

백일대장

수능 역전을 위한 백일 전략서

01

정답 및 해설

백일대장 수학 해설 크루들의 응원!

연세대학교 대기과학과 이예지

수능이 다가올수록 점점 걱정도 많아지고 공부를 하기 싫은 날들도 정말 많을 거라고 생각합니다. 하지만 그럴 때일수록 본인이 해야 할 일들에 집중하여 주변 상황 신경쓰지 않고 나만의 길을 가겠다는 태도가 굉장히 중요합니다. 결과에 상관없이 지금 순간순간에 최선을 다한다면 나중에 후회는 없을 것입니다. 마음껏 놀고 싶지만 꼭 참고 열심히 하는 자세만으로도 이미 충분히 대단한 사람이라고 생각합니다. 여러모로 힘든 수험생활을 보내게 되겠지만 잘해도 자만하지 말고 못해도 좌절하지 말고 항상 열심히, 꾸준히 하는 여러분이 되길 바랍니다. 그렇게 하다보면 여러분도 모르는 사이에 높은 위치에 올라와 있을 것이고 분명히 좋은 소식이 여러분을 기다리고 있을 것입니다. 백인대장 수험생 여러분 파이팅!

중앙대학교 약학과 조영환

잘될거야 화이팅!!

중앙대학교 의학부 이정우

수능시험장에서 1교시가 끝나고 국어를 잘 못 본 것 같더라도 절대로 끝났다고 생각하지 말기!
쉬는 시간동안 다 털어내고 2교시 수학에서 잘 보면 됩니다.
수학도 못 보더라도 탐구를 잘 보면 되고요. 수능은 마지막 과목이 끝날 때까지 정신을 집중해서 보는 게 중요합니다!

순천향대학교 의예과 이다은

그동안 백인대장에서 수많은 문제를 풀며 준비해온 시간들이 분명히 여러분의 실력을 단단하게 만들어주었을 것입니다.
문제를 마주했을 때 당황하지 말고, 그동안의 노력을 믿고 침착하게 접근한다면 충분히 해낼 수 있습니다.
수능에서는 실력뿐만 아니라 멘탈이 좌우하는 경우가 많습니다.
어려운 문제에 너무 연연하지 말고, 풀 수 있는 문제부터 정확하게 해결하는 것이 가장 좋은 전략입니다.
내가 모르는 문제는 남들도 모를거다! 라는 생각으로 끝까지 자신감을 가지고 임한다면 분명 좋은 결과가 따를 것이라 믿습니다.
지금까지 잘 해온 만큼, 마지막까지 힘내시길 바랍니다.
진심으로 여러분의 수능을 응원합니다!!

경희대학교 의예과 이정빈

삼수를 하면서 뼈저리게 얻은 교훈이
‘노력은 절대 배신하지 않는다’라는 겁니다. 스스로를 되돌아보며 끊임없이 성장하려고 노력한다면 그 노력이 여러분을 더욱 단단하게 만들어 줄 강력한 무기가 될 거예요.
불안하고 지칠 때도 있겠지만 그럴 때일수록 스스로를 믿고 끝까지 우직하게 나아가길 바랍니다. 여러분의 가능성은 여러분이 생각하는 것보다 훨씬 더 크니까요! 대학 생활은 여러분의 생각보다도 훨씬 더 즐겁고 행복한 일들로 가득합니다. 지금까지 잘 달려온 만큼, 마지막까지 최선을 다해 여러분 앞에 행복한 대학생활이 찾아오기를 진심으로 기원합니다!!

서울대학교 경영학과 고예빈

뒤를 돌아보기보다는 앞만 보고 달려야 할 때입니다.
지금까지 걸어온 길이 정답이니 조금만 더 버팁시다:)

Day. 1

수학1, 수학2

1-1. ⑤

점 $(\log_c b, \log_c a)$ 가 직선 $y = -\frac{2}{\log_a b}x + 1$ 위에 있으므로

$$-\frac{2}{\log_a b} \times \log_c b + 1 = \log_c a$$

밑이 모두 a 가 되도록 맞추면

$$-\frac{2}{\log_a b} \times \frac{\log_a b}{\log_a c} + 1 = \frac{1}{\log_a c}, \quad \log_a c = 3$$

$$\log_a c + 3\log_c a = 3 + 3 \times \frac{1}{3} = 4$$

1-2. ①

$f(x)$ 의 꼭짓점 좌표는 $(2, 1)$

$\sum_{n=11}^{20} f(a_n)$ 은 10개의 함수값의 합을 의미하므로 최소는

$a_{15} = 3, a_{16} = 1$ 일 때와 $a_{15} = 2, a_{16} = 0$ 둘 중 하나.

($a_{15} = 0, a_{16} = 0$ 일 때는 생략)

i) $a_{15} = 3, a_{16} = 1$ 일 때

$$a_n = -2n + 33$$

$$2 \times \sum_{n=1}^5 f(2n+1) = 2 \times \sum_{n=1}^5 (4n^2 - 4n + 2) = 340$$

ii) $a_{15} = 2, a_{16} = 0$ 일 때

$$a_n = -2n + 32$$

$$2\{f(0) + f(-2) + f(-4) + f(-6)\} + f(2) + f(-8) = 350$$

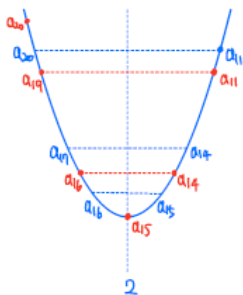
따라서 최소는 $a_n = -2n + 33$ 일 때 만족한다.

$$\therefore a_1 = 31$$

<손풀이>

$$f(x) = (x-2)^2 + 1$$

sol1) 그래프



$$\Rightarrow a_{15} = 3 \rightarrow a_1 = 31$$

sol 2) 식

$$a_n = -2n + a_1 + 2$$

$$\therefore f(a_n) = (-2n + a_1)^2 + 1 = (a_1)^2 - 4na_1 + 1 + 4n^2$$

$$\sum_{n=1}^{20} f(a_n) = 10(a_1)^2 - 4a_1 \times \frac{10(1+20)}{2} + \text{상수}$$

$$= 10 \{ (a_1)^2 - 62(a_1) \} + \text{상수}$$

$$= 10 (a_1 - 31)^2 + \text{상수}$$

$$\therefore \sum_{n=1}^{20} f(a_n) \text{은 } a_1 = 31 \text{일때 최소}$$

1-3. 75

i) $x=0$ 일 때

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(0)}{g(0)} \text{을 만족하므로}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x-1} = -f(0) = f(0), f(0) = 0$$

ii) $x=1$ 일 때

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{x-1} = f'(1) \text{을 만족하므로 } f'(1) = f(1) = 0$$

따라서, $f(x) = A(x-1)^2x$ (단, A 는 상수)

$$\frac{f(6)}{f(2)} = 75$$

<손풀이>

① $x=1$ 연속

$$\frac{f(1)}{g(1)} = f(1)$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{x-1}$$

$$\Rightarrow f(1) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{x-1}$$

$$\therefore f(x) = (x-1)^2 Q(x)$$

② $x=0$ 연속

$$\frac{f(0)}{g(0)} = f(0)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x-1} = -f(0)$$

$$\rightarrow f(0) = 0$$

$$\therefore f(x) = x Q_2(x)$$

$$\therefore f(x) = x(x-1)^2$$

1-4. 10

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{12} a_n &= a_1 + a_2 + \cdots + a_{11} + a_{12} \\ &= (a_1 + a_5) + (a_2 + a_6) + (a_3 + a_7) + (a_4 + a_8) + a_9 + a_{10} + a_{11} + a_{12} \\ &= 4k + a_9 + a_{10} + a_{11} + a_{12} \\ (a_{n+4} + a_{n+8}) - (a_n + a_{n+4}) &= 0 \text{ 이므로 } a_{n+8} = a_n \\ 4k + a_9 + a_{10} + a_{11} + a_{12} \\ &= 4k + a_1 + a_2 + a_3 + a_4 \\ &= 4k + \sum_{n=1}^4 a_n = 4k + 6 = 46 \\ \therefore k &= 10 \end{aligned}$$

1-5. ①

$$\text{i) } 0 \leq x \leq \frac{\pi}{6} \text{ 에서 } 2 \leq g(x) \leq 2\sqrt{3}$$

$$\text{ii) } f(x) \text{ 는 증가함수이므로 점근선은 } x=0 \text{ 이므로}$$

$$M: f(2\sqrt{3}) = \log_3 2\sqrt{3} + 2, \quad m: f(2) = \log_3 2 + 2,$$

$$M - m = \frac{1}{2}$$

1-6. 60

$$\text{i) 모든 실수 } x \text{ 에 관하여 } g(x) \text{ 가 미분가능하므로 } x=1 \text{ 에서 연속해야한다.}$$

$$b - f(1) = f(1), \quad f(1) = \frac{b}{2}$$

$$g'(x) = \begin{cases} -f'(x) & (x < 1) \\ f'(x) & (x \geq 1) \end{cases} \text{ 이므로 } f'(1) = 0$$

$$f'(x) = 3x^2 - 8x + a, \quad a = 5, \quad b = 20$$

$$\text{ii) } f'(x) = (3x-5)(x-1) \text{ 이므로 극솟값은 } x = \frac{5}{3} \text{ 일 때}$$

$$\text{갖는다. } c = \frac{5}{3}$$

$$\frac{a \times b}{c} = \frac{5 \times 20}{\frac{5}{3}} = 60$$

1-7. ⑤

$$f(x) \text{ 와 } g(x) \text{ 의 주기는 } 2a$$

$$\text{i) } \sin \frac{\pi x}{a} = \cos \frac{\pi x}{a} \text{ 를 만족하려면 } \frac{\pi x}{a} = \frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \frac{9\pi}{4}, \dots$$

$$\text{점 Q} = \left(\frac{5a}{4}, -\frac{\sqrt{2}}{2} \right), \text{ 점 P} = \left(\frac{a}{4}, \frac{\sqrt{2}}{2} \right)$$

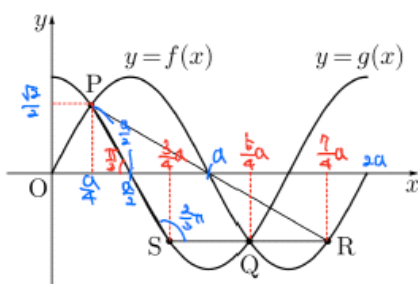
ii) 점 S는 점 Q에 대해 $x=a$ 대칭, 점 $S = \left(\frac{3a}{4}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

마찬가지로 점 R은 $x = \frac{3a}{2}$ 대칭, 점 $R = \left(\frac{7a}{4}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

iii) $\overline{PS} = \overline{RS}$ 이므로 $\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + 2} = a, a = \frac{2\sqrt{6}}{3}$

삼각형PRS의 넓이 $= \frac{1}{2} \times \sqrt{2} \times \frac{2\sqrt{6}}{3} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$

<손풀이>



① $\frac{\sqrt{3}}{3}$

② $\frac{5\sqrt{3}}{12}$

③ $\frac{\sqrt{3}}{2}$

④ $\frac{7\sqrt{3}}{12}$

⑤ $\frac{2\sqrt{3}}{3}$

$a = \frac{2\sqrt{6}}{3}$

$\Delta PRS = \frac{1}{2} \cdot a^2 \cdot \sin \frac{2}{3}\pi$

$= \frac{\sqrt{3}}{4} a^2$

$= \frac{2}{\sqrt{3}}$

1-8. ②

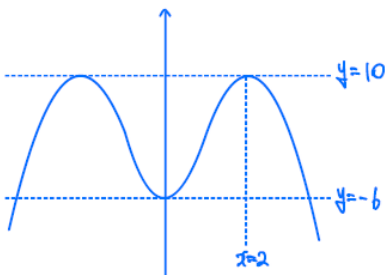
i) (가)를 통해 $f(x)$ 는 우함수(y 축 대칭함수)임을 알 수 있고

$f(x) = k$ 의 서로 다른 실근의 개수가 4이므로

$f(x) = (x-a)^2(x+a)^2 + b$ (a, b 는 상수)꼴임을 알 수 있다. 이때 k 의 범위가 $-6 < k < 10$ 이므로 (나)조건을

이용해서 $f(x) = A(x+2)^2(x-2)^2 + 10$ (A 는 상수), $f(0) = -6$ 이라는 것을 통해 $A = -1$

ii) $f(x) = -(x+2)^2(x-2)^2 + 10$ 이므로 $f(3) = -15$



확률과 통계

1-9. ②

주머니 B에 들어 있는 검은 공의 개수를 x 개라고 두면 문제의 조건에 따라서 다음과 같은 식이 성립한다. $\frac{x}{30+x} = \frac{3}{8}$,

따라서 $x = 18$

두 사건 X, Y 는 서로 독립이므로

$P(X) \times P(Y) = P(X \cap Y)$ 를 만족한다.

$$\frac{50}{50+n} \times \frac{20+(n-18)}{50+n} = \frac{20}{50+n}, n=30$$

1-10. ③

조건(가)에 따라서

$P(X \geq 106) = P(Y \leq m-2)$ 에서

$$P\left(Z \geq \frac{106-100}{\sigma}\right) = P(Z \leq -1) \text{이므로}$$

$$\sigma = 6$$

조건(나)를 통해 다음과 같은 식을 쓸 수 있다.

$$P(180 \leq Y \leq m+1) = 0.5328$$

$$P(180 \leq Y \leq m) + P(m \leq Y \leq m+1) = 0.5328$$

$$P\left(\frac{180-m}{2} \leq Z \leq 0\right) + P(0 \leq Z \leq 0.5) = 0.5328$$

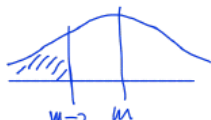
$$P\left(\frac{180-m}{2} \leq Z \leq 0\right) = 0.3413$$

$$\frac{180-m}{2} = -1, m = 182$$

$$\sigma = 6, m = 182 \text{이므로 } m + \sigma = 188$$

<손풀이>

$$X \sim N(100, \sigma^2), \quad Y \sim N(m, 2^2)$$



$$P\left(Z \geq \frac{6}{\sigma}\right) = P(Z \leq -1)$$

$$\therefore \sigma = 6$$

$$P(180 \leq Y \leq m+1)$$

$$P\left(\frac{180-m}{2} \leq Y \leq 0.5\right) = 0.3413 + 0.1915$$

$$\frac{180-m}{2} = -1 \quad \boxed{m = 182}$$

1-11. 216

우선, 3학년 2명이 마주보는 경우의 수는 회전하여 일치하는 것은 같은 것으로 보기 때문에 1가지이다. 3학년을 배치하면 이제 원형의 탁자를 회전하여 같아지는 자리를 없기 때문에 나머지 학생들을 배열하면 된다. 1학년 3명 중 어느 2명도 서로 이웃하지 않게 앉는 경우의 수는 ${}_2C_1 \times {}_3C_1$ 이고 남은 자리는 자동으로 2학년이 앉으므로 1가지. 마지막으로 1학년과 2학년의 위치를 서로 바꾸는 경우 고려한다.

$${}_2C_1 \times {}_3C_1 \times 3! \times 3 \times 2 = 216$$

1-12. 75

조건(가)를 만족하는 순서쌍 (a, b) 를 먼저 찾으면

$(1, 3), (3, 1), (2, 3), (3, 2), (2, 2)$ 이다.

이때 가능한 c 를 조건(나)를 통해 대응하면

$(1, 3), (3, 1), (2, 3), (3, 2)$ 일 때 $c=3$ or $c=4$,

$(2, 2)$ 일 때 $c=2$ or $c=3$ or $c=4$ 이므로 총 11가지 경우의 수를 가진다.

전체 경우의 수는 $4 \times 4 \times 4 = 64$ 이므로

$$\frac{q}{p} = \frac{11}{64}, \quad q=11, \quad p=64$$

따라서 $p+q=75$

<손풀이>



a, b, c.

전체 경우의 수 : 4^3

$$8 \leq a^2 + b^2 \leq 13$$

$$c \geq a, b$$

a, b

c

1 3

3, 4

3 1

3, 4

2 2

2, 3, 4

2 3

3, 4

3 2

3, 4

11가지.

$$\frac{11}{64}$$

미적분

1-9. ②

i) 점 A의 x 좌표는 $x = \frac{\ln(t+1)}{k}$ 이고 ($\because e^{kx} - 1 = t$,

같은 방법으로 점 D의 x 좌표는 $-\frac{\ln(t+1)}{2k}$,

$\overline{AD} = \frac{3\ln(t+1)}{2k}$, 점 B의 x 좌표는 $\frac{\ln(2t+1)}{k}$ 이고

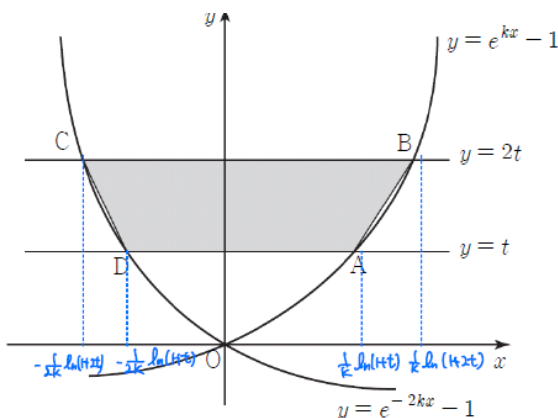
점 C의 x 좌표는 $-\frac{\ln(2t+1)}{2k}$, $\overline{BC} = \frac{3\ln(2t+1)}{2k}$

ii) $S(t) = \frac{3\ln(2t+1) + 3\ln(t+1)}{2k} \times t \times \frac{1}{2}$

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{S(t)}{t^2} = \frac{3}{4k} \times \frac{\ln(t+1) + \ln(2t+1)}{t} = 3 \text{ 이므로}$$

$$k = \frac{3}{4}$$

<손풀이>



① $\frac{1}{2}$

② $\frac{3}{4}$

③ 1

④ $\frac{5}{4}$

⑤ $\frac{3}{2}$

$$S(t) = \frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{k} \ln(4t+1) + \frac{1}{2k} \ln(4t+1) + \frac{1}{k} \ln(2t+1) + \frac{1}{2k} \ln(2t+1) \right\} \times t$$

$$= \frac{1}{2} \times \frac{3}{2k} \times \left\{ \ln(4t+1) + \ln(2t+1) \right\} \times t$$

$$\therefore \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{S(t)}{t^2} = \frac{3}{4k} \times \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\ln(4t+1) + \ln(2t+1)}{t}$$

$$= \frac{3}{4k} (2+1) = 3$$

$$\therefore k = \frac{3}{4}$$

1-10. ④

i) $g'(x) = f'(\sin 2x - k) \times (2\cos 2x) = 0$ 이므로

$$x = \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4} \text{ 이거나 } f'(\sin 2x - k) = 0 \text{ 을}$$

만족한다. $f'(x) = 2x + \frac{1}{2}$ 이므로 $\sin 2x - k = -\frac{1}{4}$ 일 때 $g'(x) = 0$ 이 된다.

ii) 서로 다른 실근의 개수가 4이므로 $\sin 2x = k - \frac{1}{4}$ 을 만족하는 x 는 위의 네 값 외에는 나오지 않아야 한다.

따라서 $k - \frac{1}{4} \geq 1$ 이거나 $k - \frac{1}{4} \leq -1$ 이므로

$$k \geq \frac{5}{4}$$

1-11. ②

$y' = \pi \cos \pi x$, 점 $\left(\frac{k}{n}, \sin \frac{k}{n} \pi\right)$ 에서의 접선은

$$y = \pi \cos \frac{k}{n} \pi \cdot \left(x - \frac{k}{n}\right) + \sin \frac{k}{n} \pi,$$

$$a_k = -\frac{k}{n} \pi \cdot \cos \frac{k}{n} \pi + \sin \frac{k}{n} \pi$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2n} \sum_{k=1}^n a_k$$

$$= \frac{1}{2\pi} \left(\int_0^\pi -x \cos x dx + \int_0^\pi \sin x dx \right)$$

$$= \frac{1}{2\pi} \left(\left[-x \sin x \right]_0^\pi + 2 \int_0^\pi \sin x dx \right) = \frac{2}{\pi}$$

<손풀이>

$$a_k = -\frac{\pi}{n} k \cdot \cos \frac{\pi}{n} k + \sin \frac{k}{n} \pi$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \left\{ -\frac{\pi}{n} k \cdot \cos \frac{\pi}{n} k + \sin \frac{k}{n} \pi \right\} \times \frac{1}{2n}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \left\{ -\frac{\pi}{n} k \cdot \cos \frac{\pi}{n} k + \sin \frac{k}{n} \pi \right\} \times \frac{\pi}{n} \times \frac{1}{2\pi}$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi -x \cos x + \sin x dx$$

$$= \frac{1}{2\pi} \left\{ \left[-x \sin x \right]_0^\pi + 2 \int_0^\pi \sin x dx \right\}$$

$$= \frac{1}{2\pi} \{ 0 + 4 \}$$

1-12. 75

$$\frac{a_n}{b_n} = \frac{1}{4^n + 1} - \frac{1}{4^{n-1} + 1} = \frac{4^{n-1} - 4^n}{(4^n + 1)(4^{n-1} + 1)} \quad (n \geq 2)$$

$$b_n = a_n \times \frac{(4^n + 1)(4^{n-1} + 1)}{4^{n-1} - 4^n}, \lim_{n \rightarrow \infty} b_n \text{ 이 값을 가지므로}$$

$$a_n = a_1 \times \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \frac{a_1(4^n + 1)(4^{n-1} + 1)}{4^{n-1}(4^{n-1} - 4^n)} = -\frac{4}{3}a_1 = -4, \quad a_1 = 3,$$

$$a_2 = \frac{3}{4}$$

<손풀이>

$$\begin{aligned} \frac{a_n}{b_n} &= \frac{1}{4^n + 1} - \frac{1}{4^{n+1} + 1} = \frac{-3 \cdot 4^{n+1}}{(4^n + 1)(4^{n+1} + 1)} \\ &= \frac{-\frac{3}{4} \times 4^n}{\frac{1}{4} \times 16^n + \triangle} \\ \therefore b_n &= \frac{(\frac{1}{4} \times 16^n + \triangle) \times a_1 \cdot r^{n-1}}{-\frac{3}{4} \times 4^n} \end{aligned}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \frac{\frac{1}{4} \times a_1 \times 4}{-\frac{3}{4}} = -\frac{4}{3}a_1 = -4$$

↓
 $r = \frac{1}{4}$

$\therefore a_1 = 3$

$$\therefore 100a_2 = 75$$

Day. **2**

수학1, 수학2

2-1. ③

$$g(2) = 0, \quad g'(2) = 15$$

$$x = 2 \text{ 일 때, } 5f(2) = 0, \quad f(2) = 0$$

$$2xf(x) + (x^2 + 1)f'(x) = g'(x) \text{ 이고}$$

$$4f(2) + 5f'(2) = 15, \quad f'(2) = 3$$

2-2. ④

i) $\overline{AB} = c, \overline{BC} = a, \overline{CA} = b$ 라고 하자.

$c, c+a, c+a+b$ 가 이 순서대로 등비수열을 이루므로

$$(a+c)^2 = c(a+b+c), \quad a^2 + ac = bc$$

ii) 사인법칙에 의해 $\frac{\sin(\angle ABC)}{\sin(\angle BAC)} = \frac{b}{a} = \frac{3}{2}, \quad b = \frac{3}{2}a$

i)의 식에 대입하면 $c = 2a$

iii) 삼각형 ABC의 각 변의 비는 $a:b:c = 2:3:4$ 이므로

$$\cos(\angle ACB) = \frac{2^2 + 3^2 - 4^2}{2 \times 2 \times 3} = -\frac{1}{4}$$

2-3. ③

i) 점 Q의 움직인 거리는 속도 그래프의 넓이이므로 삼각형의

$$\text{넓이 공식을 통해 } \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times 2 + \frac{1}{2} \times 6 \times \frac{3}{2} = 5$$

ii) 점 P의 움직인 거리는

$$\int_0^2 |v_1(t)| dt = \int_0^1 -kt(t-1) dt + \int_1^2 kt(t-1) dt$$

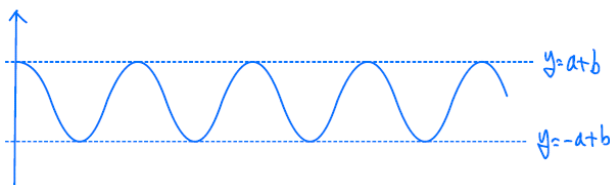
$$\text{이므로 } \frac{1}{6}k + \frac{5}{6}k = k = 5, k = 5$$

2-4. 15

함수 $y = a \cos 4x + b$ 의 주기는 $\frac{\pi}{2}$ 이고 a, b 모두 양수이므로

개형을 통해 $a+b=8, -a+b=-2$ 임을 알 수 있다.

$$a=5, b=3, ab=15$$



$$\therefore \begin{cases} a+b=8 \\ -a+b=-2 \end{cases} \Rightarrow a=5, b=3$$

2-5. ④

$$\text{i) } A+C = \frac{k}{6} \times 4^3 = \frac{32}{3}k, B+C = \frac{1}{2} \times 4k \times 4 = 8k$$

$$(A+C) - (B+C) = \frac{8}{3}k = 8, k = 3$$

$$\text{ii) } 3x = -3x(x-4), x = 3$$

곡선 $y = -kx(x-4)$ 와 직선 $y = kx$ 의 교점을 점 D라 하면

점 D(3, 9)

$$C = \frac{1}{2} \times 4 \times 9 + \frac{3}{6} \times 1^3 = \frac{37}{2}$$

<손풀이>

$$8 = A - B = \int_0^4 -kx(x-4) - kx dx$$

$$= \int_0^4 -kx^2 + 3kx dx$$

$$= -\frac{k}{3} \times 64 + \frac{3}{2}k \times 16$$

$$\therefore k=3$$

$$A+C = \frac{3}{6} \times 4^3 = 32, \quad A = \frac{3}{6} \times 3^3 = \frac{27}{2}$$

$$\therefore C = 32 - \frac{27}{2} = \frac{37}{2}$$

2-6. ⑤

i) $f'(x) = 3x^2 + 2(n+1)x + n$, 삼차함수의 개형을 통해

$$f'(-2) = 8 - 3n > 0, \quad n < \frac{8}{3} \text{ 과}$$

$$f'(-1) = 1 - n < 0, \quad n > 1 \text{ 임을 알 수 있다.}$$

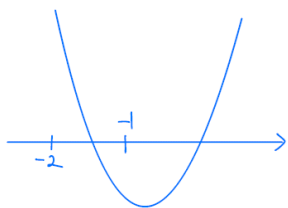
$$1 < n < \frac{8}{3}, \quad n = 2$$

ii) $f'(-1) = -1, f(-1) = 3 = k$ 이므로 점 $(-1, k)$ 에서의 접선의 방정식은 $y = -(x+1) + 3, a = -1, b = 2$ 이다.

$$\therefore a+b+k = 4$$

<손풀이>

$$f'(x) = 3x^2 + 2(n+1)x + n$$



$$f'(-2) > 0, \quad f'(-1) < 0, \quad D > 0$$

$$\Rightarrow a = -1, \quad b = 2, \quad k = 3$$

2-7. ⑤

$$(가) \quad a_1 + a_2 + \cdots + a_{2k-2} + a_{2k-1} = 0$$

$$a_k \times (2k-1) = 0, \quad a_k = 0$$

$$(나) \quad a_{k+1} = d, \quad a_{2k} = kd, \quad kd^2 = 45, \quad d = 3, \quad k = 5$$

($\because d$ 는 2 이상의 자연수)

$$a_n = 3(n-5), \quad a_{19} = 42$$

2-8. 133

$f(x) = x - k$ 라고 하면 (k 는 상수)

$$f'(0)g(0) + f(0)g'(0) = 0, \quad (-k) \times (-k) \left(-k - \frac{3}{2} \right) = 0$$

i) $k = 0$ 일 때

$$f(x) = x, \quad g(x) = \int_0^x t \left(t - \frac{3}{2} \right) dt = \frac{1}{3}x^2 \left(x - \frac{9}{4} \right),$$

$f(x)g(x) = \frac{1}{3}x^3 \left(x - \frac{9}{4} \right)$ 이므로 $x = 0$ 에서 극값을 갖지 않는다.

ii) $k = -\frac{3}{2}$ 일 때

$$f(x) = x + \frac{3}{2}, g(x) = \int_0^x t \left(t + \frac{3}{2} \right) dt = \frac{1}{3} \left(x + \frac{9}{4} \right) x^2,$$

$$f(x)g(x) = \frac{1}{3} \left(x + \frac{9}{4} \right) x^2 \left(x + \frac{3}{2} \right) \text{이므로 } x=0 \text{에서}$$

극값을 갖는다.

$$f(x) - g(x) = -\frac{1}{3}x^3 - \frac{3}{4}x^2 + x + \frac{3}{2},$$

$$f'(x) - g'(x) = -x^2 - \frac{3}{2}x + 1, x = \frac{1}{2} \text{일 때 극댓값을}$$

$$\text{갖는다. } f\left(\frac{1}{2}\right) - g\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{85}{48}$$

<손풀이>

$$g(0)=0, g'(x)=f(x)f\left(x-\frac{3}{2}\right)$$

$$\text{Let } h(x) = f(x)g(x), f(x) = x+a$$

$$h'(0) = f'(0)\underbrace{g(0)}_0 + f(0)\underbrace{g'(0)}_{f(0)f(-\frac{3}{2})}$$

$$= (f(0))^2 f(-\frac{3}{2}) = 0$$

$$\therefore \underline{a=0} \text{ or } a = \frac{3}{2}$$

$$f(x) = x, \underline{g'(x) = x(x - \frac{3}{2}), g(0)=0}$$

$$g(x) = x^2 Q(x)$$

$$\therefore f(x)g(x) = x^3 Q(x) \rightarrow (f(x)g(x))' = x^3 \cdot P(x)$$

$\therefore f(x)g(x)$ 는 $x=0$ 에서 극값을 갖지 않는다.

$$\therefore a = \frac{3}{2}, f(x) = x + \frac{3}{2}$$

$$(f(x) - g(x))' = 1 - x(x + \frac{3}{2}) = -\frac{1}{2}(2x-1)(x+2)$$

$\therefore f(x) - g(x)$ 는 $x = \frac{1}{2}$ 에서 극댓값을 갖는다.

$$\begin{aligned} \therefore f\left(\frac{1}{2}\right) - g\left(\frac{1}{2}\right) &= 2 - \int_0^{\frac{1}{2}} \left(t + \frac{3}{2}\right) t dt \\ &= 2 - \left[\frac{1}{3}t^3 + \frac{3}{4}t^2 \right]_0^{\frac{1}{2}} \\ &= \frac{85}{48} \end{aligned}$$

확률과 통계

2-9. ⑤

여사건을 통해 $a \times b \times c \times d \times e \neq 0$ 을 만족하는 확률을 먼저 찾아보면,

$(a, b, c, d, e) = (1, 1, 1, 1, 1)$ 인 경우 1가지 뿐이다.

$a + b + c + d + e = 5$ 를 만족하는 0 이상 2 이하의 정수

a, b, c, d, e 의 순서쌍은 ${}_5H_5$ 에서 3 이상의 정수를 가지는

경우를 빼서 ${}_5H_5 - {}_5H_2 \times 5 = 51$ 이므로 $1 - \frac{1}{51} = \frac{50}{51}$

2-10. ④

$\left(\frac{x}{a} + 2\right)^4$ 의 전개식에서 x^2 의 계수는 ${}_4C_2 \times \left(\frac{1}{a}\right)^2 \times 2^2 = \frac{24}{a^2}$

$(ax + 1)^6$ 의 전개식에서 x^2 의 계수는 ${}_6C_2 \times a^2 = 15a^2$

따라서 $\left(\frac{x}{a} + 2\right)^4 + (ax + 1)^6$ 의 전개식에서 x^2 의 계수는

$$\frac{24}{a^2} + 15a^2 \geq 2\sqrt{360} = 12\sqrt{10}$$

따라서 최솟값은 $12\sqrt{10}$ 이다.

2-11. ⑤

정규분포에서 상수 p 가 일정할 때 $b - a$ 가 최소가 되려면 m 을 기준으로 같은 절댓값만큼 분포해야하므로

$$a = m - 6, b = m + 6$$

$$P\left(\frac{m-6-m}{6} \leq Z \leq \frac{m+6-m}{6}\right) = p$$

$$P(-1 \leq Z \leq 1) = 2 \times P(0 \leq Z \leq 1) = 0.6826$$

2-12. 87

조건(나)에 따라서 사용할 수 있는 자연수는 1, 3, 5, 7, 9이고
조건(가)에 따라 각 자리의 수의 합은 14, 28이다. 합이 14가 되도록 하는 한 자리 홀수 네 개의 조합은

$(1, 1, 5, 7), (1, 1, 3, 9), (1, 3, 3, 7),$

$(1, 3, 5, 5), (3, 3, 3, 5)$ 이고 합이 28이 되도록 하는 조합은

$(1, 9, 9, 9), (3, 7, 9, 9), (5, 5, 9, 9),$

$(7, 7, 7, 7), (5, 7, 7, 9)$ 이다.

위의 순서쌍을 배열하는 방법을 고려하면

$$1 + {}_4C_1 \times 2 + \frac{4!}{2! \times 2!} \times 1 + \frac{4!}{2!} \times 6 = 87$$

미적분

2-9. ④

$$f(x) = \frac{2 - a \cos \frac{1}{2}x}{\ln(1+x^2)} \quad (x \neq 0), \quad x=0 \text{일 때 연속해야 하므로}$$

$$a=2, \quad f(0) = \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \frac{1}{4}$$

$$\frac{a}{f(0)} = 8$$

2-10. ①

i) 곡선 C 와 직선 $y=-x$ 의 교점은

$$x^2 + 3x(-x) - 2(-x)^2 = 16, \quad x = \pm 2$$

점 $P = (-2, 2)$, 점 $Q = (2, -2)$

ii) 곡선 C 를 x 에 대해 미분하면 $2x + 3y + (3x - 4y) \frac{dy}{dx} = 0$,

$$\text{점 } P \text{와 점 } Q \text{를 대입하면 } a = \frac{1}{7}, \quad b = \frac{1}{7}, \quad ab = \frac{1}{49}$$

2-11. 8

i) $\angle FBC = \theta$ 라 하고 $\overline{ED} = x$ 라 하면

$$\tan \theta = 1 - x, \quad \tan \left(\frac{\pi}{4} - \theta \right) = \frac{2-x}{2}$$

$$\frac{1 - \tan \theta}{1 + \tan \theta} = \frac{x}{2-x} = \frac{2-x}{2}, \quad x = 3 - \sqrt{5} \quad (\because x < 2)$$

ii) (삼각형 EBF의 넓이)

= 사각형 ABCD의 넓이 -

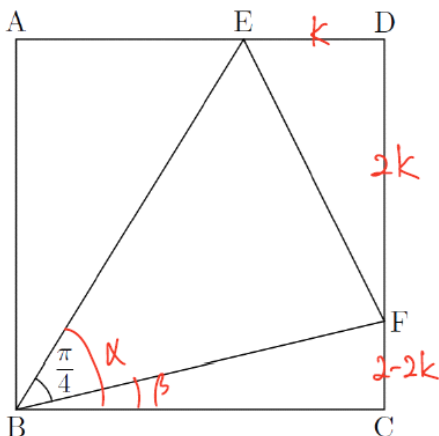
- (삼각형 ABE의 넓이 + 삼각형 BCF의 넓이
+ 삼각형 EFD의 넓이)

$$= 4 - \{(2-x) + (2-2x) + x^2\},$$

$$= -x^2 + 3x = -5 + 3\sqrt{5}$$

$$a = 3, \quad b = -5$$

<손풀이>



$$\tan \alpha = \frac{2}{2-k}$$

$$\tan \beta = \frac{2-2k}{2} = 1-k$$

$$\therefore \tan \frac{\pi}{4} = \tan(\alpha - \beta)$$

$$1 = \frac{\frac{2}{2-k} - (1-k)}{1 + \frac{2}{2-k} \times (1-k)} = \frac{2 - (1-k)(2-k)}{2-k + 2(1-k)}$$

$$\therefore 4 - 3k = -k^2 + 3k \rightarrow k^2 - 6k + 4 = 0$$

$$\therefore k = 3 \pm \sqrt{5} \rightarrow k = 3 - \sqrt{5} \text{ (by } 0 < k < 2)$$

$$\begin{aligned} \Delta EBF &= \frac{1}{2} \times \overline{BF} \times \overline{BE} \times \sin \frac{\pi}{4} \\ &\text{or} \\ &= \square ABCD - \{ \Delta ABE + \Delta EDF + \Delta BCF \} \\ &= 4 - \{ 2-k + k^2 + 2-2k \} \\ &= 4 - \{ k^2 - 3k + 4 \} \\ &= -k^2 + 3k \\ &= -3k + 4 \text{ (by } k^2 - 6k + 4 = 0) \\ &= 3\sqrt{5} - 5 \end{aligned}$$

$$\therefore a=3, b=-5$$

2-12. 15

i) (ㄴ)에서 $f(2) = 4, f'(2) = 1$

ii) $f''(x) > 0$ 이고 $f'(2) = 1$ 이므로

$$\begin{aligned} &\int_0^6 \frac{|f'(x) - 1|}{f(x) - x} dx \\ &= \int_0^2 -\frac{f'(x) - 1}{f(x) - x} dx + \int_2^6 \frac{f'(x) - 1}{f(x) - x} dx. \\ &f(x) - x = g(x) \text{ 라고 하면 위 식은} \\ &= -\int_0^2 \frac{g'(x)}{g(x)} dx + \int_2^6 \frac{g'(x)}{g(x)} dx \\ &= \left[-\ln |g(x)| \right]_0^2 + \left[\ln |g(x)| \right]_2^6 = \ln 15 \end{aligned}$$

<손풀이>

(가) $f''(x) > 0 \rightarrow f(x)$: 아볼 or $f'(x)$: 증가함수

(ㄴ) $f(2) = 4,$

$$f'(2) = 1, f'(x) \text{ : 증가함수} \rightarrow \begin{cases} f'(x) > 1 & x > 2 \\ f'(x) < 1 & x < 2 \end{cases}$$

$$(타) f: 아불, f(0)=3 \rightarrow f(6)=26$$

$$\begin{aligned} \int_0^6 \frac{|f(x)-1|}{f(x)-x} dx &= \int_0^2 \frac{-f(x)+1}{f(x)-x} dx + \int_2^6 \frac{f(x)+1}{f(x)-x} dx \\ &= [-\ln(f(x)-x)]_0^2 + [\ln(f(x)-x)]_2^6 \\ &= -\ln 2 + \ln 3 + \ln 20 - \ln 2 \\ &= \ln 15 \end{aligned}$$

Day. 3

수학1, 수학2

3-1. 19

- i) $f'(x) = -x^2 + 2x + a$, $f'(-1) = -3 + a = 0$, $a = 3$
 ii) $f(3) = 19$

3-2. ②

$$1 - \cos^2\left(\frac{n\pi}{10}\right) + \sin^2\left(\frac{\pi}{7}\right) \geq 1,$$

$$\sin^2\left(\frac{\pi}{7}\right) \geq \cos^2\left(\frac{n\pi}{10}\right) = \sin^2\left(\frac{n\pi}{10} - \frac{\pi}{2}\right), \text{ 그래프를 통해}$$

범위를 구하면

i) $-\frac{\pi}{7} \leq \frac{n\pi}{10} - \frac{\pi}{2} \leq \frac{\pi}{7}$, 만족하는 $n = 4, 5, 6$

ii) $\frac{6}{7}\pi \leq \frac{n\pi}{10} - \frac{\pi}{2} \leq \frac{8}{7}\pi$, 만족하는 $n = 14, 15, 16$

모든 n 의 합은 60

<손풀이>

$$\sin^2\left(\frac{n}{10}\pi\right) - \cos^2\left(\frac{\pi}{7}\right) \geq 0$$

$$\begin{aligned} \therefore \sin \frac{n}{10}\pi &\geq \cos \frac{\pi}{7} \text{ or } \sin \frac{n}{10}\pi \leq -\cos \frac{\pi}{7} \\ &= \sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{7}\right) &= \sin\left(\frac{3}{2}\pi - \frac{\pi}{7}\right) \\ &= \sin\left(\frac{5}{14}\pi\right) & \end{aligned}$$

$$\therefore \frac{5}{14}\pi \leq \frac{n}{10}\pi \leq \frac{9}{14}\pi \text{ or } \frac{19}{14}\pi \leq \frac{n}{10}\pi \leq \frac{23}{14}\pi$$

$$\therefore n = 4, 5, 6, 14, 15, 16$$

3-3. 131

$f(x)$ 의 최솟값이 $g(x)$ 의 최댓값보다 같거나 크다.

$g(x) = -(x-1)^2 + 3$, 최댓값은 3

$f'(x) = 4x^3 - 12x^2 - 16x = 4x(x+1)(x-4)$

최솟값은 $f(4) = -128 + k$ 이고 $-128 + k \geq 3$, $k \geq 131$

<손풀이>

$f(x)$ 의 최솟값 $\geq g(x)$ 의 최댓값

$$f'(x) = 4x^3 - 12x^2 - 16x = 4x\{x^2 - 3x - 4\}$$

$$= 4x(x-4)(x+1)$$

$$\therefore f(x) \geq f(4) = k - 128$$

$$g(x) = -(x-1)^2 + 3$$

$$\therefore g(x) \leq g(1) = 3$$

$$k - 128 \geq 3 \rightarrow k \geq 131$$

3-4. ④

$f(x) - 2x + k = h(x)$ 라고 하면 $h(x) = 2x^3 + 3x^2 - 12x + k$,

$h'(x) = 6(x+2)(x-1)$ 이다. $g(x)$ 의 미분가능하지 않은

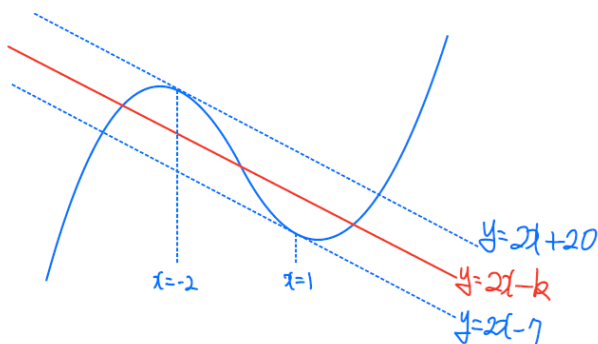
점의 개수가 3이 되려면 $h(1) < 0 < h(-2)$ 를 만족해야

하므로 $-7 + k < 0 < 20 + k$, $-20 < k < 7$

<손풀이>

$$f'(x) = 6x^2 + 6x - 10$$

$$\therefore f'(x) = 2 \rightarrow x = -2 \text{ or } x = 1$$



3-5. ④

- i) 집합 $A(n)$ 이 공집합이 될 때 $f(x)$ 와 $g(x)$ 는 서로 만나지 않는다. $f(x)$ 는 점근선 $y = n$ 을 갖는 우하향 그래프이므로 $n \leq 3$, $a = 3$

ii) 집합 $A(n)$ 이 공집합이 아닌 유한집합이 될 때 $n > 7, b = 8$

3-6. 8

$f(0) = 2, g(0) = -3$ 이므로

$f(x) + g(x) = x^2 - x - 1$ 이고

$f(x)g(x) = x^3 - 7x - 6 = (x+1)(x+2)(x-3)$ 이다.

$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$ 이므로 $f(x)$ 의 차수가 $g(x)$ 의 차수보다 작다.

$f(x) = x + 2, g(x) = (x+1)(x-3)$

$f(-4) = -2, g(1) = -4$ 이므로

$\therefore f(-4) \times g(1) = 8$

3-7. ②

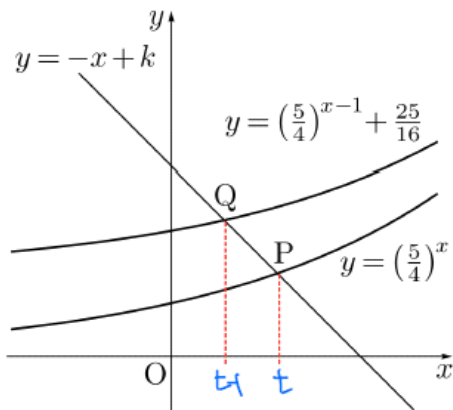
점 P의 x 좌표를 p 라 하면 $\overline{PQ} = \sqrt{2}$ 이고 기울기의 절댓값이 1이므로 점 $Q = \left(p-1, \left(\frac{5}{4}\right)^p + 1\right)$

점 Q를 $y = \left(\frac{5}{4}\right)^{x-1} + \frac{25}{16}$ 에 대입하면

$$\left(\frac{5}{4}\right)^{p-2} + \frac{25}{16} = \left(\frac{5}{4}\right)^p + 1, \left(\frac{5}{4}\right)^p = \frac{25}{16}, p = 2$$

$$k = p + \left(\frac{5}{4}\right)^p = \frac{57}{16}$$

<손풀이>



$$\left(\frac{5}{4}\right)^{t-1} + 1 = \left(\frac{5}{4}\right)^{t-2} + \frac{25}{16}$$

$$\frac{9}{25} \cdot \left(\frac{5}{4}\right)^t = \frac{9}{16}$$

$$t = 2$$

$$\therefore P\left(2, \frac{25}{16}\right)$$

$$\therefore k = \frac{57}{16}$$

3-8. ②

$b_n = -2(n-p)$ (p 는 상수)라고 하자.

(나)에서 $a_m = |b_k| \geq 0$ 이므로

가능한 $m = 1, 2, \dots, 6$ 이다.

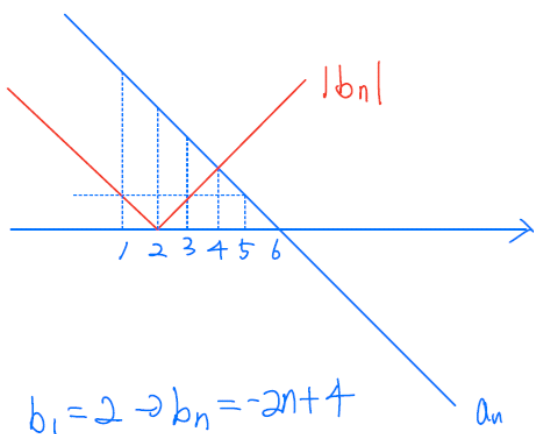
(나)를 만족하는 순서쌍의 개수가 7이므로

하나의 a_m 에 대해 k 값이 두 개이므로 $p = 2$ 이어야 한다.

$$(b_7)^2 = (-10)^2$$

<손풀이>

$$(*) b_n = b_1 - 2(n-1)$$



확률과 통계

3-9. ⑤

i) C가 들어간 상자가 3일 때 A의 합은 $1+2$

ii) C가 들어간 상자가 4일 때 A의 합은 $1+2, 1+3$

iii) C가 들어간 상자가 5일 때 A의 합은

$$1+2, 1+3, 1+4, 2+3$$

iv) C가 들어간 상자가 6일 때 A의 합은

$$1+2, 1+3, 1+4, 1+5, 2+3, 2+4$$

나머지를 배열하는 방법은 각각 3가지이므로 $13 \times {}_3C_1 = 39$

3-10. ②

95% 신뢰구간 A를 식으로 쓰면

$$\bar{x} - 1.96 \times \frac{\sigma}{\sqrt{100}} \leq m \leq \bar{x} + 1.96 \times \frac{\sigma}{\sqrt{100}} \text{ 이므로 20과}$$

40이 모두 포함되려면 신뢰구간 A의 길이가 20보다 같거나 커야한다.

$$\text{따라서 } 2 \times 1.96 \times \frac{\sigma}{10} \geq 20, \sigma \geq \frac{100}{1.96} = 51.0204 \dots$$

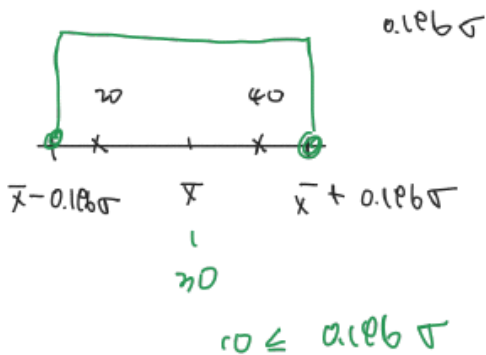
따라서 자연수 σ 의 최솟값은 52

<손풀이>

$$X \sim N(m, \sigma^2)$$

$$n=100$$

$$\bar{x} - 1.96 \frac{\sigma}{10} \leq m \leq \bar{x} + 1.96 \frac{\sigma}{10}$$



$$\frac{10}{0.196} \leq \sigma$$

$$51.1x \leq \sigma$$

$$52 = \sigma$$

3-11. ④

선택된 두 점 사이의 거리가 $\sqrt{2}$ 보다 같거나 작을 확률은 총 ${}_{12}C_2$ 중에서 대각선으로 이웃한 경우 16가지이므로

$$1 - \frac{8}{33} = \frac{25}{33}$$

3-12. 105

A, B, C, D 사이의 세 개의 ○ 중에서 하나는 0을, 나머지 두 개의 ○에는 1개 이상의 줄을 채우고, A의 왼쪽 ○, D의 오른쪽 ○에는 0개 이상의 줄을 채우면 된다.

$${}_3C_1 \times {}_4H_4 \times 4! = 105 \times 24 \text{이므로 } \frac{S}{24} = 105$$

미적분

3-9. ③

코사인 법칙을 이용하면

$$\overline{BC}^2 = 3^2 + (2n)^2 - 2 \times 3 \times 2n \times \frac{1}{2},$$

$$\overline{BC} = \sqrt{4n^2 - 6n + 9}$$

$$\text{중선정리에 따라 } 3^2 + (2n)^2 = 2(\overline{BM}^2 + a_n^2),$$

$$a_n^2 = 2n^2 + \frac{9}{2} - \left(n^2 - \frac{3}{2}n + \frac{9}{4}\right) = n^2 + \frac{3}{2}n + \frac{9}{4}$$

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - n) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n^2 + \frac{3}{2}n + \frac{9}{4}} - n \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{3}{2}n + \frac{9}{4}}{\sqrt{n^2 + \frac{3}{2}n + \frac{9}{4}} + n} = \frac{3}{4} \end{aligned}$$

3-10. ①

점 C의 x 좌표는 $e^t + 2$, 점 B의 x 좌표는 3이므로

$$S_1(t) = \frac{1}{2} \times 3 \times t, \quad S_2(t) = \frac{1}{2} \times (e^t - 1) \times t$$

$$\lim_{t \rightarrow 0+} \frac{S_2(t)}{t \times S_1(t)} = \lim_{t \rightarrow 0+} \frac{e^t - 1}{3t} = \frac{1}{3}$$

3-11. ①

i) $x = -2$ 에서 $x = 2$ 까지의 곡선 $y = h(x)$ 의 길이는

$$\int_{-2}^2 \sqrt{1 + \{h'(x)\}^2} dx \text{ 이다.}$$

$$h'(x) = \frac{4x}{\sqrt{g'(x)}} \text{ 이므로}$$

$$\int_{-2}^2 \sqrt{1 + \{h'(x)\}^2} dx = \int_{-2}^2 \sqrt{1 + \frac{16x^2}{g'(x)}} dx$$

ii) $g(x)$ 는 $f(x)$ 의 역함수이므로

$$x = \frac{\sqrt{2}}{2} \tan\left(\frac{\sqrt{2}}{2}y\right), \quad g'(x) = \frac{2}{\sec^2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}y\right)} \text{ 이다.}$$

$$\sqrt{2}x = \tan\left(\frac{\sqrt{2}}{2}y\right), \quad \sec^2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}y\right) = 2x^2 + 1,$$

$$g'(x) = \frac{2}{2x^2 + 1}$$

따라서

$$\int_{-2}^2 \sqrt{1 + 8x^2(2x^2 + 1)} dx = \int_{-2}^2 (4x^2 + 1) dx = \frac{76}{3}$$

<손풀이>

$$\begin{aligned}
 h'(x) &= \frac{4x}{\sqrt{g(x)}} & \frac{1}{g'(x)} &= f'(g(x)) = \frac{1}{2} \sec^2\left(\frac{\sqrt{2}}{2} g(x)\right) \\
 l &= \int_{-2}^2 \sqrt{1+(h'(x))^2} dx & &= \frac{1}{2} \left\{ 1 + \tan^2\left(\frac{\sqrt{2}}{2} g(x)\right) \right\} \\
 &= \int_{-2}^2 \sqrt{1 + \frac{16x^2}{g(x)}} dx & &= \frac{1}{2} \{ 1 + 2x^2 \} \\
 &= \int_{-2}^2 \sqrt{1 + 8x^2(1+2x^2)} dx & \text{← 여기서} & \\
 &= \int_{-2}^2 4x^2 + 1 dx \\
 &= \frac{76}{3}
 \end{aligned}$$

3-12. 120

$f(x)$ 는 $-\frac{b}{a}$ 의 부호에 따라 두 가지 개형을 갖는다.

i) $-\frac{b}{a} < 0$ 일 때, 서로 다른 실수 t 의 값의 합이 2보다 작다.

ii) $-\frac{b}{a} > 0$ 일 때, 위 조건을 만족시킬 수 있다.

$$f'(x) = \{-ax^2 + (2a-b)x + b\}e^{-x},$$

$$f'(3) = (-3a-2b)e^{-3} = -2e^3, \quad b = \frac{2-3a}{2}$$

$$-\frac{b}{a} = \frac{3a-2}{2a} < \frac{3}{2} \text{ 이므로 (가) 조건을 만족하는}$$

$f'(t) \times x$ 는 $f(x)$ 와 $x=2$ 에서 접한다.

$$\text{iii) } \frac{f(2)-f(0)}{2-0} = f'(2),$$

$$(2a+b)e^{-2} = -be^{-2}, \quad a = -b, \quad a = 2, \quad b = -2$$

$\therefore 120$

Day. 4

수학1, 수학2

4-1. ②

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 4, \quad \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = |a-1| \text{ 이므로}$$

$|4 - |a-1|| = 2, \quad |a-1| = 2 \text{ 나 } |a-1| = 6 \text{ 을 만족해야 한다.}$

$$a = -5, -1, 3, 7$$

$\therefore 4$

4-2. 133

(가)에서 $f(x) - f(-x) = 4x^3 + \dots$ 이므로

$f(x)$ 의 홀수차항 중 최고차항이 x^3 이고

그 계수는 2이다.

$f(0) = f'(0) = 0$ 이므로

$f(x)$ 의 상수항과 x 항은 모두 0

$$\int_{-2}^2 x f(x) dx = 2 \int_0^2 2x^4 dx = \frac{128}{5}$$

$\therefore 133$

4-3. 12

(가)에서 $\log \frac{n}{80} = k$ (k 는 정수)라고 하면

$n = 10^k \times 80 = 2^{k+4} \times 5^{k+1}$ 이다.

양의 약수의 개수: $(k+5)(k+2) \leq 180, -17 \leq k \leq 10$

n 이 자연수일 때에 $-1 \leq k \leq 10$

$\therefore 12$

<손풀이>

$$\begin{aligned} \text{(가)} \quad \frac{n}{80} &= 10^m \quad (\text{단 } m = \text{정수}) \\ n &= 2^{m+4} \cdot 5^{m+1} \quad (m \geq -1) \\ \text{(나)} \quad n &= 2^{m+4} \cdot 5^{m+1} \\ (m+5)(m+2) &\leq 180 \\ -17 &\leq m \leq 10 \\ \therefore -1 &\leq m \leq 10 \Rightarrow m: 12\text{개} \\ \therefore n &\Rightarrow 12\text{개} \end{aligned}$$

4-4. ④

점 P의 속도를 v_1 이라고 하고

점 Q의 속도를 v_2 라고 하면

$v_1 = 3t^2 - 4t - 6, v_2 = 2t + 3$ 이다.

속도가 같은 순간은

$v_1 = v_2, 3t^2 - 6t - 9 = 0, 3(t-3)(t+1) = 0, t = 3 (t > 0)$

일 때이다.

$t = 3$ 일 때

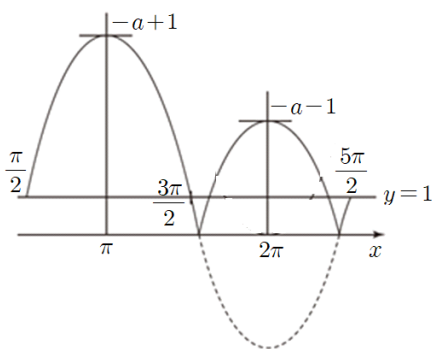
$|x_1 - x_2| = 5, |-27 - k| = 5, k_1 = -32, k_2 = -22$

$\therefore -38$

4-5. 461

$a > 0$ 모순 $\Rightarrow a < 0$

$a = -1, -1 < a < 0$ 모순 $\Rightarrow a < -1$



$$\textcircled{1} a + 19 = -a - 1$$

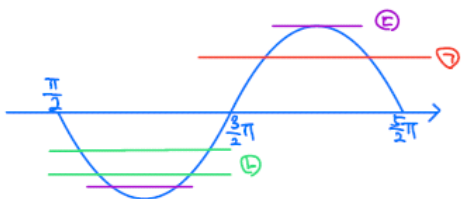
$$\textcircled{2} a + 19 = 0$$

$$a_1 = -19, \quad a_2 = -10$$

$$(-10)^2 + (-19)^2 = 461$$

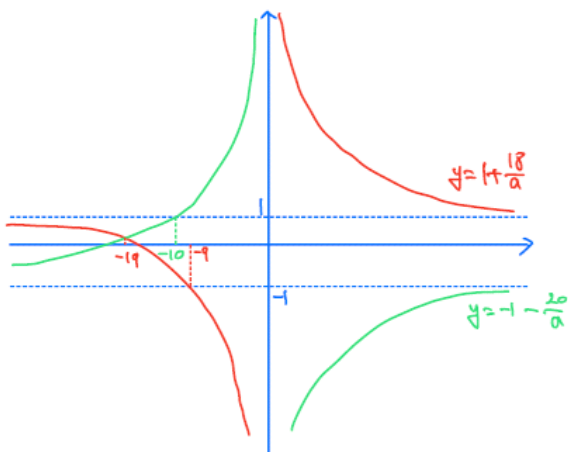
<손풀이>

$\cos x = k$ or $\cos x = l$ 의 값이 4π 인 경우



$$a \cos x + 1 = \pm(a + 19)$$

$$\cos x = 1 + \frac{18}{a} \quad \text{or} \quad \cos x = -1 - \frac{20}{a}$$



$$\textcircled{1} a = -19 \quad (\text{by } \textcircled{7})$$

$$\textcircled{2} a = -10 \quad (\text{by } \textcircled{E})$$

$$\therefore a_1^2 + a_2^2 = 361 + 100 = 461$$

4-6. ④

$a > 1$ 이므로

$$\text{점 } B = \left(\log_a \frac{3}{2} + 1, \frac{1}{2} \right), \text{ 점 } A = \left(\log_a \frac{1}{2} + 1, \frac{1}{2} \right)$$

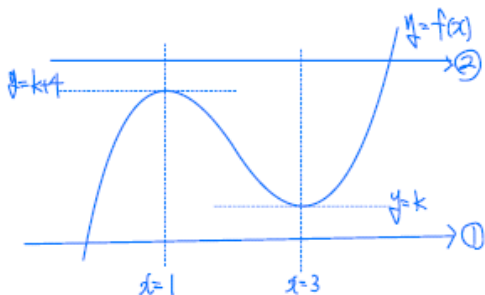
선분 CA와 선분 AB의 길이가 같으므로

$$2 \left(\log_a \frac{1}{2} + 1 \right) = \log_a \frac{3}{2} + 1, \log_a 6 = 1, a = 6$$

삼각형 OAB의 넓이는

$$\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \left(\log_6 \frac{1}{2} + 1 \right) = \frac{\log_6 3}{4} \text{ 이므로 } 36^S = \sqrt{3}$$

4-7. ③



① case

$$(\text{나}) \quad 0 < k < 8 \rightarrow k : 7 \text{개}$$

② case

$$(\text{나}) \quad k+4 < 0, -k-4 < 8$$

$$\therefore -12 < k < -4 \rightarrow k : 7 \text{개}$$

$$\therefore 14$$

4-8. 936

$$S_n = \frac{d}{2}n^2 - \left(\frac{d}{2} + 200 \right)n$$

(나)에서 $T_{16} > T_{17}$ 과 $T_{18} > T_{17}$ 임을 알 수 있다.

i) $T_{16} > T_{17}$ 일 때

$$0 > S_{17}, 0 > 8d - 200, d < \frac{200}{8}$$

ii) $T_{18} > T_{17}$ 일 때

$$S_{18} > 0, \frac{17}{2}d - 200 > 0, d > \frac{400}{17}$$

따라서 $d = 24$

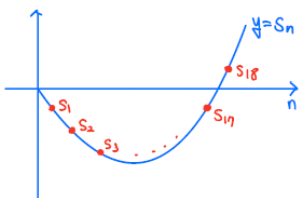
$S_n = 12n^2 - 212n$ 이므로 최솟값은 $S_9 = -936$ 이다.

$$\therefore 936$$

<손풀이>

(4) Case1) $d < 0 \rightarrow a_n < 0 \rightarrow S_n < 0 \rightarrow T_n < 0$ 이고 T_n 은 감소한다.

$\therefore T_n$ 의 최솟값은 존재하지 않는다.

Case 2) $d > 0 \rightarrow S_n$: 2차함수 (아·복)

$$\begin{aligned} \therefore S_{17} < 0 &\rightarrow -200 + a_{17} < 0 \rightarrow d < 25 \\ S_{18} > 0 &\rightarrow -200 + a_{18} > 0 \rightarrow \frac{400}{17} < d \Rightarrow d = 24 \end{aligned}$$

$$\therefore a_n = 24(n-1) - 200$$

$$\therefore n \geq 10 \rightarrow a_n \geq 0 \text{ 이다.}$$

$$\therefore S_n \geq S_9 = -936 \rightarrow |m| = 936$$

확률과 통계

4-9. ①

a, b, c 의 순서쌍은 ${}_4H_3$ 이고 d 의 가능한 경우의 수는 ${}_3H_1$ 이므로
 ${}_4H_3 \times {}_3H_1 = 60$

4-10. 11

시행을 1회 마친 후, 두 상자에 들어 있는 계피맛 사탕의 개수의 합이 3일 경우는

i) 박하와 박하 ii) 박하와 계피 iii) 계피와 박하사탕을 뽑은 경우이고 이 중 상자 A에 들어 있는 박하맛 사탕의 개수가 2인 경우는 iii) 경우이다. 이때 전체 시행의 경우의 수가 같으므로 경우의 수를 사용하여 계산하면

$$\text{i) } {}_2C_1 \times {}_1C_1 = 2 \text{ 가지}$$

$$\text{ii) } {}_1C_1 \times {}_1C_1 = 1 \text{ 가지,}$$

$$\text{iii) } {}_2C_1 \times {}_2C_1 = 4 \text{ 가지이므로}$$

$$\frac{4}{2+1+4} = \frac{4}{7}$$

$$\text{따라서 } p = 7, q = 4, p + q = 11$$

4-11. ④

주머니 A에서 꺼낸 공에 적힌 수 중 가장 큰 값에 따라서 가짓수를 구한다.

$$\text{i) 5일 때, } {}_4C_1 \times {}_4C_2 = 24$$

$$\text{ii) 4일 때, } {}_3C_1 \times {}_3C_2 = 9$$

$$\text{iii) 3일 때, } {}_2C_1 \times {}_2C_2 = 2 \text{ 이고,}$$

전체 가짓수는 ${}_5C_2 \times {}_5C_2 = 100$ 이므로

$$\frac{35}{100} = \frac{7}{20}$$

4-12. 10

X	1	2	3	계
$P(X=x)$	$\frac{1}{5}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{1}{5}$	1

$$E(X) = 2$$

$$E(X^2) = \frac{22}{5}, V(X) = \frac{2}{5} \text{ 이고 } V(5X+4) = 25V(X) \text{ 이므로}$$

10

<손풀이>

남2. 예4.

X	1	2	3
P	$\frac{1}{5}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{1}{5}$

$$P(X=1) = \frac{3}{6} \times \frac{2}{5} = \frac{1}{5}$$

$$P(X=2) = \frac{3}{6} \times \frac{3}{5} \times 2 = \frac{3}{5}$$

$$P(X=3) = \frac{3}{6} \times \frac{2}{5} = \frac{1}{5}$$

$$E(X) = 2$$

$$V(X) = \frac{1+12+9}{5} - 4 = \frac{22-20}{5} = \frac{2}{5}$$

$$\therefore V(X) = \boxed{10}$$

미적분

4-9. ③

$$\text{i) } a > b \text{ 일 때 } \frac{1}{a} = \frac{1}{28}, a = 28, b = 2, 3, \dots, 27$$

$$\text{ii) } a < b, \frac{1}{ab} = \frac{1}{28}, (a, b) = (2, 14), (4, 7)$$

$$\text{iii) } a = b, \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2a^n + 1}{a^{n+1} + a^{n+2}} = \frac{2}{a + a^2} = \frac{1}{28}, a = b = 7$$

$$\therefore 29$$

4-10. ①

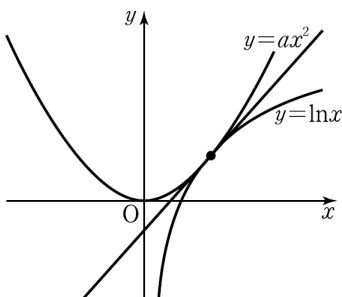
$$\begin{aligned} \int_1^4 t(t - \ln t) dt &= \int_1^4 t^2 dt - \left[\frac{1}{2} t^2 \ln t \right]_1^4 + \int_1^4 \frac{1}{2} t dt \\ &= \frac{99}{4} - 16 \ln 2 \end{aligned}$$

$$p = \frac{99}{4}, q = 16$$

$$\therefore 396$$

4-11. ②

$y = \ln x$ 는 점근선을 가지므로 $f(t)$ 는 $t = 0$ 인 점에서 불연속이다. t 가 0이 아닌 점에서 불연속 지점을 하나 더 가지므로 $y = ax^2$ 과 $y = \ln x$ 은 접한다.



접하는 점의 x 좌표를 p 라고 하면

$$\ln p = ap^2, 2ap = \frac{1}{p} \text{를 만족하므로}$$

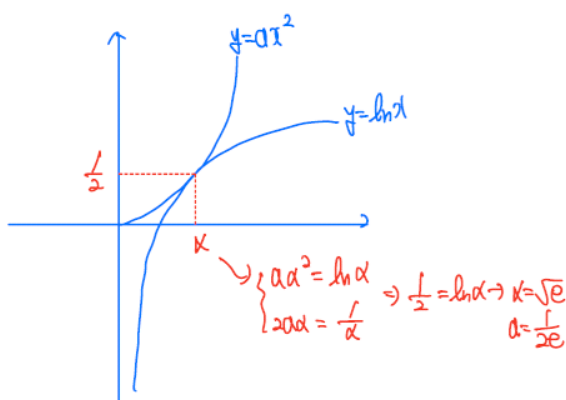
$$p = \sqrt{e}, a = \frac{1}{2e}$$

$$p = k_2 \text{이므로 } 0 + \sqrt{e} \times \frac{1}{2e} = \frac{1}{2\sqrt{e}}$$

<손풀이>

$ax^2 = \ln x$ 의 상의 계수로 case분류 해야 한다.

$$\textcircled{1} ax^2 = \ln x \rightarrow \text{상 } a$$



$$f(t) = \begin{cases} 0 & t \leq 0 \\ 2 & 0 < t < \alpha \\ 1 & t = \alpha \\ 2 & \alpha < t \end{cases}$$

$$\therefore k_1 = 0, \quad k_2 = \sqrt{e}, \quad a = \frac{1}{2e}$$

$$k_1 + k_2 \times a = \frac{1}{2\sqrt{e}}$$

4-12. 3

$f(x)$ 는 변곡점 $(0, 0)$ 을 지나는 접선 $y = \frac{\pi}{2}x$ 를 가지므로

$h(t)$ 는 $t \leq \frac{\pi}{2}$ 일 때 점 $(1, t)$ 를 지나고 $f(x)$ 에 접하는 직선의

기울기이다. $t > \frac{\pi}{2}$ 일 때 $h(t) = t$ 이다.

$t \leq \frac{\pi}{2}$ 일 때, $g(x)$ 와 $f(x)$ 의 접점의 x 좌표를 p 라고 하면

$$\begin{aligned} g(x) &= f'(p)(x-p) + f(p) \\ &= f'(p)(x-1) + f'(p) - pf'(p) + f(p) \text{ 이므로} \end{aligned}$$

$$\begin{cases} h(t) = \frac{\pi}{2} \cos \frac{\pi}{2} p \\ t = (1-p) \frac{\pi}{2} \cos \frac{\pi}{2} p + \sin \frac{\pi}{2} p \end{cases} \text{ 이다. 이를 } t \text{에 대해}$$

미분하면

$$\begin{cases} h'(t) = -\frac{\pi^2}{4} \sin \frac{\pi}{2} p \times \frac{dp}{dt} \\ 1 = (p-1) \frac{\pi^2}{4} \cos \frac{\pi}{2} p \times \frac{dp}{dt} \end{cases}$$

$$h(k) = \frac{\sqrt{2}\pi}{4} \text{ 일 때 } p = \frac{1}{2} \text{ 이고}$$

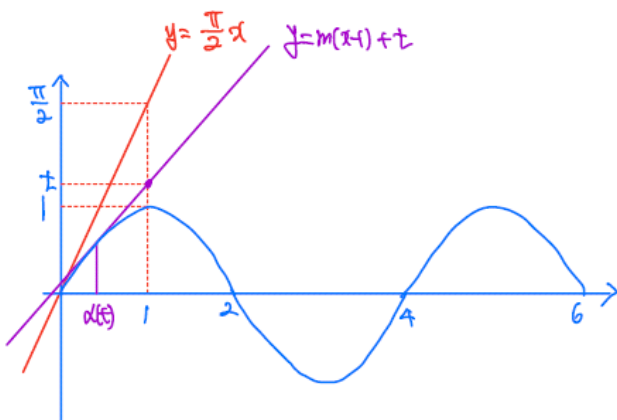
$$h'(t) = \frac{-\frac{\pi^2}{4} \sin \frac{\pi}{2} p}{(p-1) \frac{\pi^2}{4} \cos \frac{\pi}{2} p} = \frac{1}{1-p} \times \tan \frac{\pi}{2} p \text{ 이므로}$$

$$h'(k) = 2 \text{ 이다.}$$

$\pi > \frac{\pi}{2}$ 이므로 $f'(\pi) = 1$ 이다.

따라서, $h'(\pi) + h'(k) = 3$

<손풀이>



$$h(t) = \begin{cases} t & t > \frac{\pi}{2} \\ \frac{\pi}{2} \cos \frac{\pi}{2} \alpha(t) & 1 < t \leq \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

$$h'(t) = \begin{cases} 1 & t > \frac{\pi}{2} \\ -\frac{\pi^2}{4} \alpha'(t) \sin \frac{\pi}{2} \alpha(t) & 1 < t < \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

$$h'(\pi) = 1$$

$$\begin{cases} h(k) = \frac{\sqrt{2}}{4} \pi \rightarrow \cos \frac{\pi}{2} \alpha(k) = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \alpha(k) = \frac{1}{2} \\ t = \frac{\pi}{2} \cos \frac{\pi}{2} \alpha(t) \times (1 - \alpha(t)) + \sin \frac{\pi}{2} \alpha(t) \end{cases}$$

$$1 = -\frac{\pi^2}{4} \alpha'(t) \cdot \sin \frac{\pi}{2} \alpha(t) \times (1 - \alpha(t)) - \frac{\pi}{2} \cos \frac{\pi}{2} \alpha(t) \times (-\alpha'(t)) + \frac{\pi}{2} \alpha'(t) \cos \frac{\pi}{2} \alpha(t)$$

$$1 = -\frac{\pi^2}{4} \alpha'(k) \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \times (1 - \frac{1}{2}) + \frac{\pi}{2\sqrt{2}} \alpha'(k) + \frac{\pi}{2} \alpha'(k) \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\Rightarrow \alpha'(k) = -\frac{8\sqrt{2}}{\pi^2}$$

$$h'(k) = -\frac{\pi^2}{4} \alpha'(k) \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = 2$$

Day. 5

수학1, 수학2

5-1. ②

$$\frac{a_1 + a_2 + a_3 + a_4}{a_2 + a_3} = \frac{1}{r} + r = \frac{5}{2}, r \text{은 } 1 \text{보다 크므로 } r = 2$$

$$\frac{a_5 - 2a_1}{a_2} = r^3 - 1 = 7$$

5-2. ③

$x^2(x-3) = -k$ 의 서로 다른 실근의 개수가 3이 되도록 하는 k 의 범위는 $-4 < -k < 0, k = 1, 2, 3 \therefore 6$

5-3. ⑤

점 P의 속도를 v_p 라고 하고 점 Q의 속도를 v_q 라고 하면

$$v_p = t^2 - 4t + 3, v_q = t - 1$$

$v_p \times v_q < 0, 0 < t < 3$ 일 때 점 P, Q가 서로 반대방향으로 움직인다. 점 P가 움직인 거리는

$$\begin{aligned} & \int_0^3 |t^2 - 4t + 3| dt \\ &= \int_0^1 (t^2 - 4t + 3) dt - \int_1^3 (t^2 - 4t + 3) dt = \frac{8}{3} \end{aligned}$$

5-4. ③

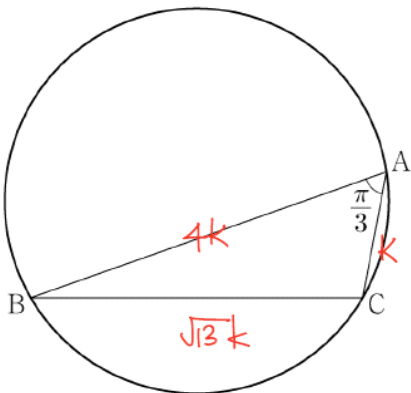
$$\text{사인법칙에 의해 } \overline{BC} = \frac{\sqrt{3}}{2} \times 2\sqrt{39} = 3\sqrt{13},$$

$\overline{AB} = 4k, \overline{AC} = k$ 라고 하면 코사인법칙에 의해

$$(3\sqrt{13})^2 = (4k)^2 + k^2 - 2 \times 4k \times k \times \frac{1}{2}, k = 3$$

$$(\text{삼각형 ABC의 넓이}) = \frac{1}{2} \times 12 \times 3 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 9\sqrt{3}$$

<손풀이>



$$\begin{aligned}\overline{BC} &= \sqrt{17k^2 - 4k^2} \\ &= \sqrt{13}k\end{aligned}$$

$$2\sqrt{39} = \frac{\sqrt{13}k}{\sin \frac{\pi}{3}} \Rightarrow k=3$$

$$\triangle ABC = 2 \times 9 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 9\sqrt{3}$$

5-5. ③

$$\sum_{k=1}^5 a_{2k-1} - \sum_{k=1}^4 (a_k - a_{2k})$$

$$= a_9 + \sum_{k=1}^4 (a_{2k-1} + a_{2k}) - \sum_{k=1}^4 a_k = \sum_{k=5}^9 a_k$$

$$a_{10} = 5 + a_5 \text{ 이므로 } \sum_{k=6}^{10} a_n = \sum_{k=5}^9 a_n + (a_{10} - a_5) = 8$$

<손풀이>

$$3 = \sum_{k=1}^5 a_{2k-1} + \sum_{k=1}^4 k$$

$$\therefore \sum_{k=1}^5 a_{2k-1} = -7$$

$$\sum_{k=6}^{10} a_k = a_6 + a_7 + a_8 + a_9 + a_{10}$$

$$\begin{aligned}&= a_3 + 3 + a_7 + \underline{a_4} + 4 + a_9 + a_5 + 5 \\ &\quad \quad \quad = 2 + a_2 \\ &\quad \quad \quad = 3 + a_1\end{aligned}$$

$$= a_1 + a_3 + a_5 + a_7 + a_9 + 15$$

$$= 8$$

5-6. 6

$$f'(x) = 3x^2 - 6x - 9 = 3(x-3)(x+1) \text{ 이므로}$$

$f(x)$ 그래프는 $-1 < x < 3$ 에서 감소한다.

(가) 조건을 만족시킬 때 $g(x)$ 는 증가함수이므로 $a \geq 3$ 이다.

$g(x)$ 는 연속하므로 $f(a) = b$ 를 만족하고

$$a + b = a + f(a) = a^3 - 3a^2 - 8a + 30 \text{ 이다.}$$

$a + f(a)$ 는 $a \geq 3$ 에서 증가하므로 $a = 3$ 일 때 최솟값 6을 갖는다.

<손풀이>

① $x=0$ 연속

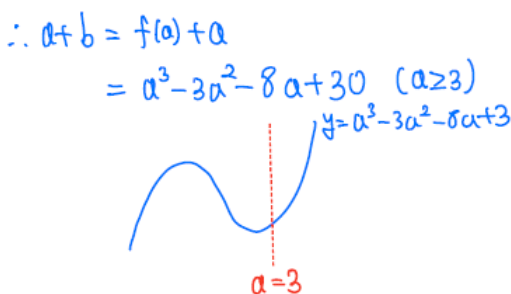
$$\underline{f(a) = b}$$

② $g(x)$ 가 증가함수

$$g(x) = \begin{cases} f'(x+a) & x > 0 \\ 1 & x < 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \underline{a \geq 3}$$

$$f'(x) = 3x^2 - 6x - 9$$

$$= 3(x-3)(x+1)$$



$$\therefore a+b \geq f(3) + 3 = 6$$

5-7. ③

i) $g(x)$ 는 실수 전체의 집합에서 연속하므로

$$-(2-a) + 16 = f(2) \text{이다.}$$

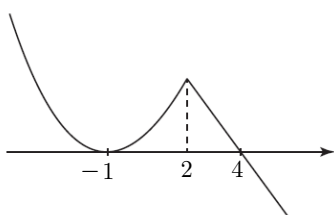
(가) 조건에서 $f(x)$ 는 감소함수이므로 $g(x)$ 는 $x < 2$ 에서 극솟값을 갖는다. 이차함수의 곡선은 꼭짓점의 좌표에서

$$\text{극솟값을 가지므로 } \frac{3+a}{2} < 2 \text{이고}$$

$$\frac{-3+a}{2} \times \frac{3-a}{2} + 16 = 0, \quad a = -5 \quad (\because a < 1) \text{이다.}$$

ii) $g(x) = g(4)$ 의 서로 다른 실근의 개수가 2이므로

$$g(-1) = g(4) \text{이다.}$$



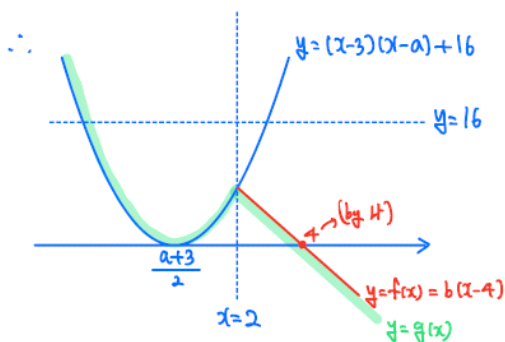
$$f(2) = 9, f(4) = 0 \text{이므로 } f(x) = -\frac{9}{2}x + 18$$

$$f(-2) + g(-2) = 27 + 1 = 28$$

<손풀이>

(가) $g(x)$: 극솟값을 갖고, $f(x)$: 감소함수이므로

$g(x)$ 의 극소는 $x < 2$ 에서 존재한다.



$$g(x): x=2 \text{ 에서 변곡} \rightarrow a+14 = -2b$$

$$g\left(\frac{a+3}{2}\right) = 0 \rightarrow a = -5$$

$$\therefore a = -5, b = -\frac{9}{2}$$

$$\therefore f(-2) + g(-2) = 27 + 1 = 28$$

5-8. ①

$y = a^{x+b} + 2b$, $y = \log_a(x+b) + 2b$ 는 각각

$y = a^x$, $y = \log_a x$ 가 x 축으로 $-b$ 만큼, y 축으로 $2b$ 만큼

이동한 것이므로 $y = a^x$ 와 $y = \log_a x$ 의 교점을 (p, p) 라고

하면 $(p-b, p+2b) = (0, 4)$ 이다. 따라서 $p = b = \frac{4}{3}$

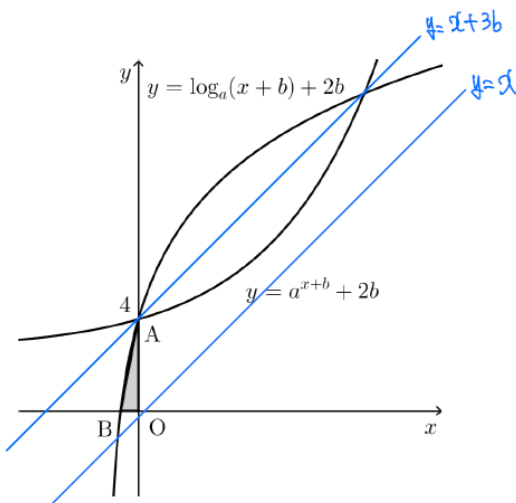
$(0, 4)$ 를 $y = \log_a\left(x + \frac{4}{3}\right) + \frac{8}{3}$ 에 대입하면 $a^{\frac{4}{3}} = \frac{4}{3}$ 임을 알 수 있다.

$y = \log_a(x+b) + 2b$ 와 x 축의 교점의 좌표를 k 라 하면

$$\log_a\left(k + \frac{4}{3}\right) + \frac{8}{3} = 0, k = a^{-\frac{8}{3}} - \frac{4}{3} = -\frac{37}{48} \text{이다.}$$

$$(\text{삼각형 AOB의 넓이}) = \frac{1}{2} \times 4 \times \frac{37}{48} = \frac{37}{24}$$

<손풀이>



$$\begin{cases} 3b=4 \Rightarrow b=\frac{4}{3} \\ a^b+2b=4 \end{cases} \Rightarrow a^{\frac{4}{3}} = \frac{4}{3}$$

$$\begin{aligned} \Delta AOB &= \frac{1}{2} \times (b - a^{2b}) \times 4 \\ &= \frac{1}{2} \times \left(\frac{4}{3} - \frac{9}{16} \right) \times 4 \\ &= \frac{37}{24} \end{aligned}$$

확률과 통계

5-9. ②

B를 가운데로 놓고 양 옆에 A, C를 세우는 경우의 수는 2
A, B, C를 한 묶음으로 두고 나머지를 세우는 경우의 수는
(6-1)! = 120

따라서 구하는 경우의 수는 $2 \times 120 = 240$

5-10. ②

- i) A상자에서 흰 공 1개, 검은 공 1개를 꺼내는 경우
A상자에서 흰 공 1개, 검은 공 1개를 꺼내는 확률은

$$\frac{{}_1C_1 \times {}_2C_1}{{}_3C_2} = \frac{2}{3}$$

이때 B상자에서 검은 공 2개를 꺼낼 확률은

$$\frac{{}_3C_2}{{}_5C_2} = \frac{3}{10} \text{ 이므로 } \frac{2}{3} \times \frac{3}{10} = \frac{1}{5}$$

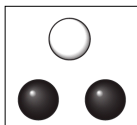
- ii) A상자에서 검은 공 2개를 꺼내는 경우

$$\text{A상자에서 검은 공 2개를 꺼낼 확률은 } \frac{{}_2C_2}{{}_3C_2} = \frac{1}{3}$$

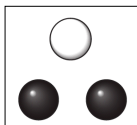
이때 B상자에 흰 공 1개, 검은 공 4개가 있게 되므로
B상자에서 검은 공 2개를 꺼낼 확률은

$$\frac{{}_4C_2}{{}_5C_2} = \frac{6}{10} = \frac{3}{5} \text{ 이므로 } \frac{1}{3} \times \frac{3}{5} = \frac{1}{5},$$

$$\text{따라서 구하는 확률은 } \frac{\frac{1}{5}}{\frac{1}{5} + \frac{1}{5}} = \frac{1}{2}$$



A



B

<손풀이>

7) A
바탕

B
(바탕 2
바탕 3)

$$\frac{2}{3} \times \frac{2/2}{5/2} = \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{5} = \frac{1}{5}$$

7) A
바탕

B
(바탕 1
바탕 4)

$$\frac{1}{3} \times \frac{4/2}{5/2} = \frac{1}{3} \cdot \frac{6}{5} = \frac{1}{5}$$

$$\frac{\frac{1}{5}}{\frac{1}{5} + \frac{1}{5}} = \left(\frac{1}{2}\right)$$

5-11. 154

$$f(30) = P(30 \leq X \leq 50)$$

$$f(90) = P(90 \leq X \leq 110) \text{ 이므로 } m = 70, \alpha = 60$$

$$\begin{aligned} f(60) &= P(60 \leq X \leq 80) = P\left(\frac{60-70}{5} \leq Z \leq \frac{80-70}{5}\right) \\ &= P(-2 \leq Z \leq 2) = 0.94 \end{aligned}$$

$$\text{따라서 } 100M + \alpha = 94 + 60 = 154$$

5-12. 136

조건(나)에 따라 a, b, c 가 등비수열을 이루는 경우를 먼저 찾아보면 $(1, 1, 1), (2, 2, 2), (3, 3, 3), (4, 4, 4), (1, 2, 4), (4, 2, 1)$ 이 있고 a, b, c, d, e, f 는 모두 자연수이므로 1 이상이다.

조건(가)에 따라 나머지 가짓수를 각각 계산하여 합해주면

$(1, 1, 1)$ 일 때 ${}_3H_9$,

$(2, 2, 2)$ 일 때 ${}_3H_6$, $(3, 3, 3)$ 일 때 ${}_3H_3$,

$(4, 4, 4)$ 일 때 ${}_3H_0$, $(1, 2, 4), (4, 2, 1)$ 일 때 ${}_3H_5 \times 2$

$$55 + 28 + 10 + 1 + 42 = 136$$

<손풀이>

a

$$b = ka$$

$$c = k^2 a$$

$$a(1+k+k^2) + d + e + f = 15$$

$$\begin{cases} k=1 & 3a + d + e + f = 15 \\ k=2 & 1a + d + e + f = 15 \end{cases}$$

$k=1$	$a=1$	$a=2$	$a=3$	$a=4$
	$d+e+f = 12$	9	6	3
	$3H_9$	$2H_6$	$3H_3$	1
	$1G_2 = 45$	$= 26$	$5G_2 = 10$	1

$k=2$	$a=1$	
	$d+e+f = 0$	
	$3H_5 = 1G_2 = 21$	

$\textcircled{x2} < \begin{array}{c} 123 \\ \hline 321 \end{array}$

136

미적분

5-9. ②

$x=0$ 을 대입하면 $e^{2y} - ke^y + 1 = 0$ 이다. 점 P, Q의 x 좌표를 각각 α , β 라고 하면 근의 공식에 의해

$$e^\alpha + e^\beta = k, \quad e^\alpha \times e^\beta = 1 \text{이다.}$$

곡선을 x 에 대해 미분하면

$$4x - ke^{x+y} + (-ke^{x+y} + 2e^{2y}) \frac{dy}{dx} = 0,$$

$$x=0 \text{일 때, } \frac{dy}{dx} = \frac{k}{-k+2e^y} \text{이므로 접선의 기울기의 곱은}$$

$$\frac{k}{-k+2e^\alpha} \times \frac{k}{-k+2e^\beta} = -2 \text{이다.}$$

$k^2 = -2(k^2 - 2ke^\alpha - 2ke^\beta + 4e^\alpha \times e^\beta)$ 이고 위에서 구한 값을 이용하면 $k^2 = 2k^2 - 8$, $k^2 = 8$, $k = 2\sqrt{2}$

<손풀이>

$$f(x) > x \quad (x > 0)$$

(by $\alpha > 0 \rightarrow x$: 평행한 양수일때 $f(x) > x$ 인 x 가 존재)

$$h(x) = f(x) - x > 0 \quad (x > 0) \text{ 이어야 한다.}$$

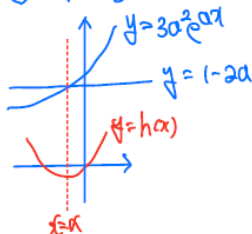
$$h'(x) = f'(x) - 1 = 3a^2 e^{ax} + 2a - 1$$

$$= 3a^2 e^{ax} - (1 - 2a)$$

$$\textcircled{1} a \geq \frac{1}{2}$$

$$h'(x) \geq 0 \text{ 이므로 성립}$$

$$\textcircled{2} 0 < a < \frac{1}{2}$$



$\Rightarrow \alpha \leq 0$ 이면 된다.

$$\therefore 3a^2 \geq 1 - 2a$$

$$3a^2 + 2a - 1 \geq 0$$

$$a \leq -1 \text{ or } a \geq \frac{1}{3}$$

5-10. ③

역함수는 $y = x$ 에 대해 대칭관계에 있으므로

$y = f(x)$, $y = g(x)$ 가 제1사분면에서 만나지 않으려면
 $f(x) > x$ ($x > 0$)를 만족해야 한다.

$$3a(e^{ax} - 1) + 2ax > x, \quad 3a(e^{ax} - 1) > (1 - 2a)x$$

곡선 $y = 3a(e^{ax} - 1)$ 과 직선 $y = (1 - 2a)x$ 의 그래프를 통해
 직선의 기울기는 곡선과 점 $(0, 0)$ 에서 접할 때
 최대임을 알 수 있다.

$$y' = 3a^2 e^{ax} \text{ 이므로 } 3a^2 \geq 1 - 2a, \quad a \leq -1 \text{ or } a \geq \frac{1}{3}$$

양수 a 의 최솟값은 $\frac{1}{3}$ 이다.

5-11. ④

(가)에서

$$\log(a_n \times a_{n+1} \times b_n) = 0, \quad a_n \times a_{n+1} \times b_n = 1 \text{ 이므로}$$

$$b_n = \frac{1}{a_n a_{n+1}} \text{ 이다.}$$

$$b_n = \frac{1}{a_{n+1} - a_n} \left(\frac{1}{a_n} - \frac{1}{a_{n+1}} \right) = \frac{1}{d} \left(\frac{1}{a_n} - \frac{1}{a_{n+1}} \right)$$

$$\text{(다)에서 } \sum_{n=1}^{\infty} b_n = \frac{1}{d} \times \frac{1}{a_1} = \frac{1}{8} \text{ 이고 } a_n \text{과 } d \text{ 모두 자연수이므로}$$

이를 만족하는 $a_1 = 2$, $d = 4$ 이다.

$$a_n = 4n - 2, \quad a_{10} = 38$$

5-12. 30

$x > 0$ 일 때 $f'(x) = \ln x + 1 + x - (t+1)$ 이고

$\ln x + x - t = 0$ 을 만족하는 $x = k$ 이다.

$\ln g(t) + g(t) = t$ 이므로 $g(t)$ 의 역함수를 $h(t)$ 라고 하면

$$h(t) = \ln t + t$$

$\int_{\alpha}^{\beta} g(t) dt$ 는 $t = h(t)$ 로 치환하면 문제에서

$h(1) = \alpha$, $h(7) = \beta$ 임이 주어졌으므로

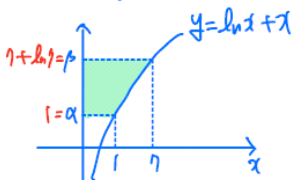
$$\int_1^7 g(h(t))h'(t)dt = \int_1^7 t\left(\frac{1}{t} + 1\right)dt = 30 \text{임을 알 수 있다.}$$

<손풀이>

$$f'(x) = \ln x + x - t$$

$$f'(g(t)) = 0 \rightarrow \ln(g(t)) + g(t) = t$$

$\therefore g(t)$ 는 $y = \ln x + x$ 의 역함수



$$\int_{\alpha}^{\beta} g(t) dt = 7\beta - \alpha - \int_1^7 \ln x + x dx$$

$$= 49 + 7\ln 7 - 1 - \left[x\ln x - x + \frac{1}{2}x^2 \right]_1^7$$

$$= 30$$