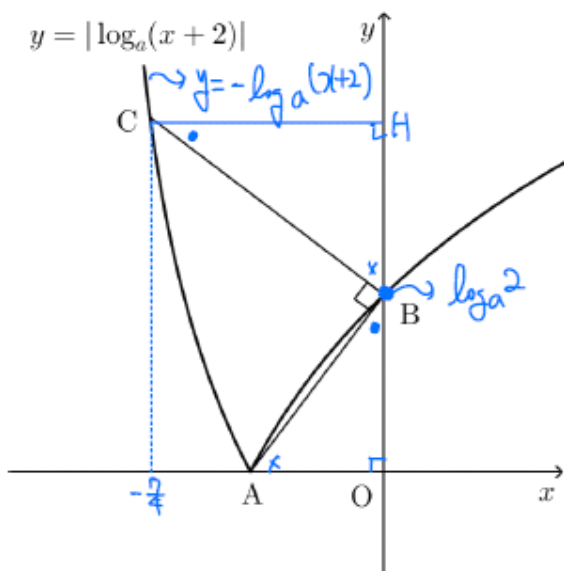
$$4 = \frac{1}{2 - (\log_a 2)^2}$$

$$(\log_a 2)^2 = \frac{7}{4}$$

$$\log_a 2 > 0 \text{이므로 } \log_a 2 = \frac{\sqrt{7}}{2}$$

$$\therefore a = 2^{\frac{2\sqrt{7}}{7}}$$

<손풀이>



$$2\log_a 2 = -\log_a(x+2) \rightarrow x = -\frac{7}{4}$$

$$\triangle OAB \sim \triangle HBC$$

$$\frac{7}{4} : \log_a 2 = \log_a 2 : 1$$

$$\therefore (\log_a 2)^2 = \frac{7}{4}$$

$$\therefore a = 2^{\frac{2}{\sqrt{7}}}$$

8-3. ②

점 P의 좌표는 $(t, t^3 + 1)$ 이고직선 AP의 방정식은 $y = t^2x + 1$ 이다. $t > 0$ 이므로 $S(t) = \int_0^t (t^2x - x^3) dx = \frac{1}{4}t^4$ 이고 $S'(t) = t^3$ 이다.

$$S'(a) = a^3 = 4$$

$$\therefore a = 2^{\frac{2}{3}}$$

<손풀이>

$$P(t, t^3+1) \rightarrow AP \text{의 직선의 방정식: } y = t^2x + 1$$

$$\therefore S(t) = \int_0^t t^2x + 1 - t(x) dx$$

$$= t^2 \int_0^t x dx + t - \int_0^t t(x) dx$$

$$S'(t) = 2t \int_0^t x dx + t^3 + 1 - f(t)$$

$$S'(a) = a^3 + a^3 + 1 - f(a) = 4$$

$$\therefore a^3 = 4$$

8-4. ④

(가)에서 $b_n = a_n - 4$ 이므로

$$a_n + 3b_n = 4a_n - 12$$

(나)에서 수열 $\{a_n + 3b_n\}$ 은 첫째항과 공차가 같은 등차수열이므로

$$a_n + 3b_n = 4a_n - 12 = pn \quad (p \text{는 상수})$$

$$a_n = \frac{pn + 12}{4}$$

$$a_5 = b_3 \text{이므로}$$

$$\frac{5p + 12}{4} = \frac{3p + 12}{4} - 4$$

$$\therefore p = -8$$

$$\therefore k = a_5 = -7$$

<손풀이>

$$(f) \quad d_{an} = d_{bn}, \quad a_1 - b_1 = 4$$

$$(4) \quad a_1 + 3b_1 = d_{an} + 3d_{bn} = 4d_{an}$$

$$4 + b_1 + 3b_1$$

$$\rightarrow \begin{cases} 1 + b_1 = d_{an} \\ a_1 - 3 = d_{an} \end{cases}$$

$$a_5 = b_3 \rightarrow a_1 + 4d_{an} = b_1 + 2d_{bn} \rightarrow a_1 - b_1 = -2d_{an}$$

$$\therefore d_{an} = d_{bn} = -2 \quad (\text{by } a_1 - b_1 = 4)$$

$$\therefore a_1 = 1$$

$$\therefore k = a_5 = 1 - 8 = -7$$

8-5. 123

등차수열 $\{a_n\}$ 의 공차가 6이므로

$$\sum_{k=1}^n a_k = 3n^2 + pn \quad (p \text{는 상수})$$

(가)에서 $f'(n) = \sum_{k=1}^n a_k = 3n^2 + pn$ 이므로

$$f(n) = n^3 + \frac{p}{2}n^2 + C$$

(나)에서 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3 + \frac{p}{2}x^2 + C}{x^2} = 3$ 이므로

$$p=6, C=0, a_n=6n+3$$

$$\therefore a_{f(2)} = a_{20} = 123$$

<손풀이>

$$(가) \sum_{k=1}^n a_k = f'(n)$$

이차항의 계수 = 3인 이차식

$$\therefore f'(n) \text{의 이차항의 계수} = 3$$

$$\therefore f(x) = x^3 + ax^2 + bx + C$$

$$(나) f(x) = x^2 Q(x), Q(0) = 3$$

$$\therefore f(x) = x^2(x+3) \rightarrow f'(x) = 3x^2 + 6x$$

$$\therefore \sum_{k=1}^n a_k = 3n^2 + 6n \rightarrow a_n = 6n + 3$$

$$\therefore a_{f(2)} = a_{20} = 123$$

8-6. ③

(가)에서 $g(7) = 5$ 이므로 $g(t) = 5$ 인 점이 있으려면

$$a-b > b$$

따라서

$$g(t) = \begin{cases} 0 & (t > a+b) \\ 2 & (t = a+b) \\ 4 & (a-b < t < a+b) \\ 5 & (t = a-b) \\ 6 & (b < t < a-b) \\ 5 & (t = b) \\ 4 & (0 < t < b) \\ 2 & (t = 0) \\ 0 & (t < 0) \end{cases}$$

(가)에서 $g(7) = 5$ 이고

(나)에서 $t < 5$ 인 모든 실수 t 에 대하여 $g(t) < g(5)$ 이므로

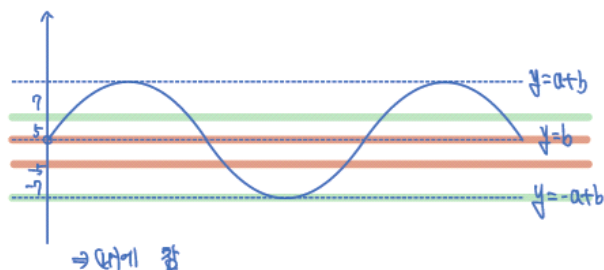
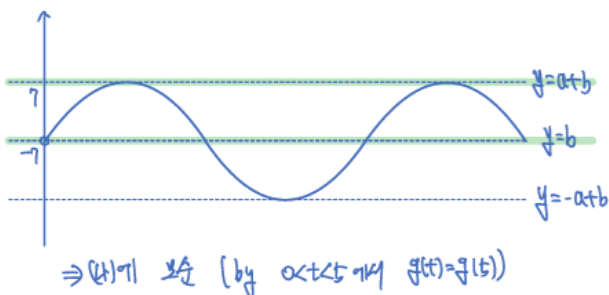
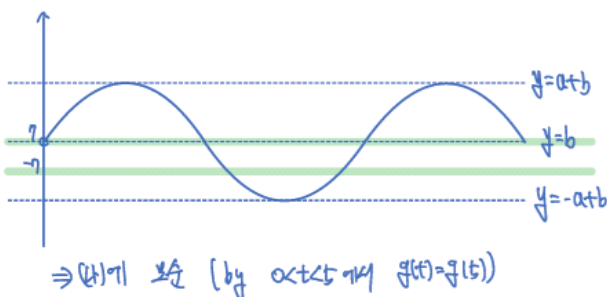
$$a-b = 7, b = 5$$

$$\therefore a = 12, a+b = 17$$

<손풀이>

$$|a \sin x + b| = t \rightarrow \begin{cases} \times & t < 0 \\ a \sin x + b = 0 & t = 0 \\ a \sin x + b = \pm t & t > 0 \end{cases}$$

$$(가) g(7) = 5$$



$$\therefore b = 5, -a + b = -7, b < 7 < a + b$$

$$\therefore a = 12, b = 5$$

8-7. ③

(가)에서 $f(x) = ax^2(x - k)$ 라 하면

(나)에서 $k < 0$ 임을 알 수 있다.

$f(x) = 0$ 의 해는 $x = 0$ 또는 $x = k$ 이므로

(다)에서 $f'(x) = 0$ 또는 $f'(x) = k$

를 만족시키는 해의 개수는 3이다.

$f'(x) = 0$ 의 해는 $x = 0$ 또는 $x = \frac{2k}{3}$ 이므로

$f'(x) = k$ 를 만족시키는 해의 개수는 1이어야 한다.

$f'(x) = 3ax^2 - 2akx = 3a\left(x - \frac{k}{3}\right)^2 - \frac{ak^2}{3}$ 이므로

$$-\frac{ak^2}{3} = k$$

$$\therefore ak = -3$$

(나)에서 $f\left(\frac{2k}{3}\right) = 1$ 이므로 $-\frac{4ak^3}{27} = 1$

$$\therefore k^2 = \frac{9}{4}, k = -\frac{3}{2}, a = 2$$

$$\therefore f(2) = 28$$

확률과 통계

8-9. ③

$$\frac{1}{5} + a + b = 1 \text{ 이므로}$$

$$b = \frac{4}{5} - a$$

$$E(\bar{X}) = E(X) = 22 \text{ 이므로}$$

$$2 + 20a + 30b = 26 - 10a = 22$$

$$\therefore 10a = 4, a = \frac{2}{5}, b = \frac{2}{5} \text{ 이므로}$$

$P(\bar{X} = 20)$ 을 만족시키는 표본크기 2의 경우는
(10, 30), (20, 20), (30, 10)으로

$$\frac{1}{5} \times \frac{2}{5} + \frac{2}{5} \times \frac{2}{5} + \frac{2}{5} \times \frac{1}{5} \text{로}$$

$$\frac{2}{25} + \frac{4}{25} + \frac{2}{25} = \frac{8}{25} \text{ 이다.}$$

<손풀이>

$$\textcircled{1} a + b = \frac{4}{5}$$

$$\textcircled{2} E(\bar{X}) = E(X) = 22.$$

$$2 + 20a + 30b = 22$$

$$\begin{cases} 20a + 30b = 20 \\ a + b = \frac{4}{5} \end{cases}$$

$$a = \frac{2}{5}, b = \frac{2}{5}$$

$n=2$ 일 때.

$P(\bar{X} = 20) :$

표본 $X_1 + X_2 = 40$ 일 때.

$$\left. \begin{aligned} (10, 30) &= \frac{2}{25} \\ (20, 20) &= \frac{4}{25} \\ (30, 10) &= \frac{2}{25} \end{aligned} \right\} = \frac{8}{25}$$

8-10. ②

$$4^w \leq 8 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{x+y+z}$$

$$2^{2w} \leq 2^{3-(x+y+z)}$$

$2w \leq 3 - (x + y + z)$ 이어야 하므로

$w = 0$ 일 때,

$0 \leq x + y + z \leq 3$ 이고

그 경우의 수는 ${}_3H_0 + {}_3H_1 + {}_3H_2 + {}_3H_3 = 20$

$w = 1$ 일 때,

$0 \leq x + y + z \leq 1$ 이고

그 경우의 수는 ${}_3H_0 + {}_3H_1 = 4$

따라서 순서쌍 (x, y, z, w) 의 개수는 24개이다.

<손풀이>

$$2^{2w} \leq 2^3 \times 2^{-2-y-z}$$

$$2w \leq 3-2-y-z$$

$$\therefore 2+y+z+2w \leq 3 \quad \text{용아님 자식해. 순서쌍.}$$

$$i) \quad w=0 \quad {}_4H_3 = {}_6C_3 = 20$$

$$ii) \quad w=1 \quad {}_4H_1 = {}_4C_1 = 4$$

8-11. 560

(가)에서 $f(2) \leq f(1)$, $f(4) \leq f(1)$, $f(6) \leq f(1)$

(나)에서 $f(2) \geq f(1)$, $f(3) \geq f(1)$, $f(5) \geq f(1)$

따라서 $f(2) = f(1)$ 이고

$f(1) = 1$ 일 때,

$f(2) = 1$, $f(4) = f(6) = 1$, $f(3) \geq 1$, $f(5) \geq 1$ 이므로

그 경우의 수는

$$1^2 \times 6^2 = 36$$

마찬가지로 $f(1) = 2$ 일 때의 경우의 수는

$$2^2 \times 5^2 = 100$$

$f(1) = 3$ 일 때의 경우의 수는

$$3^2 \times 4^2 = 144$$

$f(1) = 4$, $f(1) = 5$, $f(1) = 6$ 일 때의 경우의 수는 각각

$f(1) = 3$, $f(1) = 2$, $f(1) = 1$ 일 때의 경우의 수와 같으므로

함수 $f: X \rightarrow X$ 의 개수는

$$2 \times (36 + 100 + 144) = 560$$

<손풀이>

짝	2, 4, 6	모두	f(1)의 멱등원 사용...
홀	1, 3, 5		

1	1	또한 $f(2) = f(1)$
2	2	
3	3	
4	4	
5	5	
6	6	

$$\textcircled{1} \quad f(1) = f(2) = 1 \rightarrow f(4) = f(6) = 1 \rightarrow f(3), f(5) \geq 1$$

$$1 \quad \times \quad 6^2 = 36$$

$$\begin{array}{lll}
 \textcircled{2} & f(1) - f(2) = 2 & f(4) \cdot f(6) \leq 2, \quad f(3) \cdot f(5) \geq 2 \\
 & & 2^2 \quad \times \quad 5^2 = 100 \\
 \textcircled{3} & f(1) = f(2) = 3 & 3^2 \quad \quad 4^2 = 144 \\
 \textcircled{4} & = 4 & 4^2 \quad \quad 3^2 = 144 \\
 \textcircled{5} & = 5 & 5^2 \quad \quad 2^2 = 100 \\
 \textcircled{6} & = 6 & 6^2 \quad \quad 1^2 = 36
 \end{array}$$

대체하자.

$$(36 + 100 + 144) \times 2 = \textcircled{560}$$

8-12. ①

시행을 2번 했을 때, 확인한 4개의 수의 최댓값이 12이려면,
4개의 수 중 적어도 하나는 12여야 하므로

최댓값이 12일 확률은

전체 확률에서 4개의 수 중 12가 없을 확률을 뺀 것과 같다.

따라서 구하고자 하는 확률은

$$1 - \left(\frac{{}_{11}C_2}{{}_{12}C_2} \right)^2 = 1 - \left(\frac{5}{6} \right)^2 = \frac{11}{36}$$

<손풀이>

1번 시행도 12 포함 도는 확률

$$\frac{11}{{}_{12}C_2} = \frac{11}{66} = \frac{1}{6}$$

2번 시행도 제각각 한번씩만 12 나오면 OK

$$\begin{aligned}
 1 - \left(\frac{5}{6} \right)^2 &= 1 - \frac{25}{36} \\
 &= \frac{11}{36}
 \end{aligned}$$

미적분

8-9. 36

$$f(t) = \frac{1}{2}t(t+a)e^{-\frac{2}{a}t} \text{ 이므로}$$

$$f'(t) = \frac{1}{2}\left(a - \frac{2}{a}t^2\right)e^{-\frac{2}{a}t}$$

함수 $f(t)$ 가 $t = 3\sqrt{2}$ 에서 극대이므로

$$f'(3\sqrt{2}) = 0$$

$$a - \frac{36}{a} = 0$$

$$\therefore a^2 = 36, a = 6$$

$$\therefore f(6) = \frac{36}{e^2}$$

8-10. 16

$x = 1$ 일 때

$$t - \frac{2}{t} = 1 \text{ 이므로}$$

$$t^2 - t - 2 = 0$$

$t > 0$ 이므로 $t = 2$

$$\therefore f(1) = 14$$

$$x'(t) = 1 + \frac{2}{t^2}, y'(t) = 3t^2 + 3 \text{ 이므로}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y'(2)}{x'(2)} = 10$$

접선의 방정식은

$$y = 10x + 4$$

$$S = \frac{1}{2} \times \frac{2}{5} \times 4 = \frac{4}{5}$$

$$\therefore 20S = 16$$

8-11. ④

$$(나) \text{에서 } \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{f(\sin x)}{\cos^2 x} dx = 2 \text{ 이므로}$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{6}} \sec^2 x f(\sin x) dx = 2$$

$$\left[\tan x f(\sin x) \right]_0^{\frac{\pi}{6}} - \int_0^{\frac{\pi}{6}} \sin x f'(\sin x) dx = 2$$

$$\therefore \int_0^{\frac{\pi}{6}} \sin x f'(\sin x) dx = 1 - 2 = -1$$

<손풀이>

$$\begin{aligned}
& \int_0^{\frac{\pi}{6}} \sin x f'(\sin x) dx \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{6}} \underbrace{\tan x}_{\text{고미}} \underbrace{f'(\sin x) \cos x}_{\text{적적}} dx \\
&= \left[\tan x f(\sin x) \right]_0^{\frac{\pi}{6}} - \underbrace{\int_0^{\frac{\pi}{6}} \sec^2 x f(\sin x) dx}_{\substack{|| \\ 2}} \\
&= \frac{1}{\sqrt{3}} f\left(\frac{1}{2}\right) - 2 \\
&= -1
\end{aligned}$$

8-12. ②

(가)에서 $\lim_{n \rightarrow \infty} \tan a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$ 이고(나)에서 $a_n < a_{n+1} < a_n + \pi$ 이므로

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} n\pi$$

(가)에서 $\tan a_{2n} = \frac{1}{\sqrt{2n}}$ 이므로

$$\tan(a_{2n} - a_n) = \frac{\frac{1}{\sqrt{2n}} - \frac{1}{\sqrt{n}}}{1 + \frac{1}{\sqrt{2n}}} = \frac{\sqrt{n} - \sqrt{2n}}{\sqrt{2n} + 1}$$

$$\tan^2(a_{2n} - a_n) = \frac{3n - 2\sqrt{2}n}{2n^2 + 2\sqrt{2}n + 1}$$

따라서

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \times \tan^2(a_{2n} - a_n)$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} n\pi \times \frac{3n - 2\sqrt{2}n}{2n^2 + 2\sqrt{2}n + 1} = \left(\frac{3}{2} - \sqrt{2}\right)\pi$$

<손풀이>

$$\tan a_{2n} = \frac{1}{\sqrt{2n}}$$

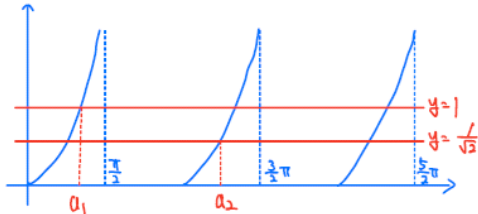
$$\tan(a_{2n} - a_n) = \frac{\frac{1}{\sqrt{2n}} - \frac{1}{\sqrt{n}}}{1 + \frac{1}{\sqrt{2n}}} = \frac{\sqrt{n} - \sqrt{2n}}{\sqrt{2n} + 1}$$

$$\therefore \tan^2(a_{2n} - a_n) = \left(\frac{(1-\sqrt{2})\sqrt{n}}{\sqrt{2n} + 1}\right)^2$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \times \tan^2(a_{2n} - a_n)$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{a_n}{n} \right) \times \underbrace{\left\{ \sqrt{n} \tan(a_{2n} - a_n) \right\}^2}_{= \left(\frac{1-\sqrt{2}}{\sqrt{2}} \right)^2 \text{로 고정}}$$

구하기



$$\therefore (n-1)\pi < a_n < (n-\frac{1}{2})\pi$$

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{n} = \pi$$

$$= \pi \times \frac{3-2\sqrt{2}}{2}$$

Day. 9

수학1, 수학2

9-1. ⑤

$$f'(x) = 3x^2 - 2ax - 4$$

함수 $f(x)$ 가 $x = a$ 에서 극소이므로

$$f'(a) = 0$$

$$3a^2 - 2a^2 - 4 = 0$$

$$\therefore a^2 = 4$$

$a = -2$ 일 때, 함수 $f(x)$ 는 $x = a$ 에서 극대이므로

$$\therefore a = 2, b = -\frac{2}{3}$$

$$a - 3b = 4$$

9-2. 23

$$\lim_{x \rightarrow b} (x^2 - b^2) = 0 \text{이므로}$$

$$\lim_{x \rightarrow b} (ax - b) \neq 0 \text{이면 } \lim_{x \rightarrow b} \frac{x^2 - b^2}{ax - b} = 0$$

이때, $b = 9$, a 는 10 이하의 자연수

$$\lim_{x \rightarrow b} (ax - b) = 0 \text{이면 } a = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow b} \frac{x^2 - b^2}{ax - b} = 2b = -b + 9 \text{이므로 } b = 3$$

$$\therefore M = 19, m = 4, M + m = 23$$

<손플이>

case 1) $b=9$

$$\lim_{x \rightarrow 9} \frac{(x-9)(x+9)}{ax-9} = 0 \rightarrow 9a-9 \neq 0 \rightarrow a \neq 1$$

$$\therefore 11 \leq a+b \leq 19$$

case 2) $b \neq 9$

$$\frac{-b+9}{\neq 0} = \lim_{x \rightarrow b} \frac{(x+b)(x-b)}{ax-b} = \lim_{x \rightarrow b} \frac{(x+b)(x-b)}{x-b} = 2b$$

$\downarrow$
 $a=1$

$$\therefore b=3$$

$$\therefore a+b=4$$

$$M=19, m=4$$

9-3. 35

$$f(6) = 3 + \sum_{n=1}^6 a_n = 3 + \sum_{n=1}^4 a_n + a_5 + a_6 \text{ 이므로}$$

$$f(6) = 3 + f(4) + a_5 + a_6, f(6) - f(4) = 3 + a_5 + a_6$$

$$f(x) = px + q \text{ 라 하면 } 2p = 3 + a_5 + a_6$$

$$n \text{ 이 홀수일 때, } a_n = 1$$

$$a_n \geq 0 \text{ 이므로 } f(6) = 3 + \sum_{n=1}^6 a_n > 0$$

$$\text{따라서 } a_6 = 2$$

$$\therefore p = 3$$

$$\text{마찬가지로 } f(4) > 0 \text{ 이므로 } a_4 = 2$$

$$a_2 = 2 \text{ 이면 } f(4) = 6 \text{ 인데 이때 } f(2) = 0 \text{ 이므로 모순}$$

$$a_2 = 1 \text{ 이어도 이때 } f(2) \neq 0 \text{ 이므로 모순}$$

$$\text{따라서 } a_2 = 0$$

$$\therefore f(4) = 4, q = -8$$

$$f(10) + \sum_{n=1}^{10} a_n = 22 + 13 = 35$$

<손플이>

$$0 \leq a_n \leq 2 \rightarrow 0 < f(4) < f(6) \text{ 이다. } \rightarrow \text{가장 } > 0$$

$$\therefore \frac{f(6) - f(4)}{6 - 4} = \frac{a_5 + a_6 + 3}{2} = 3$$

$$\therefore f(x) = 3(x-n)$$

9-4. ⑤

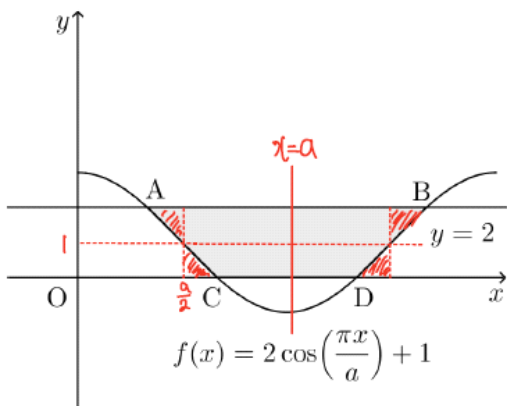
$$\overline{AB} = \frac{4a}{3}, \overline{CD} = \frac{2a}{3}$$

사각형 ABCD의 넓이는

$$2a \times \frac{1}{2} \times 2 = 12$$

따라서 $a = 6$

<손풀이>



$$12 = 2 \times a \rightarrow a = 6$$

9-5. ④

$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - 3}{(x - 1)^2}$ 의 값이 존재하므로

$f(x) - 3$ 이 $(x - 1)^2$ 을 인수로 가져야 한다.

$f(x)$ 의 최고차항의 계수가 1이므로

$$f(x) - 3 = (x - 1)^2(x + k)$$

라 하면

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - 3}{(x - 1)^2} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x - 1)^2(x + k)}{(x - 1)^2} = 1 + k = a$$

$$\therefore f(x) = (x - 1)^2(x + a - 1) + 3$$

조건 (나)에서 $f(b) = 3$ 이고 $b \neq 1$ 이므로

$$b = -a + 1$$

$$f'(x) = 2(x - 1)(x + a - 1) + (x - 1)^2$$

$$\text{에서 } f'(b) = (b - 1)^2$$

곡선 $y = f(x)$ 위의 점 $(b, 3)$ 에서의 접선의 방정식은

$$y = (b - 1)^2(x - b) + 3$$

이 직선이 점 $(0, 7)$ 을 지나므로

$$7 = -b(b - 1)^2 + 3$$

$$\therefore b = -1, a = 2$$

$$f(a - b) = f(3) = 19$$

$$\begin{cases} \frac{8}{4} = \frac{x^2 y^2 - 4}{2xy} \\ x^2 y^2 = 2(2^2 + 1) \end{cases} \Rightarrow xy = 4$$

$$S = \frac{1}{2} xy \sin \theta = \frac{1}{2} \times 4 \times \frac{\sqrt{7}}{4} = \frac{\sqrt{7}}{2}$$

9-7. ④

$y = a^{x+2} + 2$ 는 $y = a^x$ 을

x 축으로 -2 만큼, y 축으로 2 만큼 평행이동한 그래프

$y = a^x$ 은 $y = \log_a x$ 의 역함수 이므로

$y = a^x$ 이 직선 $y = -x + b$ 와 만나는 점을 P 라 하면

$$\overline{AP} = \overline{BC} = 2\sqrt{2}$$

따라서 $\overline{AC} = 8\sqrt{2}$ 이므로 $b = 8$

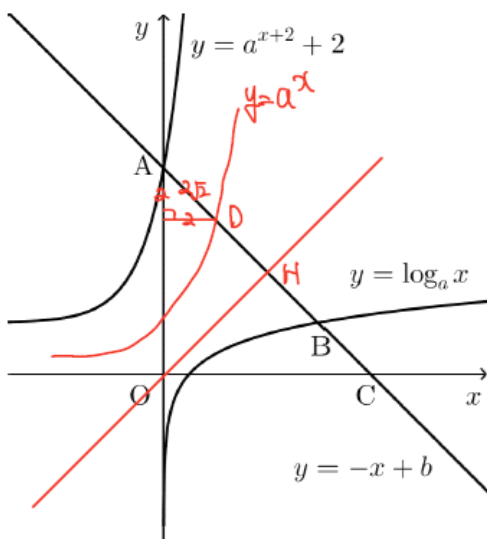
점 B의 좌표는 $(6, 2)$ 이므로

$$2 = \log_a 6$$

$$\therefore a^2 = 6$$

$$a^2 + b^2 = 70$$

<손풀이>



$$\overline{AD} = \overline{BC}, \overline{DH} = \overline{HB}, \overline{AB} : \overline{BC} = 3 : 1$$

$$\therefore \overline{AD} = \overline{DH} = \overline{HB} = \overline{BC}$$

$$\therefore H_x = 4 \rightarrow H(4, 4) \rightarrow b = 8 \text{ (by } y = -x + b)$$

$$D(2, 6) \rightarrow a^2 = 6$$

$$\therefore a^2 + b^2 = 6 + 64 = 70$$

9-8. 135

$$\sum_{k=1}^{20} ka_k = 20S_{20} - (S_1 + S_2 + \cdots + S_{19})$$

$$S_1 + S_{19} = 9$$

$$S_2 + S_{18} = 8$$

$$S_3 + S_{17} = 7$$

...

$$S_9 + S_{11} = 1$$

$$S_{10} = 0$$

위 식을 모두 더하면 $S_1 + S_2 + S_3 + \cdots + S_{19} = 45$

$$a_1 = a_{20} \text{이므로}$$

$$S_{20} = S_{19} + a_{20} = S_{19} + a_1 = 9$$

$$\therefore 20S_{20} - (S_1 + S_2 + S_3 + \cdots + S_{19}) = 20 \times 9 - 45 = 135$$

<손플이>

$$\begin{array}{l}
 S_{10} = 0 \\
 S_9 + S_{11} = 1 \\
 S_8 + S_{12} = 2 \\
 \vdots \\
 S_1 + S_{19} = 9 \rightarrow S_{20} = 9 \text{ (by } a_1 = S_1, a_1 = a_{20}) \\
 \hline
 19a_1 + 18a_2 + \cdots + 10a_{10} + \cdots + a_{19} = 45 \\
 \sum_{k=1}^{20} ka_k = 20S_{20} - (19a_1 + 18a_2 + \cdots + 10a_{10} + \cdots + a_{19}) \\
 = 180 - 45 \\
 = 135
 \end{array}$$

확률과 통계

9-9. ④

맨앞에 오는 수가 1 또는 3이면 되므로
경우의 수는

$$2 \times 5 \times 5 \times 5 = 250$$

9-10. ①

(가)에서 $E(X) = 2$ 이고

(나)에서 $E(Y) = 6$, $\sigma(X) = \sigma(Y)$ 이므로

$$P(0 \leq X \leq 2) + P(Y \leq 8) = 0.5 + 2P(0 \leq X \leq 2)$$

$$\therefore P(0 \leq X \leq 2) = 0.3413$$

$\sigma(X) = 2$ 이므로

$$P(X \geq 6) = 0.5 - 0.4772 = 0.0228$$

9-11. 216

1 옆에는 6, 7, 8만 올 수 있으므로

1 옆에 올 숫자 2개를 뽑아서 나열한 뒤

나머지 5개의 숫자를 나열한다.

이때 2와 3, 또는 2와 4는 이웃할 수 없으므로

5개의 숫자를 나열한 전체 경우에서

2와 3, 또는 2와 4가 이웃하는 경우의 수를 빼주고

2, 3, 4가 모두 이웃하는 경우가 중복으로 빼졌으니 더해준다.

따라서 구하고자 하는 경우의 수는

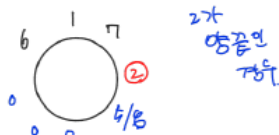
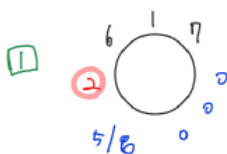
$${}_3C_2 \times 2! \times \{5! - (4!2! + 4!2! - 3!2!)\} = 216$$

<손풀이>

1 2 3 4 5 6 7 8

1 → 6, 7, 8과 이웃

각각
같은 양만큼
×3



2가
양끝이면
7가지



2가 양끝이 아닌
3개중에 하나에
온 경우

$$3 \times 2 \times (2 \times 2 \times 3! + 3 \times 2 \times 2!)$$

$$6(24 + 12) = \boxed{216}$$

9-12. 224

(가)에서 a, b, c 의 부호는 양수 2개, 음수 1개이거나
음수 3개여야 한다.

양수 2개, 음수 1개인 경우의 수는

$${}_3C_1 \times {}_6H_3$$

음수 3개인 경우의 수는

$${}_6H_3$$

따라서 정수 a, b, c 의 순서쌍 (a, b, c) 의 개수는

$$4 \times {}_6H_3 = 4 \times 56 = 224$$

미적분

9-9. ④

(가)에서 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x^3-1)}{x-1} = 9$ 인데 $\lim_{x \rightarrow 1} (x-1) = 0$ 이므로

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x^3-1) = 0 \quad \therefore f(0) = 0$$

로피탈의 법칙에 따라

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x^3-1)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} 3x^2 f'(x^3-1) = 9$$

$$\therefore f'(0) = 3, \quad k = 9$$

$x^2 + 2x + 9 = t$ 라 치환하면

$$\begin{aligned} \int f'(x) dx &= \int (x+1) \sqrt{x^2+2x+9} dx = \frac{1}{2} \int \sqrt{t} dt \\ &= \frac{1}{3} t^{\frac{3}{2}} + C = \frac{1}{3} (x^2+2x+9)^{\frac{3}{2}} + C \end{aligned}$$

$f(0) = 0$ 이므로 $C = -9$

$$k + f(3) = 16\sqrt{6}$$

9-10. ③

$f(x) = ax^2 + bx + c$ 라 하면

$\lim_{n \rightarrow \infty} \{ \sqrt{f(n)} - g(n) \} = \alpha + 2$ 이므로

$$a = 4, \quad \frac{b-12}{4} = \alpha + 2$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \times \left\{ \sqrt{f\left(\frac{1}{n}\right)} - g\left(\frac{1}{n}\right) \right\} = \alpha \text{에서}$$

$\frac{1}{n} = t$ 로 치환하면

$$\lim_{t \rightarrow 0+} \frac{\sqrt{f(t)} - g(t)}{t} = \alpha \text{이므로}$$

$$c = 9, \quad \frac{b-12}{6} = \alpha$$

$$\therefore b = 36, \quad \alpha = 4$$

$$f(x) = 4x^2 + 36x + 9$$

$$f(\alpha - 3) = f(1) = 49$$

<손풀이>

$$\alpha + 2 = \lim_{n \rightarrow \infty} \{ \sqrt{4n^2 + 36n + 9} - \sqrt{2n+3} \} \rightarrow \alpha = 4 \text{ (by } \infty - \infty \text{)}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(b-12)n + c - 9}{\sqrt{4n^2 + 36n + 9} + \sqrt{2n+3}}$$

$$= \frac{b-12}{4}$$

$$\alpha = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sqrt{f(t)} - g(t)}{t} \rightsquigarrow \sqrt{f(0)} - g(0) = 0$$

$$\therefore f(0) = 9 \rightarrow c = 9$$

$$= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{(b-12)t}{\{\sqrt{f(t)} + g(t)\}xt}$$

$$= \frac{b-12}{6}$$

$$\therefore 4(x+2) = 6x \rightarrow x=4 \rightarrow b=36$$

$$f(x-3) = f(1) = 4+36+9 = 49$$

9-11. ④

점 P의 x 좌표를 p 라 하자.

$y = t \ln x + k$ 에서 $y' = \frac{t}{x}$ 이므로

점 P에서의 접선의 기울기가 점 Q에서의 접선의 기울기의 2배가 되려면, 점 Q의 x 좌표는 $2p$ 이다.

점 P와 점 Q 모두 $y = x$ 위의 점이므로

$$p = t \ln p + k$$

$$2p = t \ln 2p + k$$

$$p - t \ln p = 2p - t \ln 2 - t \ln p$$

$$\therefore p = t \ln 2$$

$k = f(t)$ 이므로

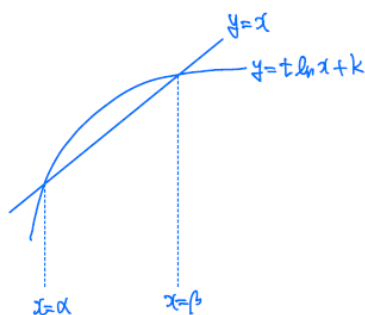
$$f(t) = t \ln 2 - t \ln(t \ln 2)$$

$$f'(t) = \ln 2 - \ln(t \ln 2) - 1$$

$$f''(t) = -\frac{1}{t}$$

$$\therefore f''(3) = -\frac{1}{3}$$

<손풀이>



$$\begin{aligned} t \ln \alpha + k &= \alpha \\ t \ln \beta + k &= \beta \\ \frac{t}{\alpha} &= \frac{2t}{\beta} \end{aligned} \Rightarrow \begin{aligned} t \ln \alpha + f(t) &= \alpha \\ t \ln \beta + f(t) &= \beta \\ \beta &= 2\alpha \end{aligned} \Rightarrow \begin{aligned} t \{\ln \beta - \ln \alpha\} &= \beta - \alpha \\ \therefore t \ln 2 &= \alpha \\ (\text{by } \beta = 2\alpha) \end{aligned}$$

$$\therefore f(t) = \alpha - t \ln \alpha$$

$$= t \ln 2 - t \ln(t \ln 2)$$

$$f'(t) = \ln 2 - \ln(t \ln 2) - 1$$

$$f''(t) = -\frac{1}{t}$$

$$f''(3) = -\frac{1}{3}$$

9-12. 64

$f'(x) = (ax - b)\cos x$ 이므로

$f'(x) = 0$ 을 만족시키는 해는

$$x = \frac{b}{a} \text{ 또는 } x = \frac{\pi}{2} \text{ 또는 } x = \frac{3\pi}{2}$$

이때, $\alpha + \beta = \frac{5}{2}\pi$ 이므로

가능한 α, β 의 순서쌍은 $\left(\frac{\pi}{2}, 2\pi\right), \left(\pi, \frac{3\pi}{2}\right)$

그런데 $0 < \alpha < \beta < 2\pi$ 이므로

$$\alpha = \pi, \beta = \frac{3\pi}{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow \alpha} \frac{f(x)}{(x - \alpha)^2} = \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{f(x)}{(x - \pi)^2} = -2 \text{이므로}$$

$$f(\pi) = 0, f''(\pi) = -4$$

$$-a + c = 0, -a = -4$$

$$\therefore a = 4, c = 4, b = 4\pi$$

$$\frac{a \times b \times c}{\pi} = 64$$

<손풀이>

$$f'(x) = a \sin x + (ax - b) \cos x - a \sin x$$

$$= (ax - b) \cos x$$

$$(가) f'(x) = 0 \rightarrow x = \frac{b}{a}, \frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi$$

$$(나) \alpha + \beta = \frac{5}{2}\pi \rightarrow \beta = \frac{3}{2}\pi, \alpha = \frac{b}{a} = \pi \text{ (by } 0 < \alpha < \beta < 2\pi)$$

$$\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{a(x - \pi) \sin x + a \cos x + c}{(x - \pi)^2} \rightarrow \frac{0}{0} \rightarrow c = a$$

$$= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{a t (-\sin t) + a(1 - \cos t)}{t^2}$$

$$= -a + \frac{a}{2} = -2 \rightarrow a = 4$$

$$\therefore b = 4\pi, c = 4$$

Day. 10

수학1, 수학2

10-1. 4

(나)에서 $f(2) - f(1) = 3$, $f(4) - f(1) = 27$

$$f(2) = f(1) + 3$$

(가)에서 $f(-2) = f(2) = f(1) + 3$

함수 $f(x)$ 에서 x 의 값이 -2 부터 4 까지 변할 때의
평균변화율은

$$\frac{f(4) - f(-2)}{4 - (-2)} = \frac{f(4) - f(1) - 3}{6} = \frac{27 - 3}{6} = 4$$

10-2. ③

y 절편은 $-kf'(k) + f(k)$ 이므로

$$2k^3 - 8 = n$$

n 이 자연수가 되게 하는 자연수 k 의 최솟값은 2 이므로

a_n 이 자연수가 되도록 하는 자연수 n 의 최솟값은 8

10-3. ①

$f(-1)f(1) = 2(f(-1) + f(1)) + 1$ 이므로

$$(f(1) - 2)(f(-1) - 2) = 5$$

방정식 $f(x) = 0$ 의 서로 다른 실근의 개수가 3 이므로

$$f(-1)f(1) < 0$$

$$\therefore f(-1) = 1, f(1) = -3$$

$f'(x) = a(x+1)(x-1)$ 이라 하면

극댓값과 극솟값의 차이가 4 이므로

$f'(x)$ 와 x 축으로 둘러싸인 부분의 넓이가 4 이다.

이차함수의 정적분 공식을 사용하면

$$\frac{a \times 2^3}{6} = 4 \text{이므로}$$

$$a = 3$$

$$\therefore f(x) = x^3 - 3x - 1$$

$$f(4) = 51$$

10-4. 78

$$a_{n+1} = \begin{cases} 2a_n - 12 & (a_n \geq 6) \\ -2a_n + 12 & (a_n < 6) \end{cases}$$

$$a_4 \geq 6 \text{이면, } a_5 = 2a_4 - 12$$

$$a_4 = a_5 \text{ 이므로}$$

$$a_4 = 12$$

$$a_4 < 6 \text{ 이면, } a_5 = -2a_4 + 12$$

$$a_4 = a_5 \text{ 이므로}$$

$$a_4 = 4$$

$$a_n = \begin{cases} \frac{a_{n+1} + 12}{2} & (a_n \geq 6) \\ \frac{-a_{n+1} + 12}{2} & (a_n < 6) \end{cases}$$

a_3 으로 가능한 값은 12, 0, 8, 4이고

$a_3 = 0$ 일 때를 제외하면 a_2 의 값은 각각 2개씩 존재한다.

따라서 a_2 의 값들의 개수는 0을 포함해서 7이다.

마찬가지로 $a_2 = 0$ 일 때를 제외하면 a_1 의 값은 각각 2개씩 존재하고, 두 수의 합은 12이므로

모든 a_1 의 값의 합은

$$S = 12 \times 6 + 6 = 78 \text{이다.}$$

10-5. ②

$A(k, \log_a k)$ 라 하면

선분 AB의 중점이 x 축 위에 있으므로

$B\left(\frac{1}{k}, -\log_a k\right)$ 이다.

선분 BO와 선분 AO가 수직이므로

$$\frac{\log_a k}{k} \times (-k \log_a k) = -1$$

$$\therefore (\log_a k)^2 = 1, \log_a k = -1, a = \frac{1}{k}$$

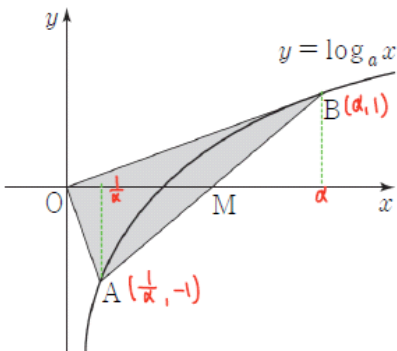
삼각형 OAB의 넓이가 $\frac{25}{24}$ 이므로

$$\frac{1}{2} \times \sqrt{k^2 + 1} \times \sqrt{\frac{1}{k^2} + 1} = \frac{25}{24}$$

$$\sqrt{\left(k + \frac{1}{k}\right)^2} = \frac{25}{12}$$

$$\therefore k + \frac{1}{k} = \frac{25}{12}, k = \frac{3}{4}, a = \frac{4}{3}$$

<손풀이>



$$\frac{\log_a a}{a} \times \frac{-\log_a a}{\frac{1}{a}} = -1 \Rightarrow a = a$$

$$\frac{25}{24} = \frac{a + \frac{1}{a}}{2} \times 1$$

$$a = \frac{4}{3} \text{ or } a = \frac{3}{4}$$

10-6. ②

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{\{f(x) - a^2\} + (x - a)}{x^2 - a^2} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow a} (x^2 - a^2) = 0 \text{ 이므로 } \lim_{x \rightarrow a} [\{f(x) - a^2\} + (x - a)] = 0$$

$$\therefore f(a) = a^2$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow a} \frac{\{f(x) - a^2\} + (x - a)}{x^2 - a^2} &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{\{f(x) - f(a)\} + (x - a)}{x^2 - a^2} \\ &= \frac{f'(a)}{2a} + \frac{1}{2a} = 1 \end{aligned}$$

$$f'(a) = 2a - 1$$

함수 $g(x) = \{f(x)\}^2$ 을 미분하면

$$g'(x) = 2f(x)f'(x)$$

$$g'(a) = 2a^2(2a - 1) = 30a$$

$$a(2a^2 - a - 15) = 0$$

$$a(a - 3)(2a + 5) = 0$$

$$a > 0 \text{ 이므로 } a = 3$$

<손풀이>

$$f(a) = a^2$$

$$\lim_{x \rightarrow a} \left\{ \frac{f(x) - a^2}{(x+a)(x-a)} + \frac{1}{x+a} \right\}$$

$$= \frac{f'(a)}{2a} + \frac{1}{2a} = 1$$

$$\therefore f'(a) = 2a - 1, f(a) = a^2$$

$$g'(a) = 2f(a) \cdot f'(a) = 2a^2(2a - 1) = 30a$$

$$\therefore 2a^2 - a = 15$$

$$\therefore a = 3 \quad (\text{by } a > 0)$$

10-7. ④

삼각형 BDE와 삼각형 BCA가 닮음이므로

$$\overline{BE} = x \text{ 라 하면}$$

$$2 : x + 2\sqrt{2} = x : 8$$

$$x = 2\sqrt{2}$$

$$\overline{AE} = m, \overline{DE} = n \text{ 이라 하면}$$

삼각형 ABE에서 코사인 법칙에 따라

$$m^2 = 64 + 8 - 2 \times 8 \times 2\sqrt{2} \times \cos \angle ABE$$

삼각형 BDE에서 코사인 법칙에 따라

$$n^2 = 4 + 8 - 2 \times 2 \times 2\sqrt{2} \times \cos \angle ABE$$

선분 AD가 지름이므로

$$m^2 + n^2 = 36$$

$$(72 - 32\sqrt{2}\cos\angle ABE) + (12 - 8\sqrt{2}\cos\angle ABE) = 36$$

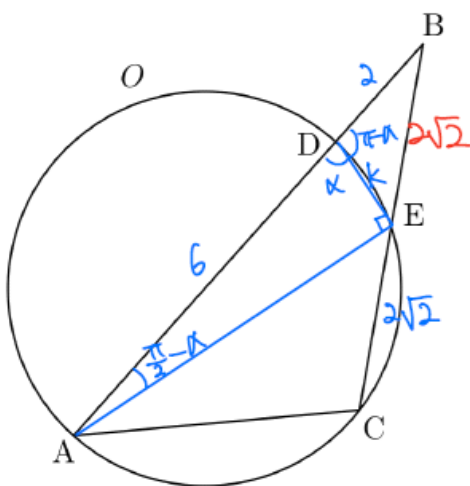
$$\therefore \cos\angle ABE = \frac{3\sqrt{2}}{5}, \sin\angle ABE = \frac{\sqrt{7}}{5}$$

$$\therefore \overline{AE} = \frac{2\sqrt{210}}{5}$$

삼각형 ABE의 외접원의 넓이는

$$\left(\frac{\overline{AE}}{2\sin\angle ABE}\right)^2\pi = (\sqrt{30})^2\pi = 30\pi$$

<손풀이>



$$2 \times 8 = \overline{BE} \times (\overline{BE} + 2\sqrt{2}) \quad (\text{by power of a point})$$

$$\therefore \overline{BE} = 2\sqrt{2}$$

$$\cos\alpha = \frac{k}{6} \quad \cos(\pi - \alpha) = \frac{4 + k^2 - 8}{2 \times 2 \times k}$$

$$\therefore -\frac{k}{6} = \frac{k^2 - 4}{4k} \rightarrow k = \frac{\sqrt{12}}{\sqrt{5}}$$

$$R_{\triangle ABE} = \frac{2\sqrt{2}}{2\sin(\frac{\pi}{2} - \alpha)} = \sqrt{30}$$

10-8. 515

함수 $g(x)$ 가 모든 실수 x 에 대하여 연속이므로

$$\lim_{x \rightarrow 0} \{-f(x)\} = \lim_{x \rightarrow 0} x^2 f\left(\frac{1}{x}\right) = 1$$

따라서 $f(x)$ 는 상수항이 -1 이고 최고차항의 계수가 1 인 이차함수

$$f(x) = x^2 + ax - 1 \text{ 이라 하면}$$

$$g(x) = 17 \text{인 서로 다른 실근의 개수가 } 2 \text{이므로}$$

$$-f\left(-\frac{a}{2}\right) = \left(\frac{a}{2}\right)^2 f\left(\frac{2}{a}\right) = 17$$

$$-\left(-\frac{a}{2}\right)^2 - a\left(-\frac{a}{2}\right) + 1 = 17$$

$$a = 8$$

$g(x) - 1$ 은 우함수이므로

$$\begin{aligned} \int_{-4}^4 (x+2)[g(x)-1]dx &= 2 \int_{-4}^4 [g(x)-1]dx = 2 \times \frac{8^3}{6} = \frac{512}{3} \\ &= \frac{q}{p} \end{aligned}$$

$$\therefore p+q = 515$$

<손풀이>

$$g(x); x=0 \text{ 연속} \rightarrow g(0-) = -f(0)$$

$$g(0) = 1$$

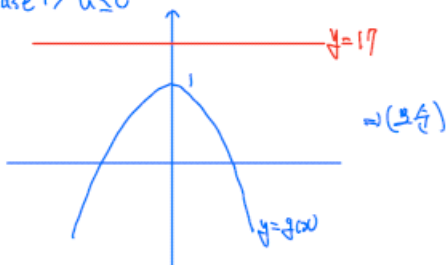
$$g(0+) = \lim_{x \rightarrow 0+} x^2 f\left(\frac{1}{x}\right) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{f(t)}{t^2}$$

$$\therefore f(0) = -1, f(x) = x^2 + \dots$$

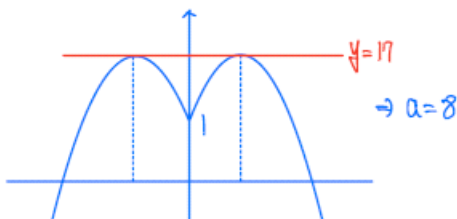
$$\therefore f(x) = x^2 + ax - 1$$

$$g(x) = \begin{cases} -(x + \frac{a}{2})^2 + 1 + \frac{a^2}{4} & x \leq 0 \\ -(x - \frac{a}{2})^2 + 1 + \frac{a^2}{4} & x > 0 \end{cases}$$

Case 1) $a \leq 0$



Case 2) $a > 0$



$$\therefore \underbrace{g(x) - 1}_{\text{우함수}} = \begin{cases} -x^2 - 8x & x < 0 \\ -x^2 + 8x & x > 0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \therefore \int_{-4}^4 (x+2)[g(x)-1]dx &= \int_{-4}^4 2[g(x)-1]dx \\ &= 4 \int_0^4 g(x)-1 dx = 4 \int_0^4 -x^2 + 8x dx \\ &= \frac{2}{3} \times 4^3 = \frac{512}{3} \end{aligned}$$

확률과 통계



10-9. ①

P지점과 Q지점을 지나지 않고 최단거리로 가는 경우의 수는 최단거리로 가는 전체 경우의 수에서 P지점이나 Q지점을 지나는 경우의 수를 뺀 것과 같다.

$$\frac{7!}{4! \times 3!} - \frac{4!}{2! \times 2!} \times 2! - \frac{3!}{2!} = 20$$

10-10. ③

$a > 2b$ 인 경우의 수는 6, 확률은 $\frac{1}{6}$

따라서 $a \leq 2b$ 인 경우의 수는 30, 확률은 $\frac{5}{6}$

시행을 3번 반복하여 얻은 점수의 합이 3일 확률이 $\frac{5}{72}$ 이므로

3번의 시행 중 두 번은 $a > 2b$ 이어야 하고,
나머지 한 번은 $a \leq 2b$ 이어야 한다.

$$\left(\because {}_3C_1 \times \left(\frac{1}{6} \right)^2 \times \frac{5}{6} = \frac{5}{72} \right)$$

따라서 $k = 4$

시행을 4번 반복하여 얻은 점수의 합이 12이어야 하므로

$a > 2b$ 인 횟수를 x , $a \leq 2b$ 인 횟수를 y 라 하면

$$\begin{cases} x + y = 4 \\ 2x + 4y = 12 \end{cases}$$

$$\therefore x = 2, y = 2$$

따라서 시행을 4번 반복하여 얻은 점수의 합이 12일 확률은

$${}_4C_2 \times \left(\frac{1}{6} \right)^2 \times \left(\frac{5}{6} \right)^2 = \frac{25}{216}$$

10-11. ④

$$\bar{X} \sim N(m, 2^2)$$

$$P(X \leq 40) = P(\bar{X} \geq 64) \text{ 이므로}$$

$$\frac{40 - m}{10} = \frac{m - 64}{2}$$

$$\therefore m = 60$$

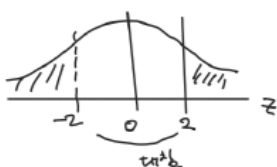
$$\text{따라서 } P(\bar{X} \leq 64) = 0.5 + 0.4772 = 0.9772$$

<손풀이>

$$\bar{X} \sim N(m, 2^2)$$

$$P(X \leq 40) = P\left(Z \leq \frac{40 - m}{10}\right)$$

$$P(\bar{X} \geq 64) = P\left(Z \geq \frac{64 - m}{2}\right)$$



$$P(\bar{x} \leq 64)$$

$$4 - \frac{m}{10} + 32 - \frac{m}{2} = 0$$

$$= P(z \leq 2)$$

$$= 0.5 + 0.4772$$

$$36 - \frac{6}{10}m = 0$$

$$= 0.9772$$

$$m = 60$$

10-12. 368

- i) 사탕을 4명의 학생들에게 모두 1개씩 나눠주는 경우
초콜릿은 아무에게나 나눠주면 되므로 경우의 수는

$${}_4H_5 = 56$$

- ii) 사탕을 1명의 학생에게 0개, 1명의 학생에게 2개를
나누어주고, 2명의 학생에게 1개씩 나눠주는 경우
사탕을 0개 받은 학생은 무조건 초콜릿 2개 이상을 받아야
하므로 경우의 수는

$${}_4C_1 \times {}_3C_1 \times {}_4H_3 = 240$$

- iii) 사탕을 2명의 학생에게 0개, 2명의 학생에게 2개를
나눠주는 경우

사탕을 0개 받은 학생들은 무조건 초콜릿 2개 이상을 받아야
하므로 경우의 수는

$${}_4C_2 \times {}_4H_1 = 24$$

- iv) 사탕을 1명의 학생에게 1개, 1명의 학생에게 3개를
나누어주고, 2명의 학생에게 0개를 나눠주는 경우
마찬가지로 사탕을 0개 받은 학생들은 무조건 초콜릿 2개
이상을 받아야 하므로 경우의 수는

$${}_4C_1 \times {}_3C_1 \times {}_4H_1 = 48$$

따라서 모든 경우의 수는

$$56 + 240 + 24 + 48 = 368$$

미적분

10-9. ②

$$\int_0^{11} \frac{xg'(x)}{f(g(x))} dx \text{에서}$$

$x = f'(t)$ 로 치환하면

$$\int_0^{11} \frac{xg'(x)}{f(g(x))} dx = \int_0^1 \frac{f'(t)}{f(t)} dt = \left[\ln |f(t)| \right]_0^1 = \ln \frac{13}{2}$$

10-10. ③

$$f'(x) = \frac{2a}{\ln 2(a^2 - x^2)} \text{이므로}$$

$f'(x)$ 는 $x=0$ 일 때, 최솟값 $\frac{2}{a \ln 2}$ 를 갖는다.

즉, $f'(0) = \frac{2}{a \ln 2} = \frac{1}{\ln 4}$ 이므로 $a=4$

10-11. 90

$y' = 2x$ 이므로 점 P_n 에서의 접선의 방정식은

$$y = 2nx - n^2$$

점 Q_n 의 좌표는 $\left(\frac{n}{2}, 0\right)$

사각형 $OQ_nP_nR_n$ 이 원에 내접하므로

$$\angle R_n O Q_n + \angle R_n P_n Q_n = \frac{\pi}{2} + \angle R_n P_n Q_n = \pi$$

$$\therefore \angle R_n P_n Q_n = \frac{\pi}{2}$$

선분 $R_n P_n$ 과 선분 $P_n Q_n$ 이 수직이므로

점 R_n 의 좌표는 $\left(0, n^2 + \frac{1}{2}\right)$

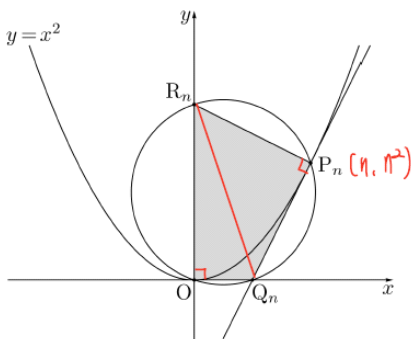
S_n 은 삼각형 $R_n P_n O$ 와 삼각형 $P_n O Q_n$ 의 넓이를 합한 것과

$$\text{같은므로 } S_n = \frac{1}{2} \times \left(n^2 + \frac{1}{2}\right) \times n + \frac{1}{2} \times \frac{n}{2} \times n^2$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S_n}{n^3} = \frac{3}{4}$$

$$\therefore a = \frac{3}{4}, 120a = 90$$

<손풀이>



직선 $P_n Q_n$

$$y = 2n(x - n) + n^2$$

직선 $R_n P_n$

$$y = \frac{-1}{2n}(x - n) + n^2$$

$$S_n = \frac{3n^3 + n}{4}$$

10-12. ①

$$(나) \text{에서 } \frac{e^2}{a} \int_0^a [f(x)]^2 dx = e^a$$

점 A의 x 좌표가 $x=0$ 에서 $x=2$ 까지 변할 때 입체도형의 부피는

$$\frac{\sqrt{3}}{4} \int_0^2 [f(x)]^2 dx$$

$$\frac{e^2}{a} \int_0^a [f(x)]^2 dx = e^a \text{이므로}$$

$$\int_0^2 [f(x)]^2 dx = 2$$

$$\therefore \frac{\sqrt{3}}{4} \int_0^2 [f(x)]^2 dx = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

<손풀이>

$$(4) \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \left\{ f\left(\frac{ak}{n}\right) \right\}^2 \times \frac{e^2}{n} = e^a$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \left\{ f\left(\frac{ak}{n}\right) \right\}^2 \times \frac{a}{n} \times \frac{e^2}{a} = e^a$$

$$\int_0^a (f(x))^2 dx \times \frac{e^2}{a} = e^a$$

$$\therefore \int_0^a (f(x))^2 dx = a \cdot e^{a-2}$$

$$V = \int_0^2 \frac{\sqrt{3}}{4} (f(x))^2 dx$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{4} \int_0^2 (f(x))^2 dx$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{4} \times 2 \cdot e^0$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$a=2$ 대입

Day. 11

수학1, 수학2

11-1. 36

위치 함수를 이용하여 속도 함수 $v(t)$ 와 가속도 함수 $a(t)$ 를 구하면

$$\begin{cases} v(t) = 4t^3 - 12t - 8 \\ a(t) = 12t^2 - 12 \end{cases}$$

운동 방향이 바뀌는 순간은 속도 함수 $v(t)$ 의 부호가 변하는

순간과 같으므로

방정식 $v(t) = 4t^3 - 12t - 8 = 0$ 의 양수해는 $t = 2$

이때, 점 P의 가속도 $a(2) = 36$

11-2. ②

부등식 $\sin x + 1 \geq \frac{\cos^2 x}{\sin x}$ 는 다음과 같이 변형할 수 있다.

$$\Rightarrow \sin x + 1 \geq \frac{\cos^2 x}{\sin x}$$

$$\Rightarrow \sin^2 x + \sin x \geq \cos^2 x$$

$$\Rightarrow \sin^2 x + \sin x \geq 1 - \sin^2 x$$

$$\Rightarrow 2\sin^2 x + \sin x - 1 \geq 0$$

$$\Rightarrow (2\sin x - 1)(\sin x + 1) \geq 0 \text{이므로}$$

이차부등식을 풀어주면 $\sin x \leq -1$ 또는 $\sin x \geq \frac{1}{2}$

$0 < x < \pi$ 이므로 $\sin x \geq \frac{1}{2}$ 이고

이 부등식의 해는 $\frac{\pi}{6} \leq x \leq \frac{5}{6}\pi$ 이므로

$$\therefore \alpha = \frac{\pi}{6}, \beta = \frac{5}{6}\pi$$

$$\sin \alpha + \cos \beta = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1 - \sqrt{3}}{2}$$

11-3. ④

함수 $f(x)$ 의 도함수 $f'(x) = 3x^2 - 10x + k$ 에서

방정식 $f'(x) = 0$ 이 서로 다른 두 실근을 가져야 함수 $f(x)$ 가 극값을 가진다.

이 이차방정식의 판별식 $\frac{D}{4} = 25 - 3k > 0$ 를 풀어주면

$k < \frac{25}{3}$ 이므로 자연수 k 의 최댓값은 8이다.

11-4. ①

첫째항 a_1 을 기준으로 $a_2, \dots$ 을 표현해주면

$$a_2 = a_1 - 5$$

$$a_3 = a_1 - 3$$

$$a_4 = a_1 - 1$$

$$a_5 = a_1 + 1$$

$$a_6 = a_1 - 4$$

$$a_7 = a_1 - 2$$

$$a_8 = a_1$$

$\vdots$

이므로, 수열 $\{a_n\}$ 는 주기 7을 가지고 반복됨을 알 수 있다.

이를 이용하여 $\sum$ 를 풀어주면

$$\sum_{k=1}^{30} a_k = 4(7a_1 - 14) + a_1 + a_1 - 5 = 30a_1 - 61 = 5 \text{이므로}$$

$$\therefore a_1 = \frac{11}{5}$$

11-5. ③

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{f(x)}{(x-4)f'(x)} = \frac{1}{3}$$

에서 분모 $\lim_{x \rightarrow 4} (x-4)f'(x) = 0$ 이므로

분자 $\lim_{x \rightarrow 4} f(x)$ 도 0이어야 한다.

함수 $f(x)$ 가 $x=4$ 를 해로 가지므로

$$f(x) = (x-4)g(x) \text{라 하면 } f'(x) = (x-4)g'(x) + g(x)$$

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{f(x)}{(x-4)f'(x)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 4} \frac{(x-4)g(x)}{(x-4)\{(x-4)g'(x) + g(x)\}} \text{ 이고,}$$

이때, $g(4) \neq 0$ 이면 이 극한값이 1이므로 조건에 모순이다.

따라서 $g(4) = 0$

$$f(x) = (x-4)^2 h(x) \text{라 하면}$$

$$f'(x) = (x-4)^2 h'(x) + 2(x-4)h(x)$$

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{f(x)}{(x-4)f'(x)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 4} \frac{(x-4)^2 h(x)}{(x-4)^2 \{(x-4)h'(x) + 2h(x)\}}$$

이고 이때, $h(4) \neq 0$ 이면 이 극한값이 $\frac{1}{2}$ 이므로 조건에

모순이다.

따라서 $h(4) = 0$

$$f(x) = (x-4)^3 k(x)$$

$$f'(x) = (x-4)^3 k'(x) + 3(x-4)^2 k(x)$$

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{f(x)}{(x-4)f'(x)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 4} \frac{(x-4)^3 k(x)}{(x-4)^3 \{(x-4)k'(x) + 3k(x)\}} = \frac{1}{3}$$

$k(x) = x-a$ (a 는 상수)라고 한다면

$$f(x) = (x-4)^3 (x-a)$$

$$f(5) = 5-a = 3 \text{ 이므로 } a = 2$$

따라서 $f(x) = (x-2)(x-4)^3$ 이므로

구하는 값은 $f(6) = 32$

[다른 풀이]

일반적으로 다항함수 $f(x)$ 에 대하여

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{(x-a)f'(x)}{f(x)} = n \text{ (단, } n \text{은 자연수)일 때,}$$

$f(x) = (x-a)^m g(x)$ (단, $g(a) \neq 0$)이라 두고 위의 식에 대입하면

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{(x-a)\{m(x-a)^{m-1}g(x) + (x-a)^m g'(x)\}}{(x-a)^m g(x)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow a} \frac{m(x-a)^m g(x) + (x-a)^{m+1} g'(x)}{(x-a)^m g(x)} = m$$

이므로 $n = m$ 이다.

결론적으로 수식 $\lim_{x \rightarrow a} \frac{(x-a)f'(x)}{f(x)} = n$ (단, n 은 자연수)는

함수 $f(x)$ 가 $x-a$ 라는 인수를 n 개 갖고 있다는 의미와 같다.

위의 정리를 이용하면

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{f(x)}{(x-4)f'(x)} = \frac{1}{3} \text{에서}$$

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{(x-4)f'(x)}{f(x)} = 3 \text{이므로}$$

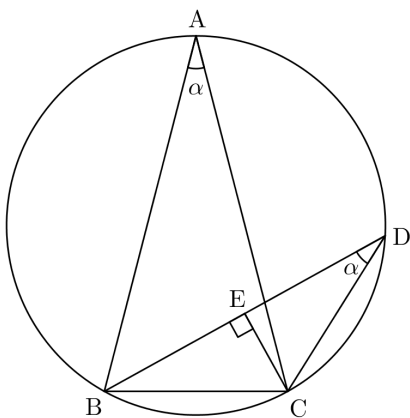
함수 $f(x) = (x-4)^3(x-k)$ 라 둘 수 있고

$f(5) = 3$ 이므로 $f(5) = 5-k = 3$ 에서 $k = 2$ 이므로

$f(x) = (x-4)^3(x-2)$ 임을 쉽게 알 수 있다.

과거 평가원에서 다루었던 논점이다.

11-6. ③



$\overline{AB} = \overline{AC} = 2t$, $\overline{BC} = t$ ($t \neq 0$)라 하자.

그림과 같이 $\angle BAC = \alpha$ 라 하면

$2\alpha + \theta = \pi$ 이다.

삼각형 ABC에서 코사인법칙을 사용하면

$$\cos \alpha = \frac{4t^2 + 4t^2 - t^2}{2 \cdot 2t \cdot 2t} = \frac{7}{8}$$

한편, 점 C에서 선분 BD에 내린 수선의 발을 E라 하자.

원주각의 성질에 의하여 $\angle CDB = \alpha$ 이고

$\overline{BC} = \overline{CD}$ 이므로 $\angle CBD = \alpha$

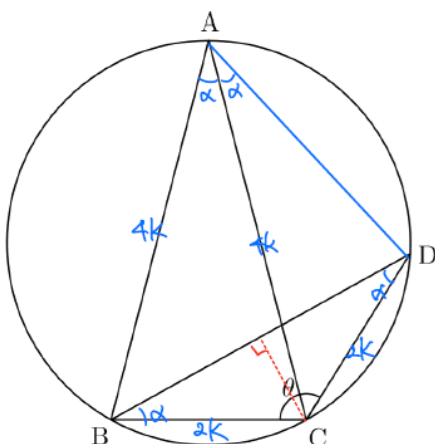
$$\text{따라서 } \overline{BE} = \overline{DE} = t \cos \alpha = \frac{7}{8}t$$

$$\overline{BD} = \frac{7}{4}t$$

삼각형 CBD에서 코사인법칙을 사용하면

$$\therefore \cos \theta = \frac{t^2 + t^2 - \frac{49}{16}t^2}{2 \cdot t \cdot t} = -\frac{17}{32}$$

<손풀이>



$$\cos X = \frac{4+4-1}{2 \times 2 \times 2} = \frac{7}{8}$$

$$\begin{aligned} \overline{BD} &= 2k \cos X \times 2 \\ &= \frac{7k}{2} \end{aligned}$$

$$\cos \theta = \frac{16+16-49}{2 \times 4 \times 4} = \frac{-17}{32}$$

11-7. ③

두 점 B, C에 대하여 $\overline{AB} = \overline{AC}$ 이므로

점 B의 x 좌표를 $-b$ 라고 하면 점 C의 x 좌표는 b

그러므로 두 점의 좌표는 $B(-b, 2^{1-b})$, $C(b, 2^b)$

두 점의 y 좌표의 평균은 점 A의 y 좌표와 같으므로

$$2^{1-b} + 2^b = 4, \quad 2^b = 2 + \sqrt{2}$$

넓이를 구하기 위해 두 함수를 살펴보면

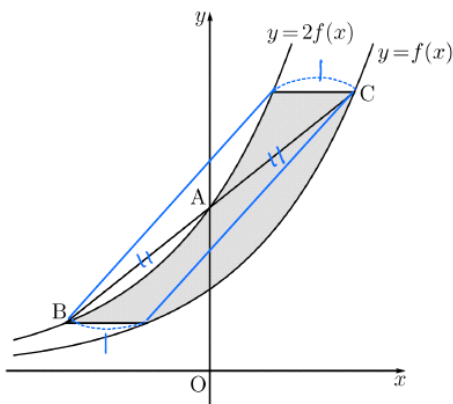
$y = 2^{x+1}$ 과 $y = 2^x$ 사이의 넓이는

두 함수가 x 축 방향의 평행이동 관계를 가지므로

넓이 $S = 1 \times (y\text{방향 좌표의 변화량})$ 임을 알 수 있다.

$$\text{따라서 } S = 2^b - 2^{1-b} = 2\sqrt{2}$$

<손풀이>



$$C(t, 2^t), B(-t, 2^{-t+1})$$

$$\frac{2^t + 2^{-t+1}}{2} = 2 \rightarrow 2^t + 2^{-t+1} = 4$$

$$\begin{aligned} S &= 1 \times (2^t - 2^{-t+1}) \\ &= \sqrt{16 - 4 \times 2} \\ &= 2\sqrt{2} \end{aligned}$$

11-8. ④

조건을 만족하는 두 이차함수는 각각 $x=1$ 에서 미분가능하거나 $x=2$ 에서 미분가능하다.

두 함수 모두 두 점 $(1, 1)$ 과 $(2, 3)$ 은 지나야 하고,

f_1 은 $x=1$ 에서 미분가능하고 f_2 는 $x=2$ 에서 미분가능하다고 하면

$$f_1(1) = 1, f_1(2) = 3, f_1'(1) = 1$$

이를 통해 $f_1(x)$ 의 함수식을 구하면 $f_1(x) = x^2 - x + 1$

$$f_2(1) = 1, f_2(2) = 3, f_2'(2) = -1 \text{을 이용하여}$$

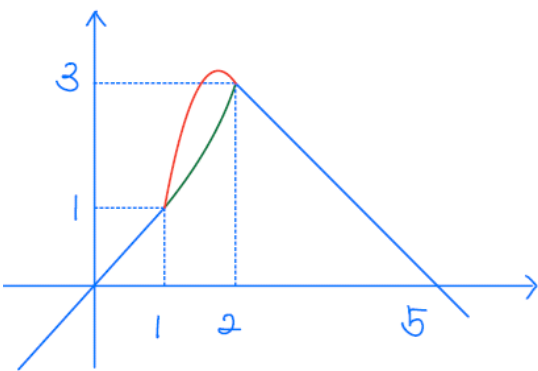
같은 방식으로 f_2 의 함수식을 구하면

$$f_2(x) = -3x^2 + 11x - 7$$

두 함수 $y = f_1(x)$ 와 $y = f_2(x)$ 의 그래프로 둘러싸인 부분의 넓이를 이차함수의 정적분 공식을 이용하여 구하면

$$S = \frac{1}{6}(2-1)^3 + \frac{3}{6}(2-1)^3 = \frac{2}{3}$$

<손풀이>



$$f(x) - x = k(x-1)^2 \rightarrow k=1 \text{ (by } f(2)=3)$$

$$f(x) - (-x+5) = k(x-2)^2 \rightarrow k=-3 \text{ (by } f(1)=1)$$

$$\therefore f(x) = (x-1)^2 + x \text{ or } -3(x-2)^2 - x + 5$$

$$\therefore S = \frac{4}{6}(2-1)^3 = \frac{2}{3}$$

확률과 통계

11-9. ③

abc 가 9의 배수일 조건은 a, b, c 중 두 개 이상이 3이나 6이어야 한다.

i) a, b, c 중 3의 배수가 2개

이 경우의 수는 3의 배수를 가질 문자를 선택하고, 가질 3의 배수의 종류를 선택한 뒤 나머지 한 문자의 숫자를 선택한다.

$$\text{즉, } {}_3C_2 \times 2^2 \times 4 = 48$$

ii) a, b, c 모두 3의 배수

이 경우는 각 문자가 가질 숫자만 선택한다.

$$\text{즉, } 2^3 = 8$$

$$\text{따라서, 구하고자 하는 확률은 } \frac{48+8}{6^3} = \frac{56}{216} = \frac{7}{27}$$

11-10. ⑤

n 은 짝수이므로 일의 자리에 들어갈 수 있는 수는 2 또는 4
각 자릿수의 합이 짝수이므로 나머지 4개의 숫자 조합으로
가능한 경우는

i) 홀수 4개

ii) 짝수 4개

iii) 홀수 2개, 짝수 2개

배열할 수 있는 홀수와 짝수는 각각 2개씩 있으므로

$$2 \times ({}_4C_0 + {}_4C_2 + {}_4C_4) \times 2^4 = 2^8 = 256 \text{ 개의 } n \text{이 존재}$$

[다른 풀이]

홀수와 짝수의 개수가 같으므로 앞에 네 자리의 합이 홀수인
경우의 수와 짝수인 경우의 수는 같다. 따라서 전체 경우의 수와

$$\text{같으므로 } 4^4 \times 2 \times \frac{1}{2} = 256$$

11-11. ②

함수 $y = f(x)$ 에 대하여 $f(x) = k$ 를 만족하는

두 실근이 48과 52이므로 확률밀도함수 $f(x)$ 는 $x = 50$ 을
기준으로 대칭임을 알 수 있다.

$$\text{즉, } m = 50$$

$P(X \geq 47) = 0.9332$ 이므로 이를 정규화하면

$$P(Z \geq \frac{47-50}{\sigma}) = 0.9332$$

정규분포표의 값을 통해

$$P(Z \leq -1.5) = 1 - 0.9332 = 0.0668 \text{임을 알 수 있으므로}$$

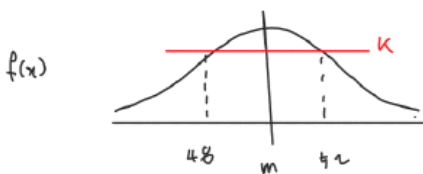
$$-1.5 = -\frac{3}{\sigma}, \sigma = 2$$

구하고자 하는 확률

$$P(49 \leq X \leq 53) = P(-0.5 \leq Z \leq 1.5) \text{이므로}$$

$$P(-0.5 \leq X \leq 1.5) = 0.1915 + 0.4332 = 0.6247$$

<손풀이>



$$\therefore m = 50.$$

$$P(X \geq 47) = 0.9332 \quad \text{에서}$$

$$P\left(Z \geq \frac{-3}{\sigma}\right) = 0.9332 \quad \frac{-3}{\sigma} = -1.5$$

$$\boxed{\sigma = 2}$$

$$P(49 \leq X \leq 53)$$

$$= P(0.5 \leq Z \leq 1.5)$$

$$0.1915 + 0.4332 = 0.6247$$

11-12. ③

이 함수의 경우의 수를 구하는 방법은 다음과 같다.

먼저 치역에 해당하는 세 가지 원소를 선택한 후,

정의역의 1과 6을 제외한 나머지 원소가 치역을 선택할 경우의 수를 구한다.

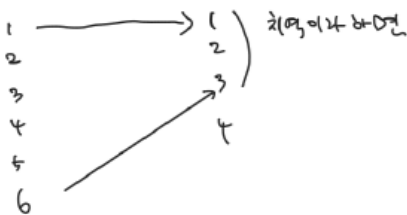
이때, 치역의 개수가 2개가 되는 경우의 수를 제외하면 구하고자 하는 경우의 수를 구할 수 있다.

따라서, 조건을 만족하는 함수의 개수는

$${}_4C_3 \times (3^4 - 2^4) = 260 \text{ 개}$$

<손풀이>

$$\text{치역의 원소가 3개 이므로 } {}_4C_3 = 4$$



$$f(2), f(3), f(4), f(5) \quad 1, 2, 3 \text{ 중 에서}$$

(2를 제곱한 한 번 정도)

$$3^4 - 2^4$$

$$\therefore 4 \times (81 - 16) = 260$$

미적분

11-9. ③

주어진 a_n 과 b_n 의 정의에 따라 $n \rightarrow \infty$ 에서의 극한값을 구하면

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \frac{3}{k^2}, \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 2$$

이를 조건식에 대입하면

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{ka_n + b_n}{a_n b_n} = \frac{\frac{3}{k} + 2}{\frac{3}{k^2} \times 2} = \frac{3k + 2k^2}{6} = \frac{3}{2} \text{ 이므로}$$

$$6k + 4k^2 = 18$$

$$(2k - 3)(k + 3) = 0 \text{ 이고,}$$

$$k > 0 \text{ 이므로 } k = \frac{3}{2}$$

11-10. 36

두 함수 $f(x)$ 와 $g(x)$ 에 대하여

조건 (가)에 의해 $f(g(x)) = 2x$ 이므로

식을 미분하면 $f'(g(x))g'(x) = 2$ 이고,

$$f'(g(x)) = \frac{2}{g'(x)}$$

조건 (나)의 식에 위에 구한 식을 대입하면

$$\int_1^3 \frac{x}{f'(g(x))} dx = \int_1^3 \frac{x g'(x)}{2} dx = 9 \text{ 이므로}$$

$$\int_1^3 x g'(x) dx = 18$$

구하고자 하는 식 $\int_{g(1)}^{g(3)} f(x) dx$ 를 $x = g(u)$ 로 치환적분 하면

$$\int_{g(1)}^{g(3)} f(x) dx = \int_1^3 f(g(x)) \cdot g'(x) dx \text{ 이고,}$$

$$\int_1^3 f(g(x)) \cdot g'(x) dx = \int_1^3 2x \cdot g'(x) dx = 2 \int_1^3 x g'(x) dx$$

이므로 구하고자 하는 식의 값은 $2 \times 18 = 36$

<손풀이>

$$(나) \quad 9 = \int_1^3 x \frac{g'(x)}{2} dx$$

$$18 = \int_1^3 x g'(x) dx$$

$$\int_{g(1)}^{g(3)} f(x) dx$$

$$= \int_1^3 2x g'(x) dx$$

$$= 36$$

11-11. ③

조건 (가)에 의해 모든 실수 x 에 대하여 $g''(x)=0$ 이거나 $g'(x)=f'(x)$ 이어야 한다.

함수 $g(x)$ 가 실수 전체의 집합에서 이계도함수가 연속이므로 $g''(x)=0$ 와 $g'(x)=f'(x)$ 가 바뀌는 지점은 $g''(t)=f''(t)=0$ 인 t 에서만 가능하다.

$$f'(x) = \frac{9-3x^2}{(x^2+3)^2} \text{ 이고 } f''(x) = \frac{6x^3-54x}{(x^2+3)^3} \text{ 이므로}$$

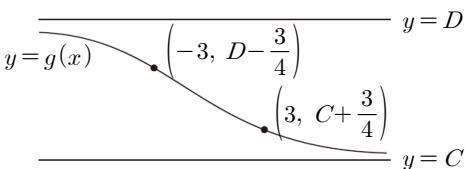
$y=f(x)$ 의 변곡점은 $\left(-3, -\frac{3}{4}\right), (0, 0), \left(3, \frac{3}{4}\right)$ 이다.

만약 모든 x 에 대하여 $g(x)=f(x)+c$ 이면

$$\lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) \text{ 이므로 } k \text{가 양수가 아니다.}$$

만약 $x < -3$ 에서 $g(x)$ 가 일차함수이거나 $x > 3$ 에서 일차함수이면 $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x)$ 또는 $\lim_{x \rightarrow \infty} g(x)$ 가 수렴하지 않는다.

따라서 (나)를 만족시키는 경우는 다음과 같다.



$$\text{이때, } f'(-3) = f'(3) = -\frac{1}{8} \text{ 이므로}$$

$-3 \leq x \leq 3$ 에서 $g(x)$ 는 기울기가 $-\frac{1}{8}$ 이다.

$$\text{따라서 } \left(D - \frac{3}{4}\right) - \left(C + \frac{3}{4}\right) = \frac{3}{4}$$

$$\therefore k = D - C = \frac{9}{4}$$

11-12. 36

$f(x) = \frac{\sin x}{x+t}$ 의 최댓값을 $g(t)$ 라 하면, $k(x+t) = \sin x$ 가 해를 가지는 실수 k 의 최댓값이 $g(t)$ 이다.

기울기 k 가 최대이려면

이는 직선 $y = k(x+t)$ 가 $y = \sin x$ 에 접할 때이다.

따라서 접점의 x 좌표를 α 라고 할 때,

$$g(t)(\alpha+t) = \sin \alpha, \quad g(t) = \cos \alpha$$

따라서, $t = \tan \alpha - \alpha$ 이므로

$$\frac{dt}{d\alpha} = \sec^2 \alpha - 1 = \tan^2 \alpha$$

$$\int_{\frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{\pi}{6}}^{1 - \frac{\pi}{4}} g(t)^3 dt = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \cos \alpha \sin^2 \alpha d\alpha$$

$$= \left[\frac{1}{3} (\sin \alpha)^3 \right]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}}$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{12} - \frac{1}{24}$$

따라서, $p+q = 36$

Day. 12

수학1, 수학2

12-1. ⑤

삼각형 ABC의 세 변의 길이의 관계 $ab = c^2$ 을 통해 세 실수 a, b, c 의 관계가 등비수열임을 알 수 있다. 실수 $r \geq 1$ 에 대해

실수 a, b 를 $a = cr, b = \frac{c}{r}$ 로 표현하자.

삼각형 ABC에서 코사인법칙을 사용하여 $\cos C$ 를 나타내면

$$\cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$$

이 식을 c 에 대해 정리한 식은

$$\cos C = \frac{c^2 r^2 + \frac{c^2}{r^2} - c^2}{2c^2} = \frac{r^2 + \frac{1}{r^2} - 1}{2}$$

이때, $r^2 + \frac{1}{r^2} - 1 = \left(r - \frac{1}{r}\right)^2 + 1 \geq 1$ 이므로

$$\cos C = \frac{r^2 + \frac{1}{r^2} - 1}{2} \geq \frac{1}{2}$$

12-2. 26

$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{x^2 - 4} \int_2^x x f(t) dt = 4$ 에서 적분은 변수 t 에 대한

적분이므로 x 는 적분 밖으로 빼낼 수 있다.

또한, 함수 f 의 부정적분을 F 라고 할 때, 문제의 식은 다음과 같이 정리될 수 있다.

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{x^2 - 4} \int_2^x x f(t) dt = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x}{x^2 - 4} (F(x) - F(2)) = 4$$

이 식은 다시 정리하면

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x}{x^2 - 4} (F(x) - F(2)) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x}{x + 2} \cdot \frac{F(x) - F(2)}{x - 2} \quad 0/0$$

므로 미분을 활용하면

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x}{x + 2} \cdot \frac{F(x) - F(2)}{x - 2} = \frac{2}{4} \cdot f(2) = 4 \text{ 이므로}$$

$$f(2) = 8 + 2a + 2 = 8, \text{ 즉 } a = -1$$

$$f(x) = x^3 - x + 2 \text{ 이므로 } f(3) = 26$$

12-3. ②

점 P가 함수 $y = a^{x-1} - 2$ 의 그래프와 x 축이 만나는 점이므로
 $a^{x-1} - 2 = 0$ 의 근, $x = \log_a 2 + 1$ 이 점 P의 x 좌표가 된다.

따라서 점 P의 좌표는 $(\log_a 2 + 1, 0)$

두 함수 $y = a^x$ 와 $y = a^{x-1} - 2$ 의 평행이동 관계를 통해
 점 Q의 좌표가 $(\log_a 2, 2)$ 임을 알 수 있다.

삼각형 OPQ의 넓이는

$$\frac{1}{2} \times (\text{점 Q의 } y\text{좌표}) \times \overline{OP} = \frac{1}{2} \times 2 \times (\log_a 2 + 1)$$

이고 삼각형 OPQ의 넓이가 4이므로

$$\log_a 2 + 1 = 4$$

$$\therefore a = 2^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{2}$$

12-4. ②

점 P의 위치 변화량은 속도 함수 $v(t)$ 의 정적분과 같다.

점 P의 위치 함수를 $s(t)$ 라고 할 때,

$$s(t) = \int_0^t v(x) dx \text{ 와 같으므로}$$

$$s(t) = \left[-\frac{3}{2}x^2 + 7x \right]_0^t \text{ 이므로}$$

$$s(t) = -\frac{3}{2}t^2 + 7t$$

점 P의 시각 $t = 1$ 에서의 위치 $s(1) = \frac{11}{2}$ 이므로

$$s = \frac{11}{2} \text{ 이고,}$$

위치가 s 인 시각 $t = k$ ($k > 1$)는 위치 함수 $s(t)$ 가 대칭축

$x = \frac{7}{3}$ 에 대해 대칭인 이차함수이므로,

$$k = \frac{7}{3} \times 2 - 1 = \frac{11}{3}$$

$$\text{따라서 } \frac{k}{s} = \frac{2}{3}$$

12-5. 24

삼차함수 $f(x)$ 와 일차함수 $y = -2ax + k$ 의 그래프가

만나는 점의 x 좌표는 $x^3 + 4ax^2 = -2ax + k$ 의 해와 같고,

이는 $x^3 + 4ax^2 + 2ax - k = 0$ 과 같다.

이 삼차방정식을 $g(x) = 0$ 이라고 할 때,

$g(x) = 0$ 의 해가 k 의 값에 관계없이 항상 한 개 존재할 조건은
함수 $y = g'(x)$ 의 최솟값이 0 이상일 조건과 같다.

따라서, $g'(x) = 3x^2 + 8ax + 2a$ 가 항상 0 이상이므로

판별식을 이용하면 $16a^2 - 6a \leq 0$, $0 \leq a \leq \frac{3}{8}$

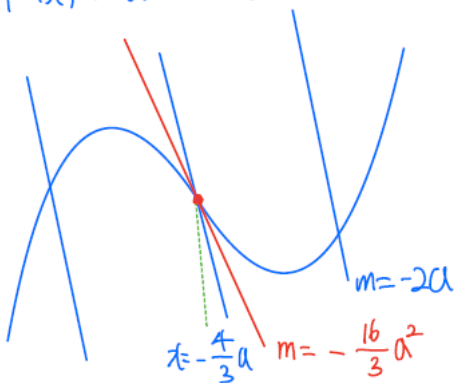
실수 a 의 최댓값 $M = \frac{3}{8}$ 이므로,

$$64 \times M = 24$$

<손풀이>

$$f'(x) = 3x^2 + 8ax$$

$$f''(x) = 6x + 8a$$



$$-2a \leq -\frac{16}{3}a^2$$

$$\therefore 0 \leq a \leq \frac{3}{8}$$

12-6. ④

조건 (나)와 (다)를 통해 $a_n (1 \leq n \leq m)$ 중에

음수인 항이 있음을 알 수 있고, k 가 $[1, m]$ 에 속함을 알 수 있다.

$a_k = 0$ 인 k 를 기준으로

음수인 항들의 합 $A = \sum_{n=1}^{k-1} a_n$ 과 양수인 항들의 합

$B = \sum_{n=k+1}^m a_n$ 을 정의하자.

조건 (나)와 조건 (다)를 A 와 B 를 통해 표현하면

$$\begin{cases} A + B = 54 \\ -A + B = 114 \end{cases} \text{임을 알 수 있다.}$$

따라서, $A = -30$, $B = 84$

또한, a_n 은 공차가 3인 등차수열이고, $a_k = 0$ 임을 통해 모든
항이 3의 배수임을 알 수 있다.

그러므로 a_k 이전의 항은

$$(a_1, a_2, a_3, a_4) = (-12, -9, -6, -3) \text{이고, } k = 5$$

첫째항 $a_1 = -12$ 이고 공차가 3인 등차수열의 합이 54가 되는 범위, 즉 m 을 구해보면,

$$\frac{m \times \{-12 + (-12 + 3(m-1))\}}{2} = 54 \text{ 이므로}$$

$$m = 12$$

$$\text{따라서, } k + m = 17$$

12-7. ④

두 함수의 교점 A, B의 x 좌표는

$a \sin b\pi x = -a \sin(b\pi x) + a$ 의 해와 같다.

$\sin(b\pi x) = \frac{1}{2}$ 인 x $\left(0 \leq x \leq \frac{1}{b}\right)$ 는

$$x = \frac{1}{6b} \text{ 또는 } x = \frac{5}{6b}$$

따라서, 두 점 A, B의 좌표는 각각

$$A\left(\frac{1}{6b}, \frac{a}{2}\right), B\left(\frac{5}{6b}, \frac{a}{2}\right) \text{이다.}$$

두 점 A와 B의 좌표를 이용하여 점 C, D의 좌표를 구하면

$$C\left(\frac{1}{2b}, 0\right), D\left(\frac{1}{6b}, 0\right) \text{이다.}$$

선분 AC와 선분 BD가 서로 수직이므로

두 선분의 기울기의 곱이 -1 임을 알 수 있다.

$$\text{선분 AC의 기울기는 } \frac{\frac{a}{2}}{-\frac{1}{3b}}, \text{ 선분 BD의 기울기는}$$

$$\frac{\frac{a}{2}}{\frac{2}{3b}} \text{ 이므로 } \frac{-9a^2b^2}{8} = -1$$

삼각형 ABC의 넓이는 선분 AB의 길이와 x 축으로부터 선분 AB까지 떨어진 거리를 이용하여 구할 수 있으므로

$$\triangle ABC = \frac{1}{2} \times \frac{2}{3b} \times \frac{a}{2} = \sqrt{2}$$

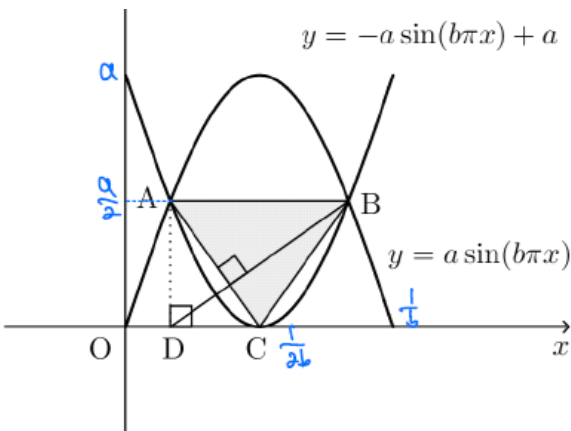
$$\text{따라서 } \frac{a}{6b} = \sqrt{2}, \text{ 즉 } a = 6\sqrt{2}b$$

위에서 구한 두 관계식을 이용하여 a 와 b 의 값을 구하면

$$9(72b^2)b^2 = 8, b \text{는 양수이므로 } b = \frac{1}{3}, a = 2\sqrt{2}$$

$$\text{따라서 } a^2b = \frac{8}{3}$$

<손풀이>



$$a \sin(b\pi x) = \frac{a}{2} \rightarrow \sin(b\pi x) = \frac{1}{2} \rightarrow x = \frac{1}{6b}$$

$$\therefore A \text{의 } x \text{좌표} = \frac{1}{6b} \rightarrow B \text{의 } x \text{좌표} = \frac{5}{6b}$$

$$\therefore \overline{AB} = \frac{5}{6b} - \frac{1}{6b} = \frac{2}{3b}$$

$$\therefore \triangle ABC = \frac{1}{2} \times \frac{2}{3b} \times \frac{a}{2} = \sqrt{2} \rightarrow \underline{a = 6\sqrt{2}b} \quad - ①$$

$\triangle ADC$ 과 $\triangle BAD$ 가 닮음

$$\rightarrow \overline{AD} : \overline{AB} = \overline{DC} : \overline{AD} \rightarrow \frac{a}{2} : \frac{2}{3b} = \frac{1}{3b} = \frac{a}{2}$$

$$\therefore \frac{a^2}{4} = \frac{2}{9b^2} \rightarrow \underline{a^2 b^2 = \frac{8}{9}} \quad - ②$$

$$\textcircled{1} \text{과 } \textcircled{2} \text{에 의해 } a = 2\sqrt{2}, b = \frac{1}{3}$$

12-8. ⑤

$a_4 = 5$ 이므로

주어진 조건 (나)에 의해 $a_5 = 3, a_6 = 2, a_7 = 5$

$a_7 = a_4$ 이므로 이 수열은 주기가 3인 수열이다.

수열의 주기를 통해 $a_{150} = 2$ 임을 알 수 있다.

$a_4 = 5$ 임을 이용하여 가능한 $\{a_1, a_2, a_3\}$ 순서쌍을 구하면 $\{5, 3, 2\}, \{7, 4, 9\}, \{8, 17, 9\}, \{33, 17, 9\}$ 로 4가지 존재한다.

이때, $\sum_{n=1}^{100} a_n$ 이 짝수인 순서쌍은 $\{33, 17, 9\}$ 뿐이므로

$$a_1 + a_{150} = 33 + 2 = 35$$

<손풀이>

(가) $a_4 = 5$

(나) 모든 자연수 n 에 대하여

$$a_{n+1} = \begin{cases} \underline{2a_n + 1} & (a_n \text{은 짝수}) \\ \underline{\frac{1}{2}(a_n + 1)} & (a_n \text{은 홀수}) \end{cases}$$

이다. 0.122 $\sum_{n=1}^{100} a_n$ 의 값이 짝수일 때, $a_1 + a_{150}$ 의 값은?

$$a_4 = 5 \rightarrow a_5 = 3, a_6 = 2, a_7 = 5, a_8 = 3, \dots$$

$$\dots a_{150} = 2$$

$$\sum_{n=4}^{100} a_n = (5+3+2) \times 32 + 5 = 325 = \text{홀수}$$

 $\therefore a_1 + a_2 + a_3 = \text{홀수}$ 이어야 한다.

$$a_3 \quad a_2 \quad a_1$$

$$2 \quad \text{---} \quad 3 \quad \text{---} \quad 5 \rightarrow a_1 + a_2 + a_3 = 22$$

$$9 \begin{cases} 4 \quad \text{---} \quad 7 \rightarrow a_1 + a_2 + a_3 = 22 \\ 17 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 8 \rightarrow a_1 + a_2 + a_3 = 22 \\ 33 \rightarrow a_1 + a_2 + a_3 = 28 \end{cases}$$

확률과 통계

12-9. ③

$$P(A^C) = \frac{2}{3} \text{ 이므로 } P(A) = \frac{1}{3}$$

$$P(A \cup B) = \frac{1}{2} \text{ 인 집합 } B \text{ 중}$$

$$P(B) \text{가 최대가 될 조건은 } A \subset B$$

이 경우 $P(B) = \frac{1}{2}$ 로 최댓값을 갖는다.

$$P(B) \text{가 최소가 될 조건은 } A \cap B = \emptyset$$

이 경우 $P(B) = \frac{1}{6}$ 로 최솟값을 갖는다.따라서, $P(B)$ 의 최댓값과 최솟값의 합은 $\frac{2}{3}$

12-10. ④

모표준편차를 σ 라 할 때,

신뢰구간의 길이 공식을 이용하여 $b-a$ 와 $d-c$ 를 구하면

$$b-a = 2 \times 1.96 \times \frac{\sigma}{4} = 0.98\sigma$$

$$d-c = 2 \times 2.58 \times \frac{\sigma}{4} = 1.29\sigma$$

칼슘 함량을 X 라 할 때, m 과의 차이가

$b-a$ 이상 $d-c$ 이하일 확률을 구하면

$$\begin{aligned} P(b-a \leq |X-m| \leq d-c) \\ = P(0.98\sigma \leq |X-m| \leq 1.29\sigma) \end{aligned}$$

$$= P\left(0.98 \leq \left|\frac{X-m}{\sigma}\right| \leq 1.29\right)$$

$$= P(0.98 \leq |Z| \leq 1.29)$$

$$= P(-1.29 \leq Z \leq -0.98) + P(0.98 \leq Z \leq 1.29)$$

$$= 2 \times P(0.98 \leq Z \leq 1.29)$$

$$= 2 \times (0.4015 - 0.3365)$$

$$= 2 \times 0.065 = 0.1300$$

12-11. ③

문자열을 구성하는 각 문자의 개수를 기준으로 나눈다.

$$i) (a, b, c) = (1, 0, 4), (0, 1, 4)$$

이 경우들은 a 와 b 가 들어가는 위치에 따라

$$2 \times \frac{5!}{4! \cdot 1!} = 10 \text{ 가지 경우가 존재}$$

$$ii) (a, b, c) = (1, 1, 3)$$

$$\text{이 경우는 } \frac{5!}{1! \cdot 1! \cdot 3!} = 20 \text{ 가지 경우가 존재}$$

$$iii) (a, b, c) = (0, 2, 3)$$

이 경우는 b 가 서로 이웃하지 않으므로

b 를 기준으로 문자열을 세 구역으로 나누어 c 를 배치한다.

$(\dots)b(\dots)b(\dots)$ 와 같은 문자열을 생각하여 c 를 배치하면

중복조합 ${}_3H_3$ 의 경우가 존재하고,

두 번째 영역에 c 가 하나도 들어가지 않는 경우의 수 ${}_2H_3$ 를

빼주면 이 경우는 ${}_3H_3 - {}_2H_3 = 10 - 4 = 6$ 가지 경우가 존재

따라서 모든 경우의 합은 $10 + 20 + 6 = 36$ 가지 경우가 존재.

12-12. 19

주머니에서 두 공을 뽑았을 때, 두 수의 곱이 8 미만인 경우는

$$(1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 5), (1, 6), (2, 3)$$

공을 두 개씩 2회 뽑을 때마다 두 수의 곱이 8 이상이어야 하므로

2회 모두 위에서 언급된 순서쌍을 뽑지 않아야 한다.

공을 뽑는 모든 경우의 수는 ${}_6C_2 \times {}_4C_2 = 90$ 이고, 모든 경우에서

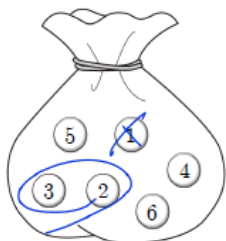
1을 뽑지 않는 경우의 수 ${}_5C_2 \times {}_3C_2$ 에 2와 3을 동시에 뽑는

경우의 수 $2 \times {}_3C_2$ 을 제외하면

$$\text{구하고자 하는 확률은 } \frac{{}_5C_2 \times {}_3C_2 - 2 \times {}_3C_2}{{}_6C_2 \times {}_4C_2} = \frac{4}{15} \text{ 이므로}$$

$$p+q=19$$

<손풀이>



11복원

1-6

1st
— x —2nd
— x —문득 그 8
각각...~

비이산인 경우

$$\left\{ \begin{array}{l} 1/2 \ 3 \ 4 \ 5 \ 6 \\ 2/3 \end{array} \right.$$

1은 뺀다면 X

(2,3)
은 뺀다면
제외

$$\frac{5C_2 \cdot 3C_2 - 1 \times 3C_2 \times 2}{6C_2 \cdot 4C_2} = \boxed{\frac{4}{15}}$$

미적분

12-9. ②

주어진 식 $\lim_{h \rightarrow 0+} \frac{|f(k+h)| - |f(k-h)|}{h} = 0$ 은 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\lim_{h \rightarrow 0+} \frac{|f(k+h)| - |f(k)| + |f(k)| - |f(k-h)|}{h} = 2(|f(k)|)' = 0$$

이를 통해 함수 $y = |f(x)|$ 가 $x = k$ 근방에서 대칭이어야 한다. 그러므로 $x = k$ 에서 함수 f 는 0을 함숫값으로 가져야 하므로 $a^k - 3 = 0$, 즉 $k = \log_a 3$

조건 $e^{f'(k)} = 8$ 에 위에서 구한 k 의 값을 대입하면

$$f'(k) = a^k \ln a = 3 \ln 2, \quad 3 \ln a = 3 \ln 2 \text{ 이므로 } a = 2$$

12-10. ⑤

두 함수 $f(x) = \frac{kx}{x^2+1}$ 과 $y=t$ 의 교점의 x 좌표는

방정식 $\frac{kx}{x^2+1} = t$ 의 해와 같다.

이 방정식을 풀어주면

$$tx^2 - kx + t = 0, \quad x = \frac{k \pm \sqrt{k^2 - 4t^2}}{2t} \text{ 이고,}$$

$$g(t) \text{는 두 근 중 더 큰 근이므로 } g(t) = \frac{k + \sqrt{k^2 - 4t^2}}{2t}$$

이 식을 미분하여 $g'(t)$ 의 식을 구하면

$$g'(t) = \frac{\frac{-8t^2}{\sqrt{k^2 - 4t^2}} - 2k - 2\sqrt{k^2 - 4t^2}}{4t^2}$$

$$g'\left(\frac{2}{5}k\right) = -10 \text{을 풀어서 양수 } k \text{의 값을 구하면 } k = \frac{5}{6}$$

<손풀이>

$$f'(x) = k \frac{-x^2+1}{(x^2+1)^2}$$

$$f(g(t)) = t$$

$$g'(t) = \frac{1}{f'(g(t))}$$

$$g'\left(\frac{2}{5}k\right) = \frac{1}{f'\left(g\left(\frac{2}{5}k\right)\right)}$$

$$= \frac{1}{f'(2)} \quad (\text{by } f\left(\frac{1}{2}\right) = f(2) = \frac{2}{5}k)$$

$$= \frac{25}{-3k} = -10$$

$$k = \frac{5}{6}$$

12-11. ②

직선 $x=t$ ($0 \leq t \leq 1$)를 포함한 x 축에 평행한 평면으로 자른

입체도형의 넓이 $S(t) = \{f(t)\}^2$

입체도형의 부피 V 를 $S(t)$ 를 이용하여 나타내면

$$V = \int_0^1 S(t) dt = \int_0^1 \{(3t^2 - 2t + 1) \ln(t^2 + 1)\} dt$$

$$\int_0^1 (3t^2 - 2t + 1) \ln(t^2 + 1) dt$$

$$= \left[(t^3 - t^2 + t - 1) \ln(t^2 + 1) \right]_0^1 - \int_0^1 2t(t-1) dt = \frac{1}{3}$$

따라서, 입체도형의 부피는 $\frac{1}{3}$

<손풀이>

$$\begin{aligned}
 V &= \int_0^1 (3x^2 - 2x + 1) \ln(x^2 + 1) dx \\
 &= \left[\underbrace{(x^3 - x^2 + x - 1)}_{(x-1)(x^2+1)} \cdot \ln(x^2+1) \right]_0^1 - \int_0^1 2x(x-1) dx \\
 &= \frac{1}{3}
 \end{aligned}$$

12-12. ④

함수 f 와 g 에 대하여 두 함수가 역함수 관계이므로

$$f(g(x)) = x$$

또한, $f(g(x) + 1)$ 의 역함수가 $h(x)$ 이므로

$$f(g(h(x)) + 1) = x$$

그러므로 $f(g(x)) = f(g(h(x)) + 1) = x$ 이므로

$$g(x) = g(h(x)) + 1$$

$g(x) - 1 = g(h(x))$ 이므로 양변에 함수 f 를 씌우면

$$h(x) = f(g(x) - 1)$$

적분값을 구하기 위해 부분적분을 사용하면

$$\begin{aligned}
 \int_3^6 g(x)h'(x) dx &= \left[g(x)h(x) \right]_3^6 - \int_3^6 g'(x)h(x) dx \\
 &= g(6)h(6) - g(3)h(3) - \int_3^6 f(g(x) - 1)g'(x) dx
 \end{aligned}$$

함수 f 와 g , h 의 역함수 관계를 이용하여 함숫값을 구하고,

적분 내부의 $g(x)$ 를 문자로 치환하여 치환적분하면

다음과 같은 결과가 나온다.

$$\int_3^6 g(x)h'(x) dx = 2 \times 3 - 1 \times 0 - \int_0^1 f(x) dx$$

함수 f 의 적분은 적분값을 알고 있는 함수 g 의 적분으로 바꾸어 주면 적분값을 구할 수 있다.

$$\int_3^6 g(x)h'(x) dx = 6 - \left(3 - \int_0^3 g(x) dx \right) = 4$$

<손풀이>

$$(74) \quad f(0)=0, \quad f(1)=2, \quad f(2)=6$$

$$f(g(h(x))+1) = x$$

$$f^{-1} = g \text{ 이므로}$$

$$g(h(x)+1) = g(x)$$

$$\int_3^6 g(x) h'(x) dx = \int_3^6 \{g(h(x)) + 1\} h'(x) dx$$

$$= \int_{h(3)}^{h(6)} \{g(t) + 1\} dt$$

$$\left\{ \begin{array}{l} h(3) = \Delta, \quad f(g(\Delta) + 1) = 3 \quad \therefore g(\Delta) = 0 \\ \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \therefore \Delta = f(0) = 0 \\ h(6) = *, \quad f(g(*) + 1) = 6, \quad g(*) = 1 \\ \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \therefore * = f(1) = 3 \end{array} \right.$$

$$\therefore \int_{h(3)}^{h(6)} \{g(t) + 1\} dt = \int_0^3 \{g(x) + 1\} dx$$

$$= 1 + 3 = 4,$$