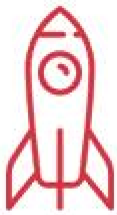
고3반
2020. 08. 29

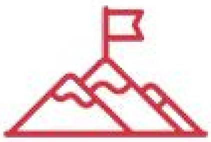
WORK BOOK #3

미적분 - 전범위



Passion

Challenge



Professional

Action

100人대장
'Quality Education Creation'

1. 두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$이

$$\lim_{n \to \infty} \frac{a_n}{2n} = 4, \quad \lim_{n \to \infty} \frac{n^2+2}{nb_n} = 2$$

을 만족시킬 때, $\lim_{n \to \infty} \frac{a_n}{b_n}$ 의 값은? (단, $b_n \neq 0$)

① 1　　② 2　　③ 4
④ 8　　⑤ 16

2. 두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$이

$$\lim_{n \to \infty} (2^n+1)a_n = 2, \ \lim_{n \to \infty} (4^n+1)b_n = 6$$

을 만족시킬 때, $\lim_{n \to \infty} \frac{(2^{n+1}-1)b_n}{a_n}$ 의 값은? (단, $a_n \neq 0$)

① 2　　② 4　　③ 6
④ 8　　⑤ 10

3. 2 이상의 자연수 n에 대하여 $(x+1)^n$을 x^2-9로 나눈 나머지를 $R(x)$라 할 때, $\lim_{n\to\infty}\frac{R(1)}{2^n+4^n}$의 값은?

① $\frac{1}{3}$ ② $\frac{2}{3}$ ③ 1
④ $\frac{4}{3}$ ⑤ $\frac{5}{3}$

4. 자연수 m에 대하여 $\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\frac{m}{4}\right)^{2n+1}}{\left(\frac{m}{4}\right)^{2n}+2}$의 값을 a_m이라 하자. $\sum_{m=1}^{8} a_m=\frac{q}{p}$일 때, $p+q$의 값을 구하시오.(단, p, q는 서로소인 자연수이다.)

5. 수열 $\{a_n\}$에 대하여 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(na_n - \frac{n^2+1}{3n+1}\right)$이 수렴할 때, $\lim_{n\to\infty} 60a_n$의 값을 구하시오.

6. 수열 $\{a_n\}$에 대하여 <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

〈보 기〉

ㄱ. $\lim_{n\to\infty} a_{2n}$이 수렴하면 $\lim_{n\to\infty} a_n$도 수렴한다.

ㄴ. $\lim_{n\to\infty} a_n$이 수렴하면 $\lim_{n\to\infty} a_{2n} = \lim_{n\to\infty} a_{2n-1}$이다.

ㄷ. 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$이 수렴하면 $\sum_{n=1}^{\infty} a_{2n}$ 도 수렴한다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

7. <보기>에서 수렴하는 것만을 있는 대로 고른 것은?

〈 보 기 〉

ㄱ. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^{n+1}}{2^{2n-1}}$

ㄴ. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{n+1} - \frac{n+1}{n+2} \right)$

ㄷ. $1 + \frac{1+2}{2^2} + \frac{1+2+3}{3^2} + \frac{1+2+3+4}{4^2} + \cdots$

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

8. 모든 항이 양수인 두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$에서 일반항 a_n과 b_n은 각각 n에 대한 이차식이다. $\lim_{n \to \infty} \frac{a_n}{b_n} = 1$일 때, <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

〈 보 기 〉

ㄱ. $\lim_{n \to \infty} \frac{\sqrt{a_n + 3}}{\sqrt{b_n + 1}} = 1$

ㄴ. $\lim_{n \to \infty} \frac{a_n - n^2}{b_n - n^2} = 2$이면 $\lim_{n \to \infty} \frac{a_n - b_n}{a_n - n^2} = \frac{1}{2}$이다.

ㄷ. 수열 $\{a_n - b_n\}$이 수렴하면
$\lim_{n \to \infty} \left(\sqrt{a_n} - \sqrt{b_n} \right) = 0$이다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

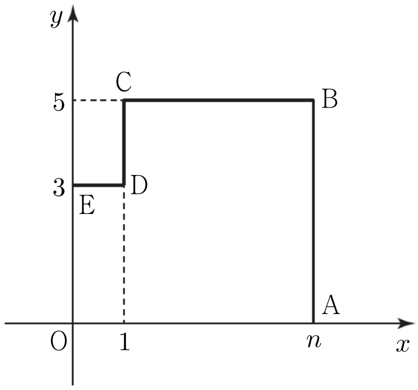
9. 자연수 n에 대하여

$$0 < a_1 < a_2 < a_3 < \ \cdots \ < a_{2n-1} < a_{2n} < 6n+6$$

을 만족시키는 $2n$개의 홀수 $a_1,\ a_2,\ a_3,\ \cdots\ , a_{2n-1},\ a_{2n}$에 대하여 $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k$의 최솟값을 m_n, $\displaystyle\sum_{k=n+1}^{2n} a_k$의 최댓값을 M_n이라 하자. $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{M_n}{m_n}$의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

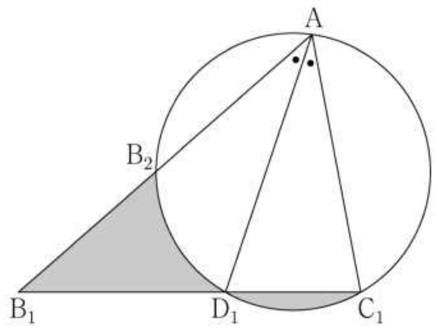
10. 그림과 같이 다섯 개의 점 $\mathrm{A}(n,\ 0)$, $\mathrm{B}(n,\ 5)$, $\mathrm{C}(1,\ 5)$, $\mathrm{D}(1,\ 3)$, $\mathrm{E}(0,\ 3)$과 원점 O를 직선으로 연결하여 만든 도형의 넓이를 점 A를 지나는 직선 l이 이등분할 때, 직선 l의 기울기를 m_n이라고 하자. $\displaystyle\sum_{n=4}^{\infty}\frac{m_n(n-1)+5}{n}$의 값은?
(단, n은 $n \geq 4$인 자연수이다.)



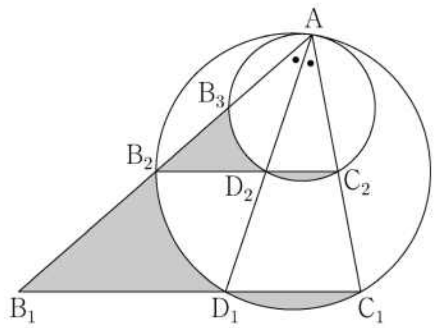
① 1 ② $\dfrac{1}{2}$ ③ $\dfrac{1}{3}$
④ $\dfrac{1}{4}$ ⑤ $\dfrac{1}{5}$

11. 그림과 같이 $\overline{AB_1}=3$, $\overline{AC_1}=2$이고 $\angle B_1AC_1=\dfrac{\pi}{3}$인 삼각형 AB_1C_1이 있다. $\angle B_1AC_1$의 이등분선이 선분 B_1C_1과 만나는 점을 D_1, 세 점 A, D_1, C_1을 지나는 원이 선분 AB_1과 만나는 점 중 A가 아닌 점을 B_2라 할 때, 두 선분 B_1B_2, B_1D_1과 호 B_2D_1로 둘러싸인 부분과 선분 C_1D_1과 호 C_1D_1로 둘러싸인 부분인 모양의 도형에 색칠하여 얻은 그림을 R_1이라 하자.
그림 R_1에서 점 B_2를 지나고 직선 B_1C_1에 평행한 직선이 두 선분 AD_1, AC_1과 만나는 점을 각각 D_2, C_2라 하자.
세 점 A, D_2, C_2를 지나는 원이 선분 AB_2와 만나는 점 중 A가 아닌 점을 B_3이라 할 때, 두 선분 B_2B_3, B_2D_2와 호 B_3D_2로 둘러싸인 부분과 선분 C_2D_2와 호 C_2D_2로 둘러싸인 부분인 모양의 도형에 색칠하여 얻은 그림을 R_2라 하자.
이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 그림 R_n에 색칠되어 있는 부분의 넓이를 S_n이라 할 때, $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$의 값은? [4점]

R_1



R_2



⋮　　　　⋮

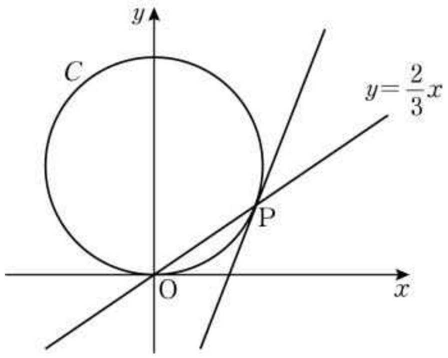
① $\dfrac{27\sqrt{3}}{46}$　② $\dfrac{15\sqrt{3}}{23}$　③ $\dfrac{33\sqrt{3}}{46}$
④ $\dfrac{18\sqrt{3}}{23}$　⑤ $\dfrac{39\sqrt{3}}{46}$

12. 함수 $f(x)=1+\dfrac{1}{x}$에 대하여

$\lim\limits_{n\to-\infty}\left\{\dfrac{1}{n}f(1)f(2)\cdots f(n)\right\}^{-n}$의 값은?

① $\dfrac{1}{e}$　② $\sqrt{e}$　③ e
④ $2e$　⑤ e^2

13. 그림과 같이 원점에서 x 축에 접하는 원 C 가 있다. 원 C 와 직선 $y=\frac{2}{3}x$ 가 만나는 점 중 원점이 아닌 점을 P 라 할 때, 원 C 위의 점 P 에서의 접선의 기울기는?



① $\frac{4}{3}$　② $\frac{8}{5}$　③ $\frac{28}{15}$

④ $\frac{32}{15}$　⑤ $\frac{12}{5}$

14. 연속함수 $f(x)$가 $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{1-\cos(x^2)}=2$를 만족시킬 때, $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x^p}=q$이다. $p+q$의 값은?

(단, $p>0,\ q>0$이다.)

① 4　② 5　③ 6

④ 7　⑤ 8

15. 실수 전체의 집합에서 미분가능한 함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) 임의의 두 실수 $x_1,\ x_2$에 대하여 $x_1 \neq x_2$이면
> $f(x_1) \neq f(x_2)$이다.
>
> (나) $f(3) = 1,\ f'(3) = \dfrac{1}{3}$

다항함수 $g(x)$가 모든 실수 x에 대하여

$f(x^2 - g(x)) = \dfrac{1}{2}x$를 만족시킬 때, $g'(2)$의 값은?

① 1　　② $\dfrac{3}{2}$　　③ 2

④ $\dfrac{5}{2}$　　⑤ 3

16. 실수 전체의 집합에서 증가하고 미분가능한 함수 $f(x)$에 대하여 $g(x) = f^{-1}(x)$를 만족하고,

$h^{-1}(x) = f(e^x + 2)$를 만족하는 함수 $h(x)$가 존재한다.

$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{h(x) - 1}{x} = 3$을 만족할 때, $g'(0)$의 값은?

① e　　② $2e$　　③ $3e$

④ $4e$　　⑤ $5e$

17. 두 연속함수 $f(x)$, $g(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

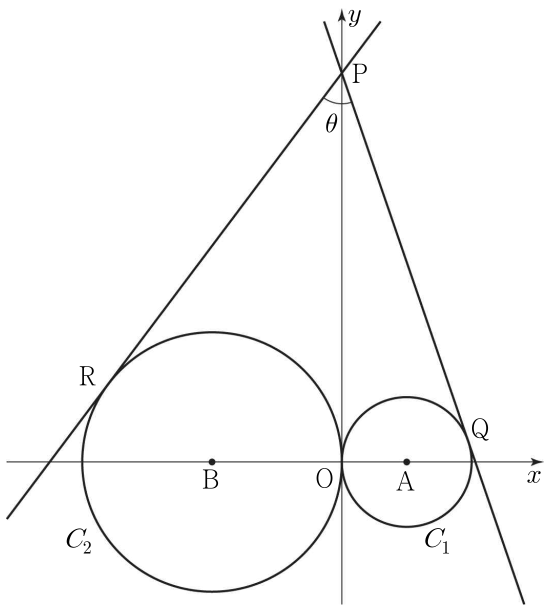
(가) $f(0)=0$
(나) $x \neq 0$이면 $f(x)>0$
(다) $\lim_{x\to0}\dfrac{\ln\{1+f(x)\}}{g(x)}=2$

$\lim_{x\to0}\dfrac{e^{g(x)}-1}{f(x)}$ 의 값은?

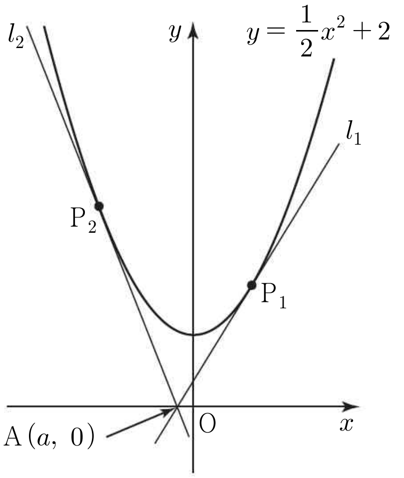
① 0 ② $\frac{1}{4}$ ③ $\frac{1}{3}$

④ $\frac{1}{2}$ ⑤ 1

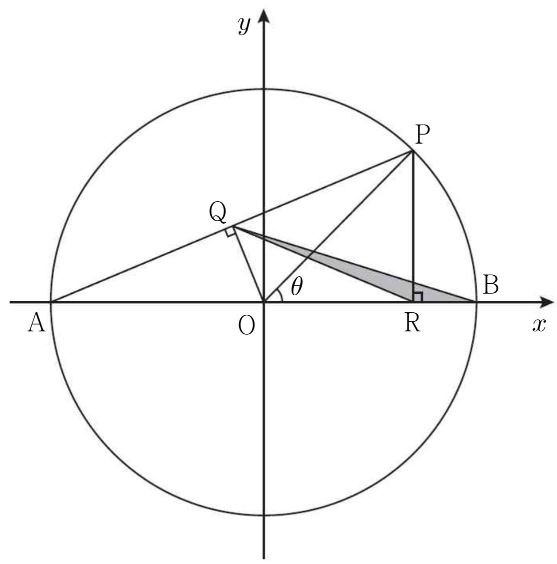
18. 그림과 같이 중심이 점 $\mathrm{A}(1,\,0)$이고 반지름의 길이가 1인 원 C_1과 중심이 점 $\mathrm{B}(-2,\,0)$이고 반지름의 길이가 2인 원 C_2가 있다. y축 위의 점 $\mathrm{P}(0,\,a)\,(a>\sqrt{2})$에서 원 C_1에 그은 접선 중 y축이 아닌 직선이 원 C_1과 접하는 점을 Q, 원 C_2에 그은 접선 중 y축이 아닌 직선이 원 C_2와 접하는 점을 R라 하고 $\angle\mathrm{RPQ}=\theta$라 하자. $\tan\theta=\frac{4}{3}$일 때, $(a-3)^2$의 값을 구하시오.



19. 그림과 같이 x축 위의 한 점 $\mathrm{A}(a,\ 0)$에서 곡선 $y=\frac{1}{2}x^2+2$에 그은 두 접선을 $l_1,\ l_2$라 하고, 그 때의 두 접점을 각각 $\mathrm{P}_1,\ \mathrm{P}_2$라 하자. 직선 l_2가 x축의 양의 방향과 이루는 각을 이등분하는 직선이 l_1일 때, 두 직선 $l_1,\ l_2$의 기울기의 차가 k이다. k^2의 값을 구하시오. (단, $a<0$)



20. 그림과 같이 원 $x^2+y^2=1$ 위의 점 P에 대하여 선분 OP가 x축의 양의 방향과 이루는 각의 크기를 $\theta\left(0<\theta<\frac{\pi}{2}\right)$라 하자. 점 $\mathrm{A}(-1,\ 0)$에 대하여 원점 O에서 선분 AP에 내린 수선의 발을 Q, 점 P에서 x축에 내린 수선의 발을 R이라 하자. 점 $\mathrm{B}(1,\ 0)$에 대하여 삼각형 BQR의 넓이를 $S(\theta)$라 할 때, $\lim_{\theta \to 0+}\frac{S(\theta)}{\theta^3}$의 값은?

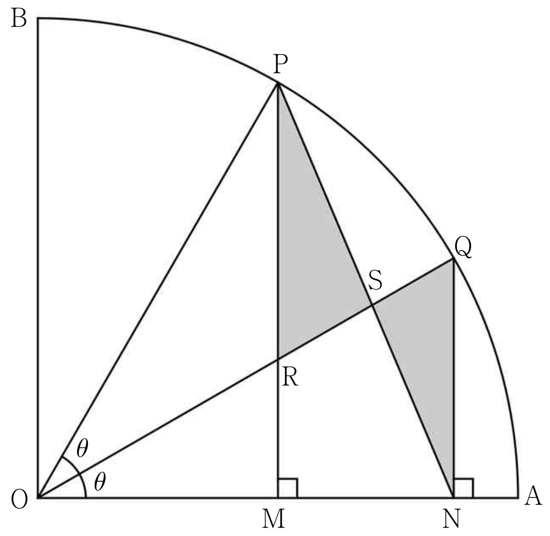


① $\frac{1}{16}$ ② $\frac{1}{8}$ ③ $\frac{1}{4}$

④ $\frac{1}{2}$ ⑤ 1

21. 그림과 같이 반지름의 길이가 1이고 중심각의 크기가 $\frac{\pi}{2}$인 부채꼴 OAB가 있다. 호 AB 위의 점 P에 대하여 각 AOP를 이등분하는 직선과 호 AP의 교점을 Q, 두 점 P, Q에서 선분 OA에 내린 수선의 발을 각각 M, N, 두 선분 PM과 OQ의 교점을 R, 두 선분 PN과 OQ의 교점을 S라 하자. $\angle \mathrm{POA}=2\theta$일 때, 삼각형 PRS의 넓이를 $S_1(\theta)$, 삼각형 QNS의 넓이를 $S_2(\theta)$라 하자.

$\lim\limits_{\theta \to 0+} \dfrac{S_1(\theta)-S_2(\theta)}{\theta^5}$ 의 값은? (단, $0<\theta<\frac{\pi}{4}$)



① $\frac{1}{8}$ ② $\frac{3}{8}$ ③ $\frac{5}{8}$
④ $\frac{7}{8}$ ⑤ $\frac{9}{8}$

22. 함수 $f(x)=(x^2+ax+b)e^x$과 함수 $g(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) $f(1)=e$, $f'(1)=e$
> (나) 모든 실수 x에 대하여 $g(f(x))=f'(x)$이다.

함수 $h(x)=f^{-1}(x)g(x)$에 대하여 $h'(e)$의 값은?
(단, a, b는 상수이다.)

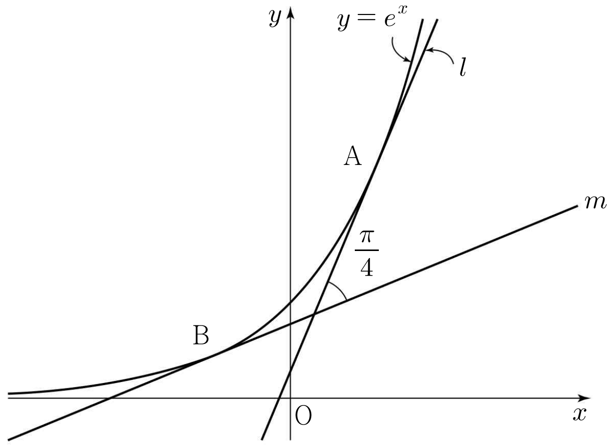
① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

23. 다음 조건을 만족시키는 함수 $f(x)$의 역함수를 $g(x)$라 하자.

> (가) $f(2g(x)-3^{kx}+5)=x$
> (나) $f(4)=1$

$\dfrac{g'(2)}{g'(0)}$의 값을 구하시오.

24. 그림과 같이 곡선 $y=e^x$ 위의 두 점 $\mathrm{A}(t,\ e^t)$, $\mathrm{B}(-t,\ e^{-t})$에서의 접선을 각각 l, m이라 하자. 두 직선 l과 m이 이루는 예각의 크기가 $\dfrac{\pi}{4}$일 때, 두 점 A, B를 지나는 직선의 기울기는? (단, $t>0$)



① $\dfrac{1}{\ln(1+\sqrt{2})}$ ② $\dfrac{1}{\ln 2}$ ③ $\dfrac{4}{3\ln(1+\sqrt{2})}$ ④ $\dfrac{7}{6\ln 2}$ ⑤ $\dfrac{3}{2\ln(1+\sqrt{2})}$

25. 자연수 n에 대하여 함수 $y=\frac{1}{ne}x$의 그래프와 함수 $y=\frac{\ln|x|}{|x|}$의 그래프가 만나는 점의 개수를 $f(n)$이라 할 때, $f(1)+f(2)+f(3)$의 값은?

① 2 ② 3 ③ 4
④ 5 ⑤ 6

26. 실수 t와 양수 a에 대하여 직선 $x=t$가 두 곡선 $y=ax^2$, $y=\ln x$와 만나는 서로 다른 점의 개수를 함수 $f(t)$라 하자. 함수 $f(t)$가 오직 $t=k_1$, $t=k_2(k_1<k_2)$에서만 불연속일 때, $k_1+k_2\times a$의 값은?

① $\frac{1}{\sqrt{e}}$ ② $\frac{1}{2\sqrt{e}}$ ③ $\frac{1}{3\sqrt{e}}$
④ $\frac{1}{4\sqrt{e}}$ ⑤ $\frac{1}{5\sqrt{e}}$

27. 실수 k와 실수 t에 대여 직선 $y=x+t$와 함수 $y=-\dfrac{64}{x}$의 그래프가 만나는 점의 개수를 $f(t)$, 직선 $y=x+t$와 함수 $y=x^3-kx$의 그래프가 만나는 점의 개수를 $g(t)$, 함수 $h(t)=f(t)+g(t)$라 하자. 함수 $h(t)$가 모든 실수 t에 대하여 연속일 때, k의 값은?

① 8 ② 9 ③ 10
④ 11 ⑤ 12

28. 자연수 n에 대하여 함수 $f(x)=(x-n)e^{-x}$일 때, 수열 $\{a_n\}$을 다음과 같이 정의한다.

> 실수 a에 대하여 $\dfrac{f(a)-f(t)}{a-t}=f'(a)$를
> 만족시키는 서로 다른 실수 t의 개수를 $g(a)$라 하자.
> 함수 $g(x)$가 $x=c$에서 불연속일 때, 모든 c의 값의 합을 a_n이라 한다.

$\displaystyle\sum_{n=1}^{10} a_n$의 값을 구하시오. $\left(단, \displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{x}{e^x}=0\right)$

29. 곡선 $y = kx^2 + kx + \sin 3x$의 변곡점이 존재하도록 하는 정수 k의 개수는?

① 5 ② 6 ③ 7
④ 8 ⑤ 9

30. 양수 a와 실수 b에 대하여 함수 $f(x) = ae^{3x} + be^x$이 다음 조건을 만족시킬 때, $f(0)$의 값은?

(가) $x_1 < \ln\dfrac{2}{3} < x_2$를 만족시키는 모든 실수 x_1, x_2에 대하여 $f''(x_1)f''(x_2) < 0$이다.

(나) 구간 $[k, \infty)$에서 함수 $f(x)$의 역함수가 존재하도록 하는 실수 k의 최솟값을 m이라 할 때, $f(2m) = -\dfrac{80}{9}$이다.

① -15 ② -12 ③ -9
④ -6 ⑤ -3

31. $0 < t < 1$인 실수 t에 대하여 함수 $f(x) = \ln(x^2+1) - tx + t$ 의 모든 극값의 합을 $g(t)$라고 할 때, $g'\left(\frac{1}{4}\right)$의 값은?

① -10 ② -9 ③ -8
④ -7 ⑤ -6

32. 함수 $f(x) = \dfrac{x^2}{x^2+1}$ 에 대하여 <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

〈 보 기 〉

ㄱ. 모든 실수 x에 대하여 $f(-x) = f(x)$이다.

ㄴ. 모든 실수 x에 대하여 $f'(x) \le \dfrac{1}{2}$이다.

ㄷ. 방정식 $f'(x) = \dfrac{k}{x}$ $(k > 0)$을 만족하는 실근의 개수를 $g(k)$라 하면 함수 $g(k)$의 치역의 원소의 개수는 3이다.

① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

33. 함수 $f(x)=k-\dfrac{6x^2}{x^2+2x+3}$ 에 대여 함수 $|f(x)|$의 최댓값과 최솟값의 합이 8이하가 되도록 하는 모든 정수 k의 값의 합을 구하시오.

34. 닫힌 구간 $[0, 2\pi]$ 에서 x 에 대한 방정식 $\sin x-x\cos x-k=0$ 의 서로 다른 실근의 개수가 2 가 되도록 하는 모든 정수 k 의 값의 합은?

① -6 ② -3 ③ 0
④ 3 ⑤ 6

35. x에 대한 방정식

$$\frac{\ln|x|}{x} = \frac{\ln|k|}{k}$$

가 서로 다른 두 실근을 갖도록 하는 서로 다른 실수 k의 개수는?

(단, $\lim_{x \to \infty} \frac{\ln x}{x} = 0$이고, e는 자연로그의 밑이다.)

① 2 ② 3 ③ 4
④ 5 ⑤ 6

36. -1과 1을 제외한 모든 실수 x에서 미분가능한 함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 모든 실수 x에 대하여 $f(-x) = -f(x)$이다.
(나) $\lim_{x \to 1-} f(x) = f(1) = -1$이고
$\lim_{x \to 1+} f(x) = 1$이다.
(다) $x \neq 1$인 모든 양수 x에 대하여 $f'(x) < 0$이다.

<보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

〈 보 기 〉

ㄱ. 함수 $f(x)$의 그래프는 직선 $y = x$와 한 점에서 만난다.
ㄴ. 함수 $f(x)$의 그래프는 x축과 세 점에서 만난다.
ㄷ. $f'(\alpha) = -1$인 실수 α가 적어도 두 개 존재한다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄴ, ㄷ

37. 최고차항의 계수가 양수인 이차함수 $f(x)$ 에 대하여

$$g(x)=\int_0^x tf(t)\,dt$$

라 할 때, <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

< 보 기 >

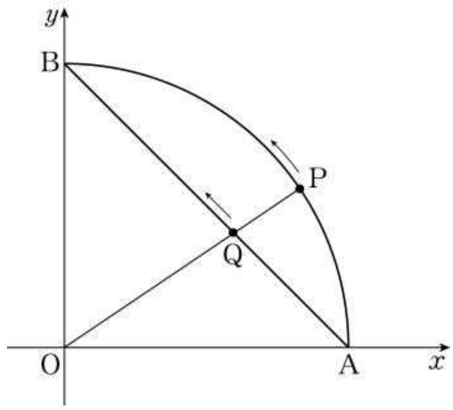
ㄱ. $g'(0)=0$

ㄴ. 양수 α 에 대하여 $g(\alpha)=0$ 이면 방정식 $f(x)=0$ 은 열린 구간 $(0,\ \alpha)$ 에서 적어도 하나의 실근을 갖는다.

ㄷ. 양수 β 에 대하여 $f(\beta)=g(\beta)=0$ 이면 모든 실수 x 에 대하여 $\int_\beta^x tf(t)dt \geq 0$ 이다.

① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

38. 원점 O 를 중심으로 하고 두 점 $\mathrm{A}(1,\ 0)$, $\mathrm{B}(0,\ 1)$ 을 지나는 사분원이 있다. 그림과 같이 점 P 는 점 A 에서 출발하여 호 AB 를 따라 점 B 를 향하여 매초 1 의 일정한 속력으로 움직인다. 선분 OP 와 선분 AB 가 만나는 점을 Q 라 하자. 점 P 의 x 좌표가 $\frac{4}{5}$ 인 순간 점 Q 의 속도는 $(a,\ b)$ 이다. $b-a$ 의 값은?



① $\frac{2}{49}$ ② $\frac{8}{49}$ ③ $\frac{18}{49}$

④ $\frac{32}{49}$ ⑤ $\frac{50}{49}$

39. 두 함수 $f(x)$, $g(x)$는 실수 전체의 집합에서 도함수가 연속이고 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 모든 실수 x에 대하여 $f(x)g(x)=x^4-1$이다. (나) $\int_{-1}^{1}\{f(x)\}^2 g'(x)\,dx=120$

$\int_{-1}^{1}x^3 f(x)\,dx$의 값은?

① 12　② 15　③ 18
④ 21　⑤ 24

40. 양의 실수 전체의 집합에서 정의된 미분가능한 함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $f(2)=2$ (나) 모든 양의 실수 x에 대하여 $\dfrac{f(x)}{x^2}=-f'(x)$이다.

$\int_{1}^{2}\frac{f'(x)}{x}dx$의 값은?

① $-2\ln 2$　② $-\ln 2$　③ -1
④ $-e$　⑤ $-e^2$

41. 음이 아닌 실수 전체의 집합에서 정의된 함수

$$f(x)=\int_0^x \frac{1}{t^3+1}\,dt$$

에 대하여 $\int_0^1 x^2\{f(x)-2f(1)\}dx$의 값은?

① $-\frac{1}{2}$ ② $-\frac{1}{3}$ ③ 0
④ $\frac{1}{3}$ ⑤ $\frac{1}{2}$

42. 실수 t와 연속함수 $f(x)$에 대하여 함수

$$g(x)=\int_x^{x+1}\{f(t-x)+5x\}dt$$

이다. $g(3)=27$일 때, $\int_0^1 f(x)dx$의 값은?

① 11 ② 12 ③ 13
④ 14 ⑤ 15

43. 연속함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족한다.

(가) $f(-x)=f(x)$
(나) $\int_{1}^{2} xf(x)dx=12$
(다) $2\int_{-2}^{2} f(x)dx=\int_{-1}^{1} f(x)dx$

$\int_{0}^{x} f(t)dt=F(x)$라 할 때, $\int_{-1}^{2} F(x)dx$의 값은?

① -18　② -12　③ 6
④ 12　⑤ 18

44. $x>0$ 인 실수 x 에 대하여 함수 $f(x)$ 가
$\dfrac{f'(x)}{x}-\dfrac{f(x)}{x^2}=\cos\sqrt{x}$, $f(\pi^2)=0$ 을 만족할 때,
$f\left(\dfrac{\pi^2}{4}\right)$ 의 값은?

① $\dfrac{\pi^2(\pi+2)}{4}$　② $\dfrac{\pi^2(\pi+3)}{4}$　③ $\dfrac{\pi^2(\pi+9)}{4}$
④ $\dfrac{\pi^2(\pi+2)}{3}$　⑤ $\dfrac{\pi^2}{2}$

45. 함수 $f(x)=\int_0^x \sin(\pi\cos t)\,dt$ 에 대하여

<보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

〈 보 기 〉

ㄱ. $f'(0)=0$
ㄴ. 함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 원점에 대하여 대칭이다.
ㄷ. $f(\pi)=0$

① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

46. 함수 $f(x)=\dfrac{e^{\cos x}}{1+e^{\cos x}}$ 에 대하여

$$a=f(\pi-x)+f(x),\ \ b=\int_0^\pi f(x)\,dx$$

일 때, $a+\dfrac{100}{\pi}b$ 의 값을 구하시오.

47. 함수 $f(x)=\ln(\sin x+2)$에 대하여

$$\int_0^{\pi} f(x)dx = a$$

라 하자. 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은?

< 보 기 >

ㄱ. $\int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 f(\pi - x)dx$

ㄴ. $\int_0^{\pi} f(x)\cos x\, dx = a$

ㄷ. $\int_0^{\pi} xf(x)dx = \frac{\pi}{2}\times a$

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

48. $\frac{3}{5} < x < 4$에서 정의된 미분가능한 함수 $f(x)$가 $f(1)=2$이고

$$f'(x)=\frac{1-x^2\{f(x)\}^3}{x^3\{f(x)\}^2}$$

을 만족시킨다. 함수 $f(x)$의 역함수 $g(x)$가 존재하고 미분가능할 때, <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

< 보 기 >

ㄱ. $g'(2)=-\frac{4}{7}$

ㄴ. $g(x)=\frac{1}{3}x^3\{g(x)\}^3-\frac{5}{3}$

ㄷ. $2 < g(1) < \frac{5}{2}$

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

49. 양의 실수 전체의 집합에서 미분가능하고, 역함수가 존재하는 함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) $x \geq 2$인 모든 실수 x에 대하여
> $f'(x) > 0,\ f'(x)f^{-1}(x) = (x-2)e^x$이다.
> (나) $f(2e^2) = 4,\ f(4) = \dfrac{1}{2}e^2$

$\displaystyle\int_2^4 \frac{f(x)}{f'(f^{-1}(x))}dx$의 값은?

① $-2e^2$　② $-e^2$　③ 0
④ e^2　⑤ $2e^2$

50. 정의역이 $[0,\ \infty)$인 함수 $f(x)$와 모든 실수 x에 대하여 $g(x) > 0$이고 $g(0) = e$을 만족하는 함수 $g(x)$에 대하여

$$f(x)g(x) = e^x,\ f(x)g'(x) = e^{2x}$$

가 성립한다. <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

< 보 기 >

ㄱ. $f'(x)g(x) = e^x - e^{2x}$
ㄴ. $f(\ln 2) = \dfrac{2}{e^2}$
ㄷ. $\displaystyle\int_{\frac{1}{e}}^{\frac{2}{e^2}} (g \circ f^{-1})(x)dx = -\frac{1}{2}$

① ㄱ　② ㄱ, ㄴ　③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ　⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

51. 이계도함수가 연속인 함수 $f(x)$와 그 역함수 $g(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $f(2)=7,\ f(3)=5,\ f(5)=3$
(나) 방정식 $g''(x)=0$의 근은 $x=5$ 하나뿐이고, 모든 실수 x에 대하여 $f'(x)\neq 0$이다.
(나) $\displaystyle\int_{2}^{5} f(x)dx=\frac{43}{3},\ \int_{5}^{7} g(x)dx=\frac{14}{3}$

$\displaystyle\int_{2}^{5}\left|f(x)+\frac{3}{2}x-\frac{19}{2}-\frac{1}{2}|x-3|\right|dx$의 값은?

① $\frac{2}{3}$ ② 1 ③ $\frac{4}{3}$
④ $\frac{5}{3}$ ⑤ 2

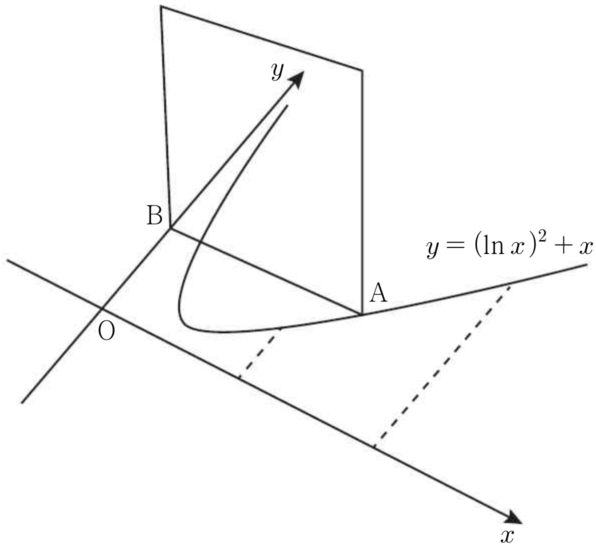
52. 실수 전체의 집합에서 정의된 함수

$$f(x)=\int_{-1}^{x}(t-t^2)e^t dt$$

의 극댓값과 극솟값의 차는 $p+qe$ 이다. 두 유리수 $p,\ q$에 대하여 p^2+q^2의 값을 구하시오.

53. 함수 $f(x)=\int_{-2}^{2}\left|t^2e^{|t|}-x\right|dt$가 $x=k$에서 극솟값을 갖는다. $kf''(k)=\frac{q}{p}$일 때, $p+q$의 값을 구하시오. (단, p, q는 서로소인 자연수이다.)

54. 그림과 같이 함수 $f(x)=(\ln x)^2+x$에 대하여 좌표평면 위의 두 점 $\mathrm{A}(x,\ f(x))$, $\mathrm{B}(0,\ f(x))$를 이은 선분을 한 변으로 하는 정사각형을 y축에 수직인 평면 위에 그린다. 점 A의 x좌표가 $x=1$에서 $x=e$까지 변할 때, 이 정사각형이 만드는 입체도형의 부피는 pe^3+qe^2+r이다. $p+q+r$의 값을 구하시오. (단, e는 자연로그의 밑이고, p, q, r은 유리수이다.)



빠른 정답

1. ⑤
2. ③
3. ②
4. 47
5. 20
6. ②
7. ③
8. ⑤
9. ⑤
10. ①
11. ①
12. ①
13. ⑤
14. ②
15. ④
16. ③
17. ④
18. 11
19. 18
20. ②
21. ②
22. ④
23. 81
24. ①
25. ⑤
26. ②
27. ④
28. 140
29. ⑤
30. ③
31. ⑤
32. ④
33. 36
34. ⑤
35. ⑤
36. ④
37. ⑤
38. ⑤
39. ②
40. ③
41. ②
42. ②
43. ②
44. ①
45. ⑤
46. 51
47. ③
48. ⑤
49. ②
50. ⑤
51. ②
52. 10
53. 7
54. 1

100人대장
'Quality Education Creation'

정답 및 해설(미적분-해설)

1. ⑤

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{a_n}{n}\times\frac{n}{b_n}\right)$$
$$=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{a_n}{2n}\times\frac{n^2+2}{nb_n}\times\frac{2n^2}{(n^2+2)}\right)$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{2n}\times\lim_{n\to\infty}\frac{n^2+2}{nb_n}\times\lim_{n\to\infty}\frac{2n^2}{n^2+2}$$
$$=4\times 2\times 2=16$$

2. ③

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(2^{n+1}-1)b_n}{a_n}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\left\{\frac{(4^n+1)b_n}{(2^n+1)a_n}\times\frac{(2^n+1)(2^{n+1}-1)}{4^n+1}\right\}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{(4^n+1)b_n}{(2^n+1)a_n}\times\lim_{n\to\infty}\frac{\left(1+\frac{1}{2^n}\right)\left(2-\frac{1}{2^n}\right)}{1+\frac{1}{4^n}}$$
$$=\frac{6}{2}\times 2=6$$

3. ②

$x^2-9=(x+3)(x-3)$이므로 $(x+1)^n$을 x^2-9로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지를 $R(x)=ax+b$라 하면

$(x+1)^n=(x+3)(x-3)Q(x)+ax+b$ …… ㉠

㉠에 $x=-3$을 대입하면

$(-2)^n=-3a+b$ …… ㉡

㉠에 $x=3$을 대입하면

$4^n=3a+b$ …… ㉢

㉡, ㉢을 연립하여 풀면

$a=\dfrac{4^n-(-2)^n}{6}$, $b=\dfrac{4^n+(-2)^n}{2}$

따라서 $R(x)=\dfrac{4^n-(-2)^n}{6}x+\dfrac{4^n+(-2)^n}{2}$ 이고

$$R(1)=\frac{4^n-(-2)^n}{6}+\frac{4^n+(-2)^n}{2}$$
$$=\frac{2\cdot 4^n+(-2)^n}{3}$$
$$\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{R(1)}{2^n+4^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{2\cdot 4^n+(-2)^2}{3(2^n+4^n)}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{2+\left(-\frac{1}{2}\right)^n}{3\left\{\left(\frac{1}{2}\right)^n+1\right\}}=\frac{2+0}{3(0+1)}=\frac{2}{3}$$

4. 47

(ⅰ) $0<\dfrac{m}{4}<1$, 즉 $0<m<4$일 때,

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{m}{4}\right)^{2n}=0,\quad \lim_{n\to\infty}\left(\frac{m}{4}\right)^{2n+1}=0 \text{ 이므로}$$

$$a_m=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\frac{m}{4}\right)^{2n+1}}{\left(\frac{m}{4}\right)^{2n}+2}=\frac{0}{0+2}=0$$

$\therefore\ a_m=0\ (m=1,\ 2,\ 3)$

(ii) $\frac{m}{4}=1$, 즉 $m=4$일 때,

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{m}{4}\right)^{2n}=1,\quad \lim_{n\to\infty}\left(\frac{m}{4}\right)^{2n+1}=1 \text{ 이므로}$$

$$a_m=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\frac{m}{4}\right)^{2n+1}}{\left(\frac{m}{4}\right)^{2n}+2}=\frac{1}{1+2}=\frac{1}{3}$$

$\therefore\ a_m=\frac{1}{3}\ (m=4)$

(iii) $\frac{m}{4}>1$, 즉 $m>4$일 때,

$\therefore\ a_m=\frac{m}{4}\ (m=5,\ 6,\ 7,\ \cdots)$

$$\therefore\ \sum_{m=1}^{8}a_m=\sum_{m=1}^{3}a_m+a_4+\sum_{m=5}^{8}a_m=0+\frac{1}{3}+\sum_{m=5}^{8}\frac{m}{4}$$

$$=\frac{1}{3}+\frac{13}{2}=\frac{41}{6}$$

5. 20

$\sum_{n=1}^{\infty}\left(na_n-\frac{n^2+1}{3n+1}\right)$ 이 수렴하므로

$$\lim_{n\to\infty}\left(na_n-\frac{n^2+1}{3n+1}\right)=0$$

$b_n=na_n-\frac{n^2+1}{3n+1}$ 로 놓으면 $\lim_{n\to\infty}b_n=0$ 이고

$$a_n=\frac{b_n}{n}+\frac{n^2+1}{3n^2+1}$$

$$\therefore\ \lim_{n\to\infty}60a_n=60\lim_{n\to\infty}\left(\frac{b_n}{n}+\frac{n^2+1}{3n^2+1}\right)$$

$$=60\left(0+\frac{1}{3}\right)=20$$

6. ②

ㄱ. (반례) 수열 $1,\ 0,\ 1,\ 0,\ 1,\ 0,\ \cdots$에서

$\lim_{n\to\infty}a_{2n}=0$으로 수렴하지만 $\lim_{n\to\infty}a_n$은 발산한다. (거짓)

ㄴ. $\lim_{n\to\infty}a_n$이 수렴하면 $\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}a_{n-1}$이므로

$\lim_{n\to\infty}a_{2n}=\lim_{n\to\infty}a_{2n-1}$ (참)

ㄷ. (반례) 수열 $-1,\ 1,\ -\frac{1}{2},\ \frac{1}{2},\ -\frac{1}{3},\ \frac{1}{3},\ \cdots$에서

$\sum_{n=1}^{\infty}a_n=0$으로 수렴하지만 $\sum_{n=1}^{\infty}a_{2n}=\infty$이므로 발산한다. (거짓)

7. ③

8. ⑤

ㄱ. $\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{a_n+3}}{\sqrt{b_n+1}}=1$ (참)

ㄴ. $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n-n^2}{b_n-n^2}=2$이고, $p\neq 0$일 때,

$a_n=n^2+2pn+q,\ b_n=n^2+pn+q'$

이면

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n-b_n}{a_n-n^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{pn+q-q'}{2pn+q}=\frac{1}{2}$$

또한

$a_n=n^2+2q,\ b_n=n^2+q$

이면

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n-b_n}{a_n-n^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{q}{2q}=\frac{1}{2}\ \text{(참)}$$

ㄷ. 수열 $\{a_n-b_n\}$가 수렴하면

$a_n=pn^2+qn+r,\ b_n=pn^2+qn+r'$ 으로 놓을 수 있다.

$$\lim_{n\to\infty}(\sqrt{a_n}-\sqrt{b_n})=\lim_{n\to\infty}\frac{r-r'}{\sqrt{pn^2+qn+r}+\sqrt{pn^2+qn+r'}}$$

$=0$ (참)

옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

9. ⑤

$m_n=1+3+5+\cdots+(2n-1)=n^2$

$M_n=(4n+7)+(4n+9)+\cdots+(6n+5)=5n^2+6n$

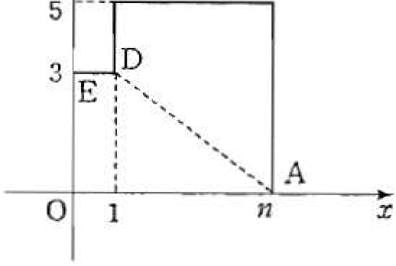
$$\lim_{n\to\infty}\frac{5n^2+6}{n^2}=5$$

10. ①

S(육각형의 넓이)$=3\times1+(n-1)\times5=5n-2$

두 점 $A,\ D$를 연결하면

(사각형 $OADE$의 넓이)$=\frac{1}{2}\times(1+n)\times3=\frac{3(n+1)}{2}$



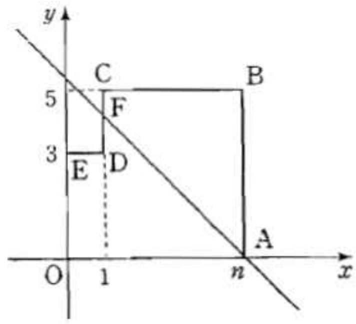
$\frac{1}{2}S-$(사각형 $OADE$의 넓이)

$=\frac{5n-2}{2}-\frac{3(n+1)}{2}=\frac{2n-5}{2}>0$ $(\because n\ge 4)$ 이므로

구하는 직선은 육각형과 선분 CD에서 만난다.

직선 l이 $\overline{CD}$와 만나는 점을 F라 하자. 직선 l의 방정식을 $y=m_n(x-n)$이라 하면 (점F의 y좌표)$=m_n(1-n)$이다.

따라서 점 F는 $(1,\ m_n(1-n))$이다.



기울기 m_n을 n으로 나타내기

S(육각형의 넓이)$=$(사다리꼴 $ABCF$의 넓이)$\times 2$

$5n-2=2\times\frac{1}{2}\times[\{5-m_n(1-n)+5\}]\times(n-1)$

$5n-2=\{m_n(n-1)+10\}\times(n-1)$

$5(n-1)+3=m_n(n-1)^2+10(n-1)$

$5+\frac{3}{n-1}=m_n(n-1)+10$ $(\because\ n\ge 4)$

$\therefore\ m_n=\frac{3}{(n-1)^2}-\frac{5}{n-1}$

$\frac{m_n(n-1)+5}{n}=\frac{3}{n(n-1)}$ 이므로

$\sum_{n=4}^{\infty}\frac{m_n(n-1)+5}{n}=\sum_{n=4}^{\infty}\frac{3}{n(n-1)}$ 이다.

따라서,

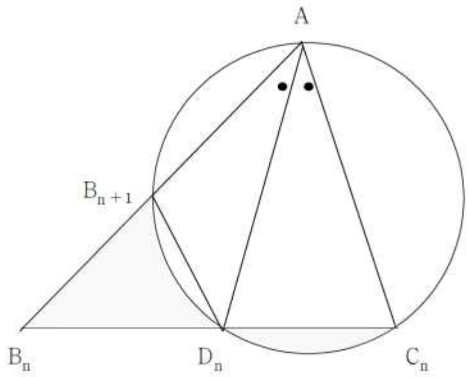
$$S_n=\sum_{k=4}^{n}\frac{3}{k(k-1)}=3\sum_{k=4}^{n}\left(\frac{1}{k-1}-\frac{1}{k}\right)$$
$$=3\left\{\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{5}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n-2}-\frac{1}{n-1}\right)+\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}\right)\right\}$$
$$=3\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{n}\right)$$

$$\therefore\sum_{n=4}^{\infty}\frac{m_n(n-1)+5}{n}=\sum_{n=4}^{\infty}\frac{3}{n(n-1)}=\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}3\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{n}\right)=1$$

11. ①

그림 R_n에서 $\angle B_{n+1}AD_n=\angle D_nAC_n$이므로 $\overset{\frown}{B_{n+1}D_n}=\overset{\frown}{D_nC_n}$ 이다.

따라서 $\overline{B_{n+1}D_n}=\overline{D_nC_n}$ 이므로 두 선분 B_nB_{n+1}, B_nD_n과 호 $B_{n+1}D_n$으로 둘러싸인 부분과 선분 C_nD_n과 호 C_nD_n으로 둘러싸인 부분의 넓이의 합은 삼각형 $B_nD_nB_{n+1}$의 넓이와 같다.



R_n

그림 R_1의 삼각형 AB_1C_1에서 코사인법칙에 의하여

$\therefore\overline{B_1C_1}^2=3^2+2^2-2\times3\times2\times\cos\frac{\pi}{3}=7$

즉, $\overline{B_1C_1}=\sqrt{7}$

또한, $\angle B_1AC_1$의 이등분선이 선분 B_1C_1과 만나는 점이 D_1이므로

$\overline{AB_1}:\overline{AC_1}=\overline{B_1D_1}:\overline{D_1C_1}=3:2$

따라서

$\overline{B_1D_1}=\frac{3\sqrt{7}}{5}$, $\overline{D_1C_1}=\frac{2\sqrt{7}}{5}$

또한, 삼각형 AD_1C_1의 외접원의 중심을 O라 하면

$\angle D_1OC_1=\angle B_2OD_1=\frac{\pi}{3}$이므로

두 삼각형 D_1OC_1, B_2OD_1은 모두 정삼각형이고

$\angle B_2D_1C_1=\frac{2}{3}\pi$이다.

따라서 $\angle B_2D_1B_1=\frac{\pi}{3}$ 이므로

$S_1=\frac{1}{2}\times\frac{3\sqrt{7}}{5}\times\frac{2\sqrt{7}}{5}\times\sin\frac{\pi}{3}=\frac{21\sqrt{3}}{50}$

또한, 삼각형 $B_1D_1B_2$ 에서 코사인법칙에 의하여

$$\overline{B_1B_2}^2=\left(\frac{3\sqrt{7}}{5}\right)^2+\left(\frac{2\sqrt{7}}{5}\right)^2-2\times\frac{3\sqrt{7}}{5}\times\frac{2\sqrt{7}}{5}\times\cos\frac{\pi}{3}$$
$$=\frac{91}{25}-\frac{42}{25}=\frac{49}{25}$$

이므로

$\therefore\overline{B_1B_2}=\frac{7}{5}$

따라서 $\overline{AB_2}=3-\frac{7}{5}=\frac{8}{5}$ 이므로

$\overline{AB_1}:\overline{AB_2}=3:\frac{8}{5}=1:\frac{8}{15}$

이때, 넓이의 비는 $1:\frac{64}{225}$ 이므로

$$\therefore\lim_{n\to\infty}S_n=\frac{\frac{21\sqrt{3}}{50}}{1-\frac{64}{225}}=\frac{27\sqrt{3}}{46}$$

12. ①

$f(x)=1+\frac{1}{x}=\frac{x+1}{x}$ 이므로

$\frac{1}{n}f(1)f(2)\cdots f(n)$

$=\frac{1}{n}\left(\frac{2}{1}\cdot\frac{3}{2}\cdot\cdots\cdot\frac{n+1}{n}\right)$

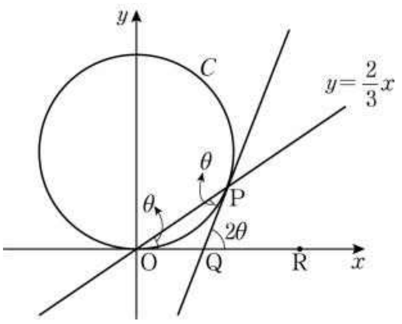
$=\frac{1}{n}\cdot(n+1)=\frac{n+1}{n}=1+\frac{1}{n}$

$\therefore \lim_{n\to-\infty}\left\{\frac{1}{n}f(1)f(2)\cdots f(n)\right\}^{-n}$

$=\lim_{n\to\infty}\left\{\left(1-\frac{1}{n}\right)^{-n}\right\}^{-1}=\mathbf{\frac{1}{e}}$

13. ⑤

원 C 위의 점 P에서의 접선이 x축과 만나는 점을 Q라 하고,
그림과 같이 x축에 점 R를 잡자.
(단, 점 R의 x좌표는 점 Q의 x좌표보다 크다.)
점 Q에서 원 C에 그은 두 접선 OQ, PQ에 대하여
$\overline{OQ}=\overline{PQ}$ 이므로
$\angle POQ=\theta$라 하면
$\angle POQ=\angle QPO=\theta$ 이고 $\angle PQR=2\theta$이다.



이때 $\tan\theta=\frac{2}{3}$ 이므로

원 C 위의 점 P에서의 접선PQ 의 기울기는

$\tan 2\theta=\frac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta}$

$=\frac{2\times\frac{2}{3}}{1-\left(\frac{2}{3}\right)^2}=\frac{12}{5}$

14. ②

$\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{1-\cos(x^2)}=\lim_{x\to0}\frac{f(x)\{1+\cos(x^2)\}}{\{1-\cos(x^2)\}\{1+\cos(x^2)\}}$

$=\lim_{x\to0}\frac{2\cdot f(x)}{\sin^2(x^2)}$

$=\lim_{x\to0}\frac{(x^2)^2}{\sin^2(x^2)}\cdot\frac{2\cdot f(x)}{(x^2)^2}$

$=2\cdot\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{x^4}=2$

따라서 $\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{x^4}=1$이므로 $\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{x^p}=q$를 반드시 만족하는

상수 p, q는 $p=4$, $q=1$일 때이다.

15. ④

$f(x^2-g(x))=\frac{1}{2}x$의 양변에 $x=2$를 대입하면

$f(4-g(2))=1$

(가)에서 함수 $f(x)$가 일대일 대응이고, (나)에서 $f(3)=1$이므로

$4-g(2)=3$

$\therefore g(2)=1$

$f(x^2-g(x))=\frac{1}{2}x$에서 양변을 x에 대하여 미분하면

$f'(x^2-g(x))\times\{4-g'(2)\}=\frac{1}{2}$

$x=2$를 대입하면

$f'(4-g(2))\times\{2x-g'(x)\}=\frac{1}{2}$ 이므로

$f'(3)\times\{4-g'(2)\}=\frac{1}{2}$

$\frac{1}{3}\times\{4-g'(2)\}=\frac{1}{2}$

$4-g'(2)=\frac{3}{2}$

$\therefore g'(2)=\frac{5}{2}$

16. ③

$f(e^{h(x)}+2)=x$

$f^{-1}(x)=g(x)$ 이므로 $g(x)=e^{h(x)}+2$

$g'(x)=h'(x)e^{h(x)}$

$\lim_{x\to0}\frac{h(x)-1}{x}=3$이므로 $h(0)=1$, $h'(0)=3$

$\therefore g'(0)=h'(0)e^{h(0)}=3e$

17. ④

$f(x)$가 연속함수이고 $f(0)=0$이므로 $\lim_{x\to0}f(x)=0$

이때, $f(x)=t$라 하면

$\lim_{x\to0}\frac{\ln\{1+f(x)\}}{f(x)}=\lim_{t\to0}\frac{\ln(1+t)}{t}=1$

(다)에서

$\lim_{x\to0}\frac{\ln\{1+f(x)\}}{g(x)}=\lim_{x\to0}\left[\frac{\ln\{1+f(x)\}}{f(x)}\cdot\frac{f(x)}{g(x)}\right]=2$이므로

$\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{g(x)}=2$ …… ①

①에서 0이 아닌 극한값이 존재하고 $\lim_{x\to0}f(x)=0$이므로

$\lim_{x\to0}g(x)=0$

$g(x)=k$라 하면

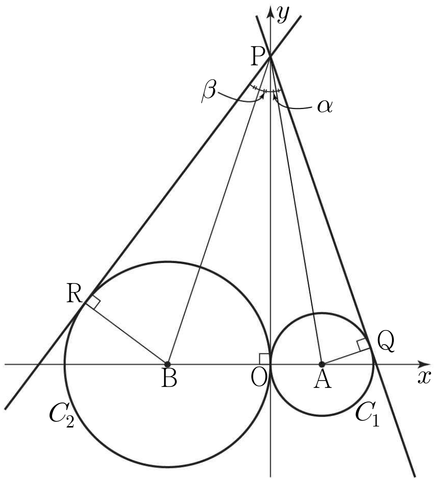
$$\lim_{x\to0}\frac{e^{g(x)}-1}{g(x)}=\lim_{k\to0}\frac{e^{k}-1}{k}=1 \cdots\cdots ②$$

$$\therefore \lim_{x\to0}\frac{e^{g(x)}-1}{f(x)}=\lim_{x\to0}\left\{\frac{e^{g(x)}-1}{g(x)}\cdot\frac{g(x)}{f(x)}\right\}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{e^{g(x)}-1}{g(x)}\cdot\lim_{x\to0}\frac{g(x)}{f(x)}$$

$$=1\times\frac{1}{2}=\frac{1}{2}\ (\because ①,\ ②)$$

18. 11



원점을 O, $\angle OPA=\alpha$, $\angle BPO=\beta$라 하자.
삼각형 POA와 삼각형 PQA가 서로 합동이고
삼각형 PRB와 삼각형 POB가 서로 합동이므로
$\angle APQ=\angle OPA$, $\angle RPB=\angle BPO$
$\angle RPQ=\theta=2(\alpha+\beta)$이므로

$$\tan\theta=\tan2(\alpha+\beta)$$

$$=\frac{\tan(\alpha+\beta)+\tan(\alpha+\beta)}{1-\tan(\alpha+\beta)\times\tan(\alpha+\beta)}=\frac{4}{3}$$

이때, $\tan(\alpha+\beta)=t$라 두면

$\frac{2t}{1-t^2}=\frac{4}{3}$, $2t^2+3t-2=0$

$a>\sqrt{2}$에서 $0<\theta<\pi$이므로 $0<\alpha+\beta<\frac{\pi}{2}$

$\therefore\ t=\tan(\alpha+\beta)=\frac{1}{2}$

$\tan\alpha=\frac{1}{a}$, $\tan\beta=\frac{2}{a}$

$$\tan(\alpha+\beta)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}=\frac{3a}{a^2-2}=\frac{1}{2}$$

$a^2-6a-2=0$, $a=3+\sqrt{11}$
따라서 $(a-3)^2=11$

19. 18

두 접선 l_1, l_2가 곡선 $y=\frac{1}{2}x^2+2$와 만나는 두 점의 x좌표를 각각 t_1, t_2라 하자.

$f(x)=\frac{1}{2}x^2+2$, $f'(x)=x$

$x=t$에서 함수 $y=f(x)$의 접선의 방정식은

$$y=f'(t)(x-t)+f(t)=t(x-t)+\frac{1}{2}t^2+2$$

$$=tx-\frac{1}{2}t^2+2$$

직선 $y=tx-\frac{1}{2}t^2+2$이 점 $(a,0)$을 지나므로

$0=at-\frac{1}{2}t^2+2$, $t^2-2at-4=0$

따라서 이차방정식 $t^2-2at-4=0$의 두 근이 t_1, t_2이다.
한편, 두 접선 l_1, l_2의 기울기는 각각 t_1, t_2이고
이차방정식 $t^2-2at-4=0$의 근과 계수의 관계에 의해
$t_1t_2=-4$이다.
직선 l_1이 x축의 양의 방향과 이루는 각의 크기를 θ라 하면 직선 l_2가 x축의 양의 방향과 이루는 각의 크기는 2θ이다.

$$t_1=\tan\theta,\ t_2=\tan2\theta=\frac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta}=\frac{2t_1}{1-(t_1)^2}$$

$$t_1t_2=\frac{2(t_1)^2}{1-(t_1)^2}=-4,$$

$-4\{1-(t_1)^2\}=-4+4(t_1)^2=2(t_1)^2$,

$(t_1)^2=2$, $t_1=\sqrt{2}$ ($\because\ t_1>0$)

$t_2=-\frac{4}{t_1}=-\frac{4}{\sqrt{2}}=-2\sqrt{2}$이므로

$|t_1-t_2|=|\sqrt{2}-(-2\sqrt{2})|=3\sqrt{2}$

$\therefore\ k=3\sqrt{2}$이므로 $k^2=18$

20. ②

선분 OR의 길이는 $\cos\theta$이므로 선분 BR의 길이는 $1-\cos\theta$이다.
점 Q에서 x축에 내린 수선의 발을 점 C라 하자.

$\angle OAQ=\frac{\theta}{2}$이므로 선분 OQ의 길이는

$\sin\frac{\theta}{2}$이고,

$\angle OQC=\frac{\theta}{2}$이므로 선분 QC의 길이는

$\sin\frac{\theta}{2}\times\cos\frac{\theta}{2}$이다.

따라서 삼각형 BQR의 넓이는

$$\frac{1}{2}(1-\cos\theta)\left(\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}\right)$$

$$\therefore \lim_{\theta\to0+}\frac{S(\theta)}{\theta^3}=\lim_{\theta\to0+}\frac{(1-\cos\theta)\left(\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}\right)}{2\theta^3}=\frac{1}{8}$$

21. ②

$S_1(\theta)-S_2(\theta)=\frac{1}{2}\overline{\mathrm{MN}}\,\overline{\mathrm{PM}}-\frac{1}{2}\overline{\mathrm{MN}}(\overline{\mathrm{RM}}+\overline{\mathrm{QN}})=\frac{1}{2}\overline{\mathrm{MN}}$
$(\overline{\mathrm{PM}}-\overline{\mathrm{RM}}-\overline{\mathrm{QN}})$

$=\frac{1}{2}(\cos\theta-\cos 2\theta)(\sin 2\theta-\cos 2\theta\tan\theta-\sin\theta)$

$=\frac{1}{2}(1+\cos\theta-2\cos^2\theta)(\tan\theta-\sin\theta)$

$=\frac{1}{2}(1+2\cos\theta)(1-\cos\theta)\tan\theta(1-\cos\theta)$

$\lim_{\theta\to 0+}\frac{S_1(\theta)-S_2(\theta)}{\theta^5}=\frac{3}{8}$

22. ④

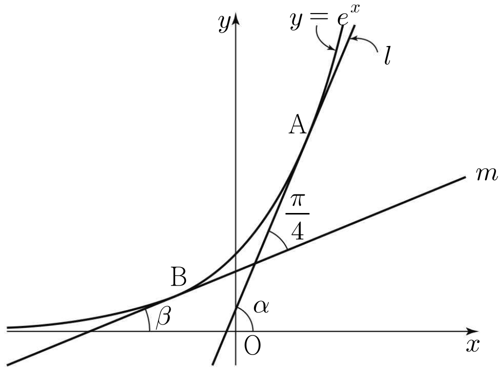
$f(1)=(1+a+b)e$
$=e$에서
$a+b=0$ …… ㉠
$f'(x)=\{x^2+(a+2)x+a+b\}e^x$ 이므로
$f'(1)=\{1+(a+2)+a+b\}e$
$=e$에서
$2a+b=-2$ …… ㉡
㉠, ㉡에서
$a=-2,\ b=2$
$f(x)=(x^2-2x+2)e^x$에서
$f'(x)=x^2e^x$
$f''(x)=x(x+2)e^x$이므로
$f''(1)=3e$
이때 모든 실수 x에 대하여 $f'(x)\ \geq 0$이므로
함수 $f(x)$는 역함수가 존재한다.
$f(1)=e$에서 $f^{-1}(e)=1$이므로
역함수의 미분법에 의하여
$(f^{-1})'(e)=\frac{1}{f'(1)}=\frac{1}{e}$
한편 $g(f(1))=f'(1)$, 즉 $g(e)=e$이고
$g(f(x))=f'(x)$의 양변을 x에 대하여 미분하면
$g'(f(x))f'(x)=f''(x)$ …… ㉢
㉢의 양변에 $x=1$을 대입하면
$g'(f(1))f'(1)=f''(1)$
$g'(e)\times e=3e$
$g'(e)=3$
따라서 $h'(e)=(f^{-1})'(e)g(e)+f^{-1}(e)g'(e)$
$=\frac{1}{e}\times e+1\times 3=4$

23. 81

함수 $f(x)$의 역함수가 $g(x)$이므로 $f(g(x))=x$가 성립한다.
조건 (가)에 의해 $f(2g(x)-3^{kx}+5)=x$이므로
$g(x)=2g(x)-3^{kx}+5$
$\therefore\ g(x)=3^{kx}-5$
조건 (나)에 의해 $f(4)=1$이므로 $g(1)=4$
$3^k-5=4$
$\therefore\ k=2$
따라서 $g(x)=3^{2x}-5$
$g'(x)=3^{2x}\cdot\ln 3\cdot 2$
$\frac{g'(2)}{g'(0)}=\frac{81\cdot 2\ln 3}{2\ln 3}=81$

24. ①

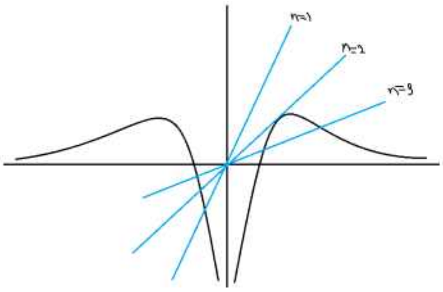
$y'=e^x$이므로 곡선 $y=e^x$ 위의
두 점 $\mathrm{A}(t,\ e^t)$, $\mathrm{B}(-t,\ e^{-t})$에서의
접선 l, m의 기울기는 각각 e^t, e^{-t}이다.



두 직선 l, m이 x축의 양의 방향과 이루는
각의 크기를 각각 α, β라 하면
$\tan\alpha=e^t$, $\tan\beta=e^{-t}$
$\tan\frac{\pi}{4}=\tan(\alpha-\beta)$
$=\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}$
$=\frac{e^t-e^{-t}}{1+e^te^{-t}}=1$
$e^t-e^{-t}=2$
$(e^t)^2-2e^t-1=0$
$e^t>0$이므로 $e^t=1+\sqrt{2}$
$\therefore\ t=\ln(1+\sqrt{2})$
따라서 직선 AB의 기울기는
$\frac{e^t-e^{-t}}{t-(-t)}=\frac{1}{\ln(1+\sqrt{2})}$

25. ⑤

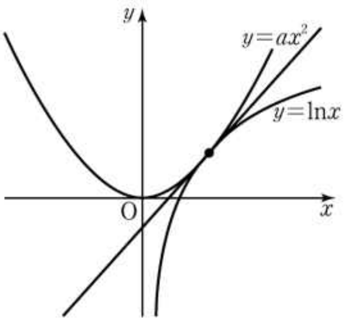
두 함수 $y=\frac{\ln x}{x}$, $y=mx$가 서로 접할 때의 기울기 m을 구하면
접점을 t로 두고, $\frac{\ln t}{t}=mt$, $\frac{1-\ln t}{t^2}=m$을 만족하므로
$m=\frac{1}{2e}$이다.



즉 $f(1)+f(2)+f(3)=1+2+3=6$

26. ②

함수 $f(t)$ 가 $t=k$ 에서 불연속이 되도록 하는 k 의 개수가 2 이려면 두 곡선 $y=ax^2$, $y=\ln x$ 가 그림과 같이 오직 한 점에서 만나야 한다.



즉, $at^2=\ln t$ $\cdots\cdots$ ㉠

$y=ax^2$ 에서 $y'=2ax$ 이고, $y=\ln x$ 에서 $y'=\dfrac{1}{x}$ 이므로

$2at=\dfrac{1}{t}$ $\therefore$ $at^2=\dfrac{1}{2}$ $\cdots\cdots$ ㉡

㉠을 ㉡에 대입하면 $\ln t=\dfrac{1}{2}$ 이므로

$t=e^{\frac{1}{2}}=\sqrt{e}$

이때 ㉠에서 t 대신 $\sqrt{e}$ 를 대입하면 $ae=\dfrac{1}{2}$

$\therefore$ $a=\dfrac{1}{2e}$

27. ④

$y=x^3-kx$와 $y=-\dfrac{64}{x}$가 공통접선 $y=x+t$를 가져야 한다.

$y=-\dfrac{64}{x}$에서 기울기가 1인 접선은 $y=x-16$

$y=x-16$와 $y=x^3-kx$가 접해야 하므로

방정식 $x^3-(k+1)x+16=0$은 $(x-a)^2(x-b)=0$의 형태로 정리되어야 한다.

$b+2a=0$

$-a^2b=16$

$2ab+a^2=-(k+1)$

연립하면 $a=2$, $b=-4$이고 $k=11$이다.

28. 140

29. ⑤

곡선 $y=kx^2+kx+\sin 3x$의 변곡점이 존재하려면 y''의 부호가 변하는 점이 있어야 합니다. $y'=2kx+k+3\cos 3x$이고, $y''=2k-9\sin 3x$입니다. y''의 부호가 변하는 지점이 있으려면 y''의 최댓값과 최솟값의 부호가 달라야 하므로 $2k-9\le 0\le 2k+9$여야 합니다. 이 부등식을 k에 대해 정리하면 $-\dfrac{9}{2}\le k\le\dfrac{9}{2}$입니다. 따라서 이 범위 안에 있는 정수 k는 총 9개입니다.

30. ③

(가)에 의해 $x=\ln\dfrac{2}{3}$이 변곡점임을 확인할 수 있다.

$f'(x)=3ae^{3x}+be^x$

$f''(x)=9ae^{3x}+be^x$

$f''\left(\ln\dfrac{2}{3}\right)=9a\times\left(\dfrac{2}{3}\right)^3+b\times\dfrac{2}{3}=\dfrac{8a+2b}{3}=0$

$\therefore$ $b=-4a$

$f'(x)=ae^x(3e^{2x}-4)$

(나) 조건에서 $3\cdot e^{2m}-4=0$이다.

$f(2m)=a\cdot e^{6m}-4a\cdot e^{2m}$

$=a\left(\dfrac{4}{3}\right)^3-4a\left(\dfrac{4}{3}\right)=-\dfrac{80}{9}$

따라서 $a=3$, $b=-12$이다.

$\therefore f(0)=-9$

31. ⑤

$f(x)=\ln(x^2+1)-tx+t$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f'(x)=\dfrac{2x}{x^2+1}-t$이다.

이 때, 함수 $h(x)=\dfrac{2x}{x^2+1}$라 하면, $f'(x)=0$이 되는 x는 곡선 $y=h(x)$와 직선 $y=t$의 교점의 x좌표이다.

$0<t<1$일 때, 항상 곡선 $y=h(x)$와 직선 $y=t$의 교점의 개수는 2개다. 이 때, 서로 다른 두 교점의 x좌표를 각각 α, β라 하면 $f'(\alpha)=f'(\beta)=0$이다. 따라서 모든 극값의 합은 $f(\alpha)+f(\beta)$이다.

$f'(\alpha)=0$에서 $\alpha^2+1=\dfrac{2\alpha}{t}$, $f'(\beta)=0$에서 $\beta^2+1=\dfrac{2\beta}{t}$이므로

$f(\alpha)+f(\beta)=\ln\left(\dfrac{4\alpha\beta}{t^2}\right)-t(\alpha+\beta)+2t$ 이다. 방정식 $f'(x)=0$의 서로 다른 두 실근이 α, β이므로 $\alpha+\beta=\dfrac{2}{t}$, $\alpha\beta=1$이다.

따라서 $f(\alpha)+f(\beta)=\ln 4-2\ln t-2+2t$이다. 즉 실수 t에 대하여 $g(t)=2t-2\ln t+\ln 4-2$이므로 $g'(t)=2-\dfrac{2}{t}$이다. 따라서

$g'\left(\frac{1}{4}\right) = -6$이다.

32. ④

ㄱ. $f(-x) = \frac{(-x)^2}{(-x)^2+1} = \frac{x^2}{x^2+1} = f(x)$ (참)

ㄴ. $f'(x) = \frac{2x(x^2+1) - x^2 \cdot 2x}{(x^2+1)^2} = \frac{2x}{(x^2+1)^2}$ 이고

$f''(x) = \frac{2(x^2+1)^2 - 2x \cdot 2 \cdot (x^2+1) \cdot 2x}{(x^2+1)^4} = \frac{2-6x^2}{(x^2+1)^3}$

이므로 $f'(x)$는 $x = \frac{1}{\sqrt{3}}$ 에서 최대, $x = -\frac{1}{\sqrt{3}}$ 에서 최소가 된다.

이때 $f'\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{\frac{2}{\sqrt{3}}}{\left(\frac{4}{3}\right)^2} = \frac{18}{16\sqrt{3}} = \frac{3}{8}\sqrt{3} > \frac{1}{2}$ 이다.

따라서 $f'(x)$가 $\frac{1}{2}$ 보다 큰 구간이 있다. (거짓)

ㄷ. 방정식을 변형하면 $xf'(x) = k$이고 $h(x) = xf'(x)$라 하면

$h'(x) = f'(x) + xf''(x) = \frac{2x(x^2+1) + x(2-6x^2)}{(x^2+1)^3} = \frac{-4x^3+4x}{(x^2+1)^3}$

$= \frac{-4x(x+1)(x-1)}{(x^2+1)^3}$

따라서 $h(x)$는 $x = \pm 1$에서

최댓값 $h(1) = f'(1) = \frac{1}{2}$ 을 갖고

$x = 0$에서 최솟값 $h(0) = 0$을 갖는 우함수이다.

그러므로 방정식 $h(x) = k$를 만족하는

실근의 개수 $g(k)$는

$$g(k) = \begin{cases} 4 \left(0 < k < \frac{1}{2}\right) \\ 2 \left(k = \frac{1}{2}\right) \\ 0 \left(\frac{1}{2} < k\right) \end{cases}$$

따라서 $g(k)$의 치역의 원소의 개수는 3이다. (참)

33. 36

$x = 0$일 때, $f(x)$는 최댓값 k를

$x = -3$일 때, $f(x)$는 최솟값 $k-9$를 갖는다.

따라서 정수 k에 대하여

$k \ge 9$일 때, 최댓값 k, 최솟값 $k-9$

$5 \le k \le 9$일 때, 최댓값 k, 최솟값 0

$0 \le k \le 4$일 때, 최댓값 $9-k$, 최솟값 0

$k \le -1$일 때, 최댓값 $9-k$, 최솟값 $-k$

최댓값과 최솟값의 합이 8이하가 되는 경우는

$1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8$

인 경우이다.

따라서 조건을 만족시키는 k의 값의 합은 36

34. ⑤

함수 $f(x) = \sin x - x\cos x$ 라 하면

$f'(x) = \cos x - (\cos x - x\sin x) = x\sin x$

x	0	$\cdots$	π	$\cdots$	2π
$f'(x)$	0	$+$	0	$-$	0
$f(x)$	0	$\nearrow$	π	$\searrow$	-2π

방정식 $f(x) = k$의 서로 다른 실근의 개수가 2 가 되려면

$0 \le k < \pi$

따라서 정수 k는 $0, 1, 2, 3$ 이므로 합은 6

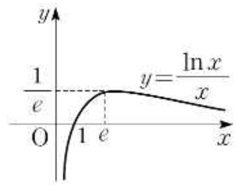
35. ⑤

$f(x) = \frac{\ln x}{x}$ 라 하면, $f'(x) = \frac{1-\ln x}{x^2}$

$f'(x) = 0$ 에서 $x = e$ 이고

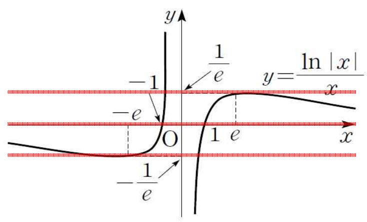
$\lim_{x \to \infty} \frac{\ln x}{x} = 0,\ \lim_{x \to 0+} \frac{\ln x}{x} = -\infty$ 이므로

함수 $y = f(x)$ 의 그래프는 아래와 그림과 같다.



$g(x) = \frac{\ln|x|}{x}$ 라 하면 $g(-x) = -g(x)$ 이므로

함수 $y = g(x)$ 의 그래프는 그림과 같이 원점에 대칭이다.



그러므로 곡선 $y = \frac{\ln|x|}{x}$ 와 직선 $y = \frac{\ln|k|}{k}$ 가

서로 다른 두 점에서 만나려면

$\frac{\ln|k|}{k} = \frac{1}{e}$ or 0 or $-\frac{1}{e}$

따라서 구하는 실수 k의 개수는 6 개다.

36. ④

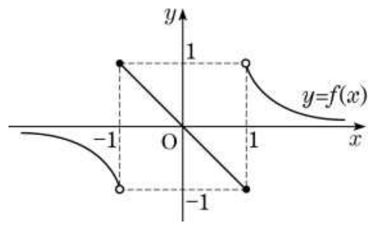
주어진 조건에서 함수 $f(x)$의 그래프는 원점에 대하여 대칭이고 원점을 지난다.

또, 함수 $f(x)$ 는 $x \ne -1,\ x \ne 1$ 인 모든 x 에서 연속이고, 구간 $(-\infty,\ -1),\ (-1,\ 1),\ (1,\ \infty)$ 에서 각각 감소한다.

ㄱ. 함수 $f(x)$ 의 그래프는 직선 $y = x$ 와 원점에서만 만난다.

ㄴ. (반례) 함수 $f(x) = \begin{cases} -x & (|x| \le 1) \\ \frac{1}{x} & (|x| > 1) \end{cases}$ 은 주어진 조건을

만족시키지만 x축과 원점에서만 만난다.



ㄷ. 함수 $f(x)$ 는 닫힌 구간 $[0,\ 1]$ 에서 연속이고, 열린 구간 $(0,\ 1)$ 에서 미분가능하므로 평균값의 정리에 의하여

$$f'(c_1)=\frac{-1-0}{1-0}=-1$$

을 만족시키는 실수 c_1 이 열린 구간 $(0,\ 1)$ 에 적어도 하나 존재한다.

마찬가지로 함수 $f(x)$ 는 닫힌 구간 $[-1,\ 0]$ 에서 연속이고, 열린 구간 $(-1,\ 0)$ 에서 미분가능하므로

$$f'(c_2)=\frac{1-0}{-1-0}=-1$$

을 만족시키는 실수 c_2 가 열린 구간 $(-1,\ 0)$ 에 적어도 하나 존재한다.

그러므로 $f'(\alpha)=-1$ 을 만족시키는 실수 α 가 적어도 두 개 존재한다.

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

37. ⑤

ㄱ. $g'(x)=xf(x)$ 이므로 $g'(0)=0$ (참)

ㄴ. 함수 $g(x)$ 가 닫힌 구간 $[0,\alpha]$ 에서 연속, 열린 구간 $(0,\alpha)$ 에서 미분가능, $g(0)=g(\alpha)=0$ 이므로 롤의 정리에 의하여 $g'(c)=cf(c)=0$ 인 c 가 열린 구간 $(0,\alpha)$ 에 적어도 하나 존재한다.

$c\neq 0$ 이므로 $f(c)=0$

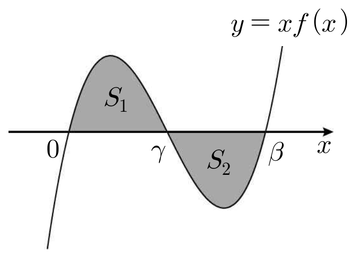
따라서 방정식 $f(x)=0$ 은 열린 구간 $(0,\alpha)$ 에서 적어도 하나의 실근을 갖는다. (참)

ㄷ. $\beta>0$ 이고 $g(\beta)=0$ 이므로 ㄴ에 의하여 $f(\gamma)=0$ 인 $\gamma\,(0<\gamma<\beta)$ 가 존재한다.

$f(x)=a(x-\gamma)(x-\beta)\ \ (a>0)$ 이고

$S_1=\int_0^{\gamma}|xf(x)|\,dx$, $S_2=\int_{\gamma}^{\beta}|xf(x)|\,dx$ 라 하면

$y=xf(x)$ 의 그래프는 다음과 같다.



$g(\beta)=\int_0^{\beta}tf(t)\,dt=S_1-S_2=0$ 이므로

$S_1=S_2$ 이다.

$$\int_{\beta}^{x}tf(t)dt=g(x)-g(\beta)\ =g(x)\ =\int_0^{x}tf(t)\,dt\geq 0$$

이므로, 모든 실수 x 에 대하여 $\int_{\beta}^{x}tf(t)\,dt\geq 0$ (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ

38. ⑤

점 P 의 속력이 매초 1 이므로 t 초 후 호 AP 의 길이가 t 이고 따라서 선분 OP 가 x 축의 양의 방향과 이루는 각의 크기는 t 이다. 따라서 직선 OP 의 방정식은 $y=(\tan t)x$ 이고, 점 Q 는 두 직선 $y=-x+1$ 과 $y=(\tan t)x$ 의 교점이므로 시각 t 에서의 점 Q 의 좌표는

$\left(\dfrac{1}{1+\tan t},\ \dfrac{\tan t}{1+\tan t}\right)$ 이다.

따라서 점 Q 의 속도는 $\left(-\dfrac{\sec^2 t}{(1+\tan t)^2},\ \dfrac{\sec^2 t}{(1+\tan t)^2}\right)$ 이다.

점 P 의 x 좌표가 $\dfrac{4}{5}$ 일 때, 점 P 는 원 $x^2+y^2=1$ 위의 점이므로 그 좌표는 $\mathrm{P}\left(\dfrac{4}{5},\ \dfrac{3}{5}\right)$ 이다.

따라서 점 P 의 x 좌표가 $\dfrac{4}{5}$ 일 때의 시각을 t_1 이라 하면

$\tan t_1=\dfrac{3}{4}$ 이므로 $\sec^2 t_1=\dfrac{25}{16}$

이때 점 Q 의 속도는 $\left(-\dfrac{\frac{25}{16}}{\left(\frac{7}{4}\right)^2},\ \dfrac{\frac{25}{16}}{\left(\frac{7}{4}\right)^2}\right)=\left(-\dfrac{25}{49},\ \dfrac{25}{49}\right)$ 이므로

$$b-a=\frac{25}{49}-\left(-\frac{25}{49}\right)=\frac{50}{49}$$

39. ②

(나)에서 부분적분법에 의하여

$$\int_{-1}^{1}\{f(x)\}^2g'(x)dx=\left[\{f(x)\}^2g(x)\right]_{-1}^{1}-\int_{-1}^{1}2f(x)f'(x)g(x)dx$$

$$=0-\int_{-1}^{1}2\{f(x)g(x)\}f'(x)dx$$

이고 (가)에서 $f(x)g(x)=x^4-1$ 이므로

$$=-2\int_{-1}^{1}(x^4-1)f'(x)dx=120$$

$$\therefore\ \int_{-1}^{1}(x^4-1)f'(x)dx=-60$$

이는 다시 부분적분법에 의하여

$$\int_{-1}^{1}(x^4-1)f'(x)dx=\left[(x^4-1)f(x)\right]_{-1}^{1}-\int_{-1}^{1}4x^3f(x)dx$$

$$=0-4\int_{-1}^{1}x^3f(x)dx=-60$$

따라서 $\int_{-1}^{1}x^3f(x)dx=15$

40. ③

$$\int_1^2 \frac{f'(x)}{x}dx = \left[\frac{f(x)}{x}\right]_1^2 + \int_1^2 \frac{f(x)}{x^2}dx$$

조건 (나)에 의해서 $\frac{f(x)}{x^2} = -f'(x)$이므로

$$\int_1^2 \{-f'(x)\}dx = f(1) - f(2)$$

$$\int_1^2 \frac{f'(x)}{x}dx = \frac{f(2)}{2} - f(1) + f(1) - f(2) = -\frac{f(2)}{2}$$

조건 (가)에 의해서 $f(2) = 2$이므로 $\int_1^2 \frac{f'(x)}{x}dx = -1$

41. ②

$f(x) = \int_0^x \frac{1}{t^3+1}dt$ 에서 $f'(x) = \frac{1}{x^3+1}$

$$\int_0^1 x^2\{f(x) - 2f(1)\}dx$$

$$= \left[\frac{x^3}{3} \times \{f(x) - 2f(1)\}\right]_0^1 - \int_0^1 \left\{\frac{x^3}{3} \times f'(x)\right\}dx$$

$$= \frac{1}{3} \times \{f(1) - 2f(1)\} - \frac{1}{3}\int_0^1 \frac{x^3}{x^3+1}dx$$

$$= -\frac{f(1)}{3} - \frac{1}{3}\int_0^1 \left(1 - \frac{1}{x^3+1}\right)dx$$

$$= -\frac{f(1)}{3} - \frac{1}{3}\left(\left[\ x\ \right]_0^1 - \int_0^1 \frac{1}{x^3+1}dx\right)$$

$$= -\frac{f(1)}{3} - \frac{1}{3} + \frac{f(1)}{3} = -\frac{1}{3}$$

42. ②

$$g(3) = \int_3^4 \{f(t-3) + 15\}\,dt$$

$$= \int_3^4 f(t-3)\,dt + \int_3^4 15\,dt$$

$$= \int_3^4 f(t-3)\,dt + 15 = 27$$

에서 $\int_3^4 f(t-3)\,dt = 12$

$t - 3 = x$ 라 두면

$$\int_3^4 f(t-3)\,dt = \int_0^1 f(x)\,dx = 12$$

43. ②

44. ①

$\frac{f'(x)}{x} - \frac{f(x)}{x^2} = \left(\frac{f(x)}{x}\right)'$ 이므로 $\left(\frac{f(x)}{x}\right)' = \cos\sqrt{x}$

$$\therefore \frac{f(x)}{x} = \int \cos\sqrt{x}\,dx$$

Let. $\sqrt{x} = t$ 라 두고 양변을 미분하면

$\frac{1}{2\sqrt{x}}dx = 1 \cdot dt \quad \therefore dx = 2t \cdot dt$

$$\therefore \frac{f(x)}{x} = \int \cos t \times 2t\,dt = 2t\sin t - \int 2\sin t\,dt$$

$$= 2t\sin t + 2\cos t + C$$

$$= 2\sqrt{x}\sin\sqrt{x} + 2\cos\sqrt{x} + C$$

$(f(\pi^2) = 0$ 이므로 $2\pi\sin\pi + 2\cos\pi + C = 0,\ c = 0)$

$\therefore f(x) = x(2\sqrt{x}\sin\sqrt{x} + 2\cos\sqrt{x} + 2)$

$\therefore f\left(\frac{\pi^2}{4}\right) = \frac{\pi^2}{4}(\pi + 0 + 2) = \frac{\pi^2}{4}(\pi + 2)$

45. ⑤

ㄱ. $f(x) = \int_0^x \sin(\pi\cos t)dt$ 에서

$f'(x) = \sin(\pi\cos x)$

$f'(0) = \sin(\pi\cos 0)$

$= \sin\pi$

$= 0$ (참)

ㄴ. 모든 실수 x에 대하여

$$f(-x) = \int_0^{-x} \sin(\pi\cos t)dt$$

$-t = y$로 놓으면 $-\frac{dt}{dy} = 1$이고

$t = 0$일 때 $y = 0$, $t = -x$일 때 $y = x$이므로

$$f(-x) = -\int_0^x \sin\{\pi\cos(-y)\}dy$$

$$= -\int_0^x \sin(\pi\cos y)dy$$

$$= -f(x)$$

따라서 함수 $y = f(x)$의 그래프는 원점에 대하여 대칭이다. (참)

ㄷ. $\pi - t = y$라 하면 $-\frac{dt}{dy} = 1$ 이고,

$t = 0$일 때 $y = \pi$, $t = \pi$일 때 $y = 0$이므로

$$f(\pi) = \int_0^\pi \sin(\pi\cos t)dt$$

$$= -\int_\pi^0 \sin\{\pi\cos(\pi - y)\}dy$$

$$= -\int_\pi^0 \sin(-\pi\cos y)dy$$

$$= \int_\pi^0 \sin(\pi\cos y)dy$$

$$= -\int_0^\pi \sin(\pi\cos y)dy$$

$$= -f(\pi)$$

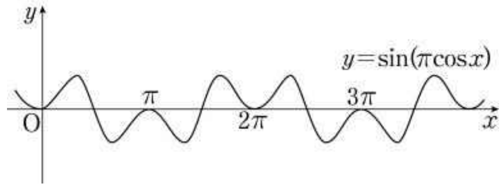
$2f(\pi) = 0$이므로

$f(\pi) = 0$이다. (참)

따라서 ㄱ, ㄴ, ㄷ 모두 참이다.

[참고]

함수 $y = \sin(\pi\cos x)$ 의 그래프는 그림과 같다.



46. 51

$f(x)=\dfrac{e^{\cos x}}{1+e^{\cos x}}$ 에서

$f(\pi-x)=\dfrac{e^{\cos(\pi-x)}}{1+e^{\cos(\pi-x)}}=\dfrac{e^{-\cos x}}{1+e^{-\cos x}}$

$=\dfrac{e^{-\cos x}\times e^{\cos x}}{(1+e^{-\cos x})\times e^{\cos x}}=\dfrac{1}{e^{\cos x}+1}$

그러므로

$a=f(\pi-x)+f(x)$

$=\dfrac{1}{e^{\cos x}+1}+\dfrac{e^{\cos x}}{1+e^{\cos x}}$

$=\dfrac{1+e^{\cos x}}{1+e^{\cos x}}=1$

$b=\int_0^{\pi} f(x)dx$

$=\int_0^{\pi}\{1-f(\pi-x)\}dx$

$=\int_0^{\pi}1\,dx-\int_0^{\pi}f(\pi-x)dx$

$\pi-x=t$ 로 놓으면

$x=\pi-t$ 이므로 $\dfrac{dx}{dt}=-1$

$x=0$ 일 때, $t=\pi$ 이고

$x=\pi$ 일 때, $t=0$ 이므로

$b=\pi+\int_{\pi}^{0}f(t)dt=\pi-\int_0^{\pi}f(t)dt=\pi-b$

$b=\pi-b$ 이므로 $b=\dfrac{\pi}{2}$

따라서 $a+\dfrac{100}{\pi}b=1+\dfrac{100}{\pi}\times\dfrac{\pi}{2}=1+50=51$

[다른 풀이]

$b=\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(x)dx+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}f(x)dx$

$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(x)dx+\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(\pi-x)dx$

$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\{f(x)+f(\pi-x)\}dx$

$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}1\,dx=\Big[x\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}=\dfrac{\pi}{2}-0=\dfrac{\pi}{2}$

47. ③

ㄱ. $f(\pi-x)=\ln\{\sin(\pi-x)+2\}$
$=\ln(\sin x+2)$
$=f(x)$

이므로 $\int_0^1 f(x)dx=\int_0^1 f(\pi-x)dx$ 이다. (참)

ㄴ. $\int_0^{\pi}f(x)\cos x\,dx=\int_0^{\pi}\cos x\ln(\sin x+2)dx$
$=\int_0^0 \ln(t+2)dt$
$=0$ (거짓)

ㄷ. $\int_0^{\pi}xf(x)dx=\int_0^{\pi}xf(\pi-x)dx$

에서 $\pi-x=t$라 하면

$\int_0^{\pi}xf(x)dx=\int_0^{\pi}xf(\pi-x)dx$
$=-\int_{\pi}^{0}(\pi-t)f(t)dt$
$=\int_0^{\pi}(\pi-t)f(t)dt$
$=\pi\int_0^{\pi}f(t)dt-\int_0^{\pi}tf(t)dt$
$=a\pi-\int_0^{\pi}xf(x)dx$

$\therefore \int_0^{\pi}xf(x)dx=\dfrac{\pi}{2}\times a$ (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

48. ⑤

함수 $f(x)$의 역함수가 $g(x)$이므로 $f(g(x))=x$

$f(1)=2$이므로 $g(2)=1$

주어진 식에서

$f'(g(x))=\dfrac{1-\{g(x)\}^2\{f(g(x))\}^3}{\{g(x)\}^3\{f(g(x))\}^2}$

$=\dfrac{1-x^3\{g(x)\}^2}{x^2\{g(x)\}^3}=\dfrac{1}{g'(x)}$ 이므로

$g'(x)=\dfrac{x^2\{g(x)\}^3}{1-x^3\{g(x)\}^2}$ $\cdots(*)$

ㄱ. 식 $(*)$에 $x=2$를 대입하면

$g'(2)=\dfrac{2^2\times\{g(2)\}^3}{1-2^3\times\{g(2)\}^2}$

$=\dfrac{2^2}{1-2^3}=-\dfrac{4}{7}$ $\therefore$ (참)

ㄴ. 식 $(*)$을 정리하면

$g'(x)=x^3\{g(x)\}^2g'(x)+x^2\{g(x)\}^3$
$=x^2\{g(x)\}^2\{xg'(x)+g(x)\}$

양변을 x에 대하여 적분하면

$xg'(x)+g(x)=\{xg(x)\}'$ 이므로

$$\int g'(x)dx = \int \{xg(x)\}^2\{xg(x)\}'dx$$

$g(x) = \frac{1}{3}x^3\{g(x)\}^3 + C$ (단, C는 적분상수)

$x=2$를 대입하면 $1 = \frac{8}{3} + C$이므로 $C = -\frac{5}{3}$

$g(x) = \frac{1}{3}x^3\{g(x)\}^3 - \frac{5}{3}$ ⋯ (**) ∴ (참)

ㄷ. 식 (**)에 $x=1$을 대입하여 정리하면

$\{g(1)\}^3 - 3g(1) - 5 = 0$

함수 $h(t) = t^3 - 3t - 5$, $g(1) = \alpha$라 하면

$h'(t) = 3(t+1)(t-1)$

$t=-1$에서 극댓값 -3, $t=1$에서 극솟값 -7을

가지므로 방정식 $h(t)=0$은 하나의 실근 α를 갖는다.

$h(2) = 8-6-5 = -3 < 0$,

$h\left(\frac{5}{2}\right) = \frac{125}{8} - \frac{15}{2} - 5 = \frac{25}{8} > 0$이므로

사이값 정리에 의해 $2 < \alpha < \frac{5}{2}$

$2 < g(1) < \frac{5}{2}$ ∴ (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ

49. ②

50. ⑤

ㄱ. $\{f(x)g(x)\}' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$이므로

$f'(x)g(x) = e^x - e^{2x}$를 얻는다. (참)

ㄴ. $f(x) = \frac{e^x}{g(x)}$이고 이를 두 번째 식에 대입하면

$$\frac{g'(x)}{g(x)} = e^x$$

를 얻는다. 따라서 양변을 적분하면 $\ln g(x) = e^x + c$이고

$g(0) = e$이므로 $g(x) = e^{e^x}$가 된다. 이를 첫 번째 식에 대입하면

$f(x) = e^{x-e^x}$를 얻는다. 따라서 $f(\ln 2) = \frac{2}{e^2}$이 된다. (참)

ㄷ. $\int_{\frac{1}{e}}^{\frac{2}{e^2}} (g \circ f^{-1})(x)dx$에서 $x = f(y)$라 치환하면

$$\int_{\frac{1}{e}}^{\frac{2}{e^2}} (g \circ f^{-1})(x)dx = \int_0^{\ln 2} g(y)f'(y)dy$$

를 얻는다. ㄱ에서 $f'(y)g(y) = e^y - e^{2y}$이므로 이를 위의 식에 대입하면

$$\int_{\frac{1}{e}}^{\frac{2}{e^2}} (g \circ f^{-1})(x)dx = \int_0^{\ln 2} g(y)f'(y)dy$$

$$= \int_0^{\ln 2} e^y - e^{2y}dy = -\frac{1}{2}$$

가 된다. (참)

51. ②

역함수의 적분법으로 $\int_3^2 f(x)dx + \int_5^7 g(x)dx = -1$이고

$\int_5^7 g(x)dx = \frac{14}{3}$이므로 $\int_2^3 f(x)dx = \frac{17}{3}$이 성립한다. 또한

$\int_2^5 f(x)dx = \frac{43}{3}$이므로 $\int_3^5 f(x)dx = \frac{26}{3}$이 된다.

한편 $g''(x) = 0$의 근은 $x=5$뿐이면 $f''(x)=0$의 근은

$x=3$뿐이고 따라서 $x<3$에서의 $f(x)$의오목·볼록성과 $x>3$에서의

$f(x)$의 오목·볼록성은 일정하다. $\int_2^3 f(x)dx = \frac{17}{3} < 6$에서 함수

$f(x)$는 구간 $x<3$에서 아래로 볼록한 함수이고

$\int_3^5 f(x)dx = \frac{26}{3} > 8$에서 함수 $f(x)$는 구간 $x>3$에서 위로

볼록한 함수이다.

$$\int_2^5 \left| f(x) + \frac{3}{2}x - \frac{19}{2} - \frac{1}{2}|x-3| \right| dx$$

$$= \int_2^3 |f(x) - (-2x+11)|dx + \int_3^5 |f(x) - (-x+8)|dx$$

$$= \frac{1}{3} + \frac{2}{3} = 1$$

(위에서 $2 \le x \le 3$일 때는 $f(x) \le -2x+11$이 성립하고

$3 \le x \le 5$일 때는 $f(x) \ge -x+8$임이 사용되었다.)

52. 10

함수 $f(x) = \int_{-1}^{x} (t-t^2)e^t dt$ 의 도함수는

$f'(x) = (x-x^2)e^x = -x(x-1)e^x$이므로

함수 $f(x)$는 $x=1$에서 극대이고 $x=0$에서 극소이다.

$$f(1) - f(0) = \int_{-1}^{1} (t-t^2)e^t dt - \int_{-1}^{0} (t-t^2)e^t dt$$

$$= \int_0^1 (t-t^2)e^t dt$$

$$= \left[(t-t^2)e^t\right]_0^1 - \int_0^1 (1-2t)e^t dt$$

$$= \int_0^1 (2t-1)e^t dt$$

$$= \left[(2t-1)e^t\right]_0^1 - \int_0^1 2e^t dt$$

$$= (e+1) - (2e-2) = 3-e$$

$\therefore\ p=3,\ q=-1 \Rightarrow p^2+q^2 = 10$

53. 7

$k = e$

$f(e) = 4(e^2 - e + 1)$

$f'(e) = 0$

$f''(e) = \frac{4}{3e}$

54. 1

구하고자 하는 부피를 구하는 식은

$\int_1^{e+1} x^2 dy$이다.

그런데, $(\ln x)^2 + x = y$에서

양변을 미분하면

$\left(\frac{2\ln x}{x} + 1\right)dx = dy$이므로

$\int_1^{e+1} x^2 dy = \int_1^{e} (2x\ln x + x^2)dx = \frac{1}{3}e^3 + \frac{1}{2}e^2 + \frac{1}{6}$

따라서 $p+q+r=1$