

2018학년도 3월 고1 전국연합학력평가 정답 및 해설

• 수학 영역 •

정답

| | | | | | | | | | |
|----|----|----|----|----|----|----|-----|----|----|
| 1 | ③ | 2 | ③ | 3 | ⑤ | 4 | ④ | 5 | ② |
| 6 | ④ | 7 | ① | 8 | ③ | 9 | ② | 10 | ① |
| 11 | ④ | 12 | ① | 13 | ③ | 14 | ⑤ | 15 | ① |
| 16 | ④ | 17 | ② | 18 | ⑤ | 19 | ⑤ | 20 | ③ |
| 21 | ② | 22 | 48 | 23 | 22 | 24 | 10 | 25 | 5 |
| 26 | 16 | 27 | 14 | 28 | 15 | 29 | 180 | 30 | 17 |

해설

1. [출제의도] 제곱근의 성질을 이용하여 주어진 식의 값을 계산한다.

$$\begin{aligned} \sqrt{18}-4\sqrt{2}+\sqrt{2} &= \sqrt{3^2 \times 2}-4\sqrt{2}+\sqrt{2} \\ &= 3\sqrt{2}-4\sqrt{2}+\sqrt{2} \\ &= (3-4+1) \times \sqrt{2} \\ &= 0 \end{aligned}$$

[참고]

① $a > 0, b > 0$ 일 때,
제곱근의 곱셈: $\sqrt{a} \sqrt{b} = \sqrt{ab}, \sqrt{a^2 b} = a\sqrt{b}$

제곱근의 나눗셈: $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a}{b}}$

분모의 유리화: $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \frac{\sqrt{a} \sqrt{b}}{\sqrt{b} \sqrt{b}} = \frac{\sqrt{ab}}{b}$

② $a > 0, b > 0, c > 0$ 이고, m, n 이 유리수일 때,
 $m\sqrt{a} + n\sqrt{a} = (m+n)\sqrt{a}$
 $m\sqrt{a} - n\sqrt{a} = (m-n)\sqrt{a}$
 $\sqrt{a}(\sqrt{b} + \sqrt{c}) = \sqrt{ab} + \sqrt{ac}$

2. [출제의도] 일차부등식을 만족하는 자연수의 개수를 구한다.

$$\begin{aligned} x-5 \leq 7 \text{ 에서 } x \leq 7+5 \text{ 이므로} \\ x \leq 12 \end{aligned}$$

그러므로 이를 만족하는 자연수는
1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12
따라서 12개

3. [출제의도] 인수분해를 이용하여 주어진 식의 값을 계산한다.

$$\begin{aligned} 26^2 - 24^2 &= (26+24)(26-24) \\ &= 50 \times 2 \\ &= 100 \end{aligned}$$

[참고]

- ① $ma+mb = m(a+b)$
- ② $a^2+2ab+b^2 = (a+b)^2$
 $a^2-2ab+b^2 = (a-b)^2$
- ③ $a^2-b^2 = (a+b)(a-b)$
- ④ $x^2+(a+b)x+ab = (x+a)(x+b)$
- ⑤ $ax^2+(ad+bc)x+bd = (ax+b)(cx+d)$

4. [출제의도] 다항식의 덧셈과 뺄셈을 하여 주어진 식을 간단히 한다.

$$\begin{aligned} 2(a-b)-(a-3b) &= 2a-2b-a+3b \\ &= a+b \\ &= (2x+y)+(x-2y) \\ &= 3x-y \end{aligned}$$

5. [출제의도] 주어진 자료의 최빈값을 구한다.

주어진 자료에서
43g이 3회, 45g이 2회, 41g, 42g, 47g, 48g, 49g이 각각 1회씩 나타난다.
따라서 43g이 3회로 가장 많이 나타나므로

최빈값은 43g

6. [출제의도] 유한소수의 성질을 이해하여 조건을 만족시키는 값을 구한다.

$\frac{n}{2^4 \times 7}$ 을 소수로 나타낼 때 유한소수가 되기 위해서는 기약분수로 나타내었을 때 분모의 소인수가 2나 5 이외에는 없어야 한다.

$\frac{n}{2^4 \times 7}$ 의 분모의 소인수인 7이 약분되어야 하므로 n 은 반드시 7을 소인수로 가지고 있어야 한다.
따라서 n 의 값이 될 수 있는 두 자리 자연수 중 가장 작은 수는 $7 \times 2 = 14$

7. [출제의도] 연립방정식의 해를 이용하여 두 일차함수 그래프의 교점의 좌표를 구한다.

두 일차함수 $y=x+3, y=2x-3$ 의 그래프의 교점의 좌표는 연립일차방정식

$$\begin{cases} y=x+3 \cdots \text{㉠} \\ y=2x-3 \cdots \text{㉡} \end{cases}$$

의 해와 같다.

㉠-㉡을 하면

$$0=x-6$$

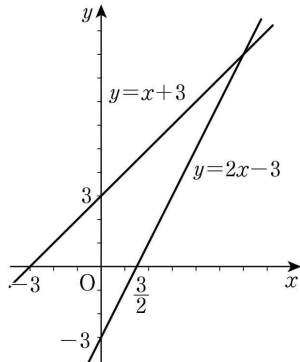
$$x=6 \cdots \text{㉢}$$

㉢을 ㉠에 대입하면

$$y=6+3=9$$

$$a=6, b=9 \text{ 이므로}$$

$$a+b=6+9=15$$



[다른 풀이]

$y=x+3$ 을 $y=2x-3$ 에 대입하면

$$x+3=2x-3$$

$$x=6 \cdots \text{㉠}$$

㉠을 $y=x+3$ 에 대입하면

$$y=6+3=9$$

$$a=6, b=9 \text{ 이므로}$$

$$a+b=6+9=15$$

8. [출제의도] 이차함수의 그래프의 성질을 이해하여 조건을 만족시키는 값을 구한다.

$$\begin{aligned} y &= x^2+2x+a \\ &= (x^2+2x+1)-1+a \\ &= (x+1)^2-1+a \end{aligned}$$

그러므로 $x=-1$ 일 때 최솟값은 $-1+a$ 이다.

따라서 $-1+a=4, a=5$

9. [출제의도] 소인수분해를 이해하여 주어진 식의 값을 구한다.

180을 소인수분해하면 $180=2^2 \times 3^2 \times 5$ 이므로 소인수 2가 곱해진 개수는 2이고, 소인수 3이 곱해진 개수도 2이다.

$$\text{따라서 } A(180)+B(180)=2+2=4$$

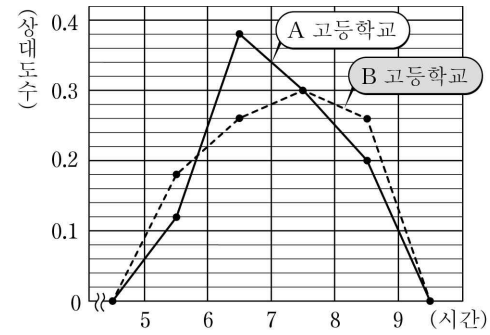
[참고]

180을 소인수분해하는 방법은 다음과 같다.

| | |
|---|-----|
| 2 | 180 |
| 2 | 90 |
| 3 | 45 |
| 3 | 15 |

$$180 = 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 5 = 2^2 \times 3^2 \times 5$$

10. [출제의도] 상대도수의 그래프를 이해하여 조건을 만족시키는 값을 구한다.



하루 평균 수면 시간이 7시간 이상 8시간 미만인 계급의 상대도수는 A 고등학교, B 고등학교 모두 0.3이고 조사한 학생 수는 각각 200, 300이므로

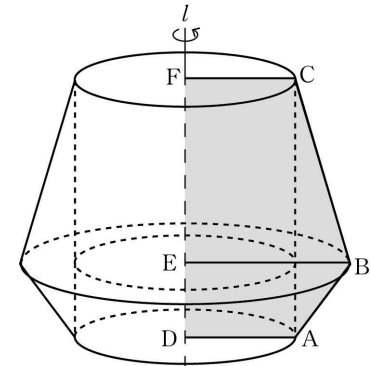
$$a = 200 \times 0.3 = 60$$

$$b = 300 \times 0.3 = 90$$

$$\text{따라서 } a-b = 60-90 = -30$$

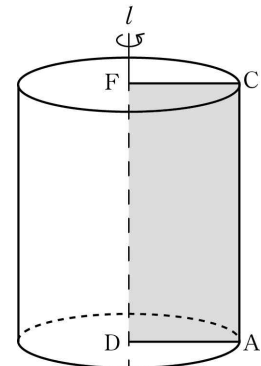
11. [출제의도] 회전체의 모양을 추측하여 조건을 만족시키는 값을 구한다.

오각형 FDABC를 직선 l 을 회전축으로 하여 1회전시킬 때 생기는 회전체는 [그림 1]과 같다.



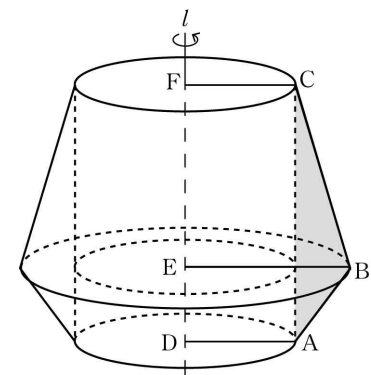
[그림 1]

사각형 FDAC를 직선 l 을 회전축으로 하여 1회전시킬 때 생기는 회전체는 [그림 2]와 같이 밑면의 반지름의 길이가 4인 원기둥이다.

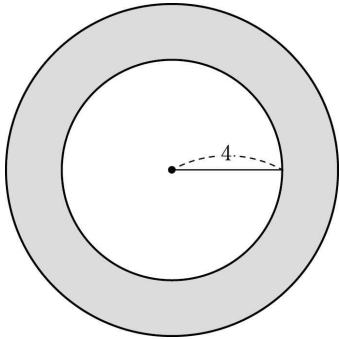


[그림 2]

삼각형 ABC를 직선 l 을 회전축으로 하여 1회전시킬 때 생기는 회전체는 [그림 1]의 입체도형에서 [그림 2]의 원기둥을 제외시킨 입체도형으로 [그림 3]과 같다.

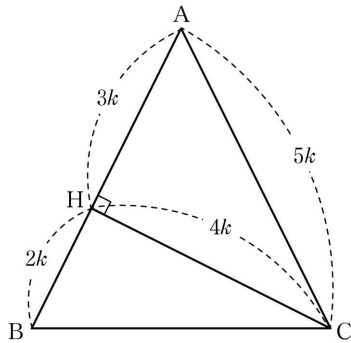


[그림 3]
이를 회전축 l 에 수직인 평면으로 자른 단면은 [그림 4]와 같다.



[그림 4]
[그림 4]의 안쪽 원의 반지름의 길이는 4이며 넓이는 16π 이다.
한편 $\overline{BE}=6$ 이므로 바깥쪽 원의 반지름의 길이는 4보다 크고 6보다 작거나 같다.
그러므로 바깥쪽 원의 넓이의 최댓값은 반지름의 길이가 6일 때 36π 이다.
따라서 회전체를 회전축에 수직인 평면으로 자른 단면의 넓이의 최댓값은 $36\pi - 16\pi = 20\pi$

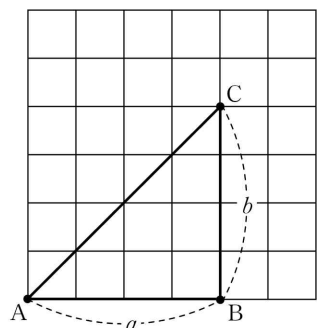
12. [출제의도] 피타고라스 정리를 이용하여 삼각비의 값을 구한다.



삼각형 ABC에서 $\overline{AH}:\overline{HB}=3:2$ 이므로 양수 k 에 대하여 $\overline{AH}=3k$, $\overline{HB}=2k$ 라 하면 $\overline{AC}=\overline{AB}=\overline{AH}+\overline{HB}=5k$
직각삼각형 AHC에서 피타고라스 정리에 의해 $\overline{AC}^2=\overline{AH}^2+\overline{HC}^2$ 이므로 $(5k)^2=(3k)^2+\overline{HC}^2$
 $\overline{HC}^2=(5k)^2-(3k)^2=16k^2$
 $\overline{HC}=4k$
따라서 직각삼각형 BCH에서 $\tan B = \frac{\overline{HC}}{\overline{HB}} = \frac{4k}{2k} = 2$

13. [출제의도] 확률의 뜻을 이해하여 실생활 문제를 해결한다.

한 개의 주사위를 두 번 던져 첫 번째 나온 눈의 수를 a , 두 번째 나온 눈의 수를 b 라 하면 삼각형 ABC는 밑변의 길이가 a , 높이가 b 인 직각삼각형이므로 넓이는 $\frac{1}{2} \times a \times b = \frac{1}{2}ab$



직각삼각형 ABC의 넓이가 15 이상이기 위해서는 ab 의 값이 30 이상이어야 한다.
(i) $a=1, 2, 3, 4$ 일 때, ab 의 값이 30 이상이 되는 b 의 값은 존재하지 않는다.

(ii) $a=5$ 일 때, $b=6$ 이면 $ab=30$ 이므로 가능한 경우의 수는 1
(iii) $a=6$ 일 때, $b=5$ 이면 $ab=30$ 이고 $b=6$ 이면 $ab=36$ 이므로 가능한 경우의 수는 2
그러므로 ab 의 값이 30 이상인 순서쌍 (a, b) 의 경우의 수는 $1+2=3$
한 개의 주사위를 두 번 던져서 나올 수 있는 모든 경우의 수는 $6 \times 6 = 36$
따라서 구하는 확률은 $\frac{3}{36} = \frac{1}{12}$

[다른 풀이]

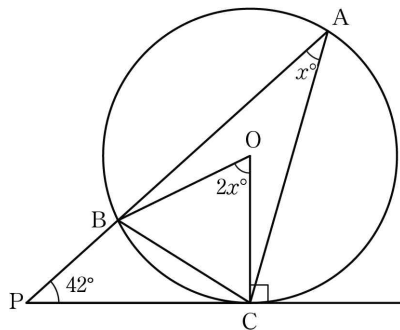
한 개의 주사위를 두 번 던져 첫 번째 나온 눈의 수를 a , 두 번째 나온 눈의 수를 b 라 할 때, 주사위를 두 번 던져서 나올 수 있는 모든 경우를 순서쌍으로 나타내면 다음 표와 같다.

| | | | | | | |
|------------------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|
| $a \backslash b$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
| 1 | (1, 1) | (1, 2) | (1, 3) | (1, 4) | (1, 5) | (1, 6) |
| 2 | (2, 1) | (2, 2) | (2, 3) | (2, 4) | (2, 5) | (2, 6) |
| 3 | (3, 1) | (3, 2) | (3, 3) | (3, 4) | (3, 5) | (3, 6) |
| 4 | (4, 1) | (4, 2) | (4, 3) | (4, 4) | (4, 5) | (4, 6) |
| 5 | (5, 1) | (5, 2) | (5, 3) | (5, 4) | (5, 5) | (5, 6) |
| 6 | (6, 1) | (6, 2) | (6, 3) | (6, 4) | (6, 5) | (6, 6) |

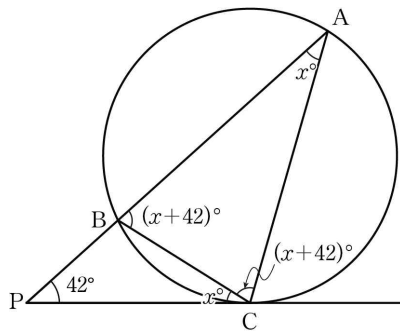
이 중에서 ab 의 값이 30 이상인 경우는 다음과 같다.

(i) $ab=30$ 인 경우
(5, 6), (6, 5)
(ii) $ab=36$ 인 경우
(6, 6)
그러므로 구하는 경우의 수는 3
한 개의 주사위를 두 번 던져서 나올 수 있는 모든 경우의 수는 $6 \times 6 = 36$
따라서 구하는 확률은 $\frac{3}{36} = \frac{1}{12}$

14. [출제의도] 원주각의 성질을 이용하여 각의 크기를 구한다.



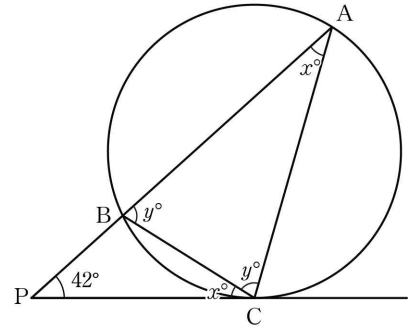
원의 중심을 O, $\angle CAB = x^\circ$ 라 하면 원주각의 성질에 의해 $\angle COB = 2\angle CAB = 2x^\circ$
삼각형 OBC는 이등변삼각형이므로 $\angle OBC = \angle OCB = \frac{1}{2}(180^\circ - 2x^\circ) = 90^\circ - x^\circ$
원의 접선은 그 접점을 한 끝점으로 하는 반지름에 수직이므로 $\overline{PC} \perp \overline{OC}$
 $\angle BCP = 90^\circ - \angle OCB = 90^\circ - (90^\circ - x^\circ) = x^\circ$



삼각형 BPC에서 한 외각의 크기는 그와 이웃하지 않는 두 내각의 크기의 합과 같으므로 $\angle ABC = (x+42)^\circ$

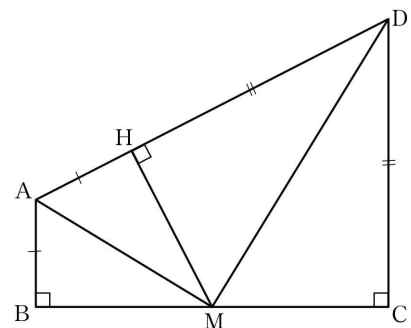
삼각형 ABC는 $\overline{AB} = \overline{AC}$ 인 이등변삼각형이므로 $\angle ACB = \angle ABC = (x+42)^\circ$
삼각형 ABC의 내각의 크기의 합은 180° 이므로 $x^\circ + (x+42)^\circ + (x+42)^\circ = 180^\circ$
따라서 $x^\circ = 32^\circ$

[다른 풀이]



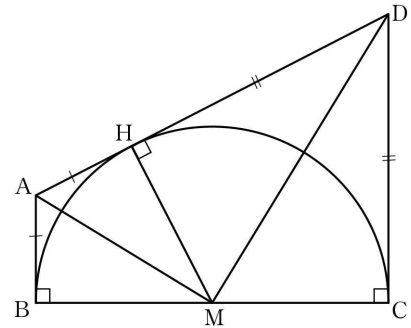
$\angle CAB = x^\circ$, $\angle ABC = y^\circ$ 라 하면 위의 풀이에서 $\angle PCB = \angle CAB = x^\circ$
삼각형 ABC는 $\overline{AB} = \overline{AC}$ 인 이등변삼각형이므로 $\angle ACB = y^\circ$
삼각형 ABC의 내각의 크기의 합은 180° 이므로 $x^\circ + 2y^\circ = 180^\circ \dots \text{㉠}$
삼각형 APC의 내각의 크기의 합은 180° 이므로 $x^\circ + x^\circ + y^\circ + 42^\circ = 180^\circ$
 $2x^\circ + y^\circ = 138^\circ \dots \text{㉡}$
 $\text{㉡} \times 2 - \text{㉠}$ 을 하면 $3x^\circ = 96^\circ$
따라서 $x^\circ = 32^\circ$

15. [출제의도] 삼각형의 합동을 이해하여 주어진 선분의 길이를 구한다.



두 직각삼각형 ABM, AHM에서 $\angle ABM = \angle AHM = 90^\circ$, $\overline{BM} = \overline{HM}$, \overline{AM} 은 공통이므로 $\triangle ABM \cong \triangle AHM$
두 직각삼각형 MCD, MHD에서 $\angle MCD = \angle MHD = 90^\circ$, $\overline{CM} = \overline{HM}$, \overline{DM} 은 공통이므로 $\triangle MCD \cong \triangle MHD$
그러므로 $\square ABCD = 2\triangle AHM + 2\triangle MHD$
 $\triangle AHM = \frac{1}{2} \times 4 \times \overline{AH} = 2\overline{AH}$
 $\triangle MHD = \frac{1}{2} \times 4 \times \overline{HD} = 2\overline{HD}$ 이므로 $\square ABCD = 2 \times 2\overline{AH} + 2 \times 2\overline{HD} = 4(\overline{AH} + \overline{HD}) = 4\overline{AD} = 36$
따라서 $\overline{AD} = 9$

[다른 풀이]



$\overline{BM} = \overline{MH}$, $\overline{AD} \perp \overline{MH}$ 이므로 선분 BC를 지름으로 하

는 반원은 점 H에서 선분 AD와 접한다.
 선분 AB, AD, DC는 모두 이 반원의 접선이므로
 $\overline{AB} = \overline{AH}$, $\overline{DC} = \overline{DH}$
 사다리꼴 ABCD의 넓이는

$$\frac{1}{2} \times (\overline{AB} + \overline{CD}) \times \overline{BC} = 36$$

$$\overline{BC} = 8 \text{ 이므로 } \overline{AB} + \overline{CD} = 9$$

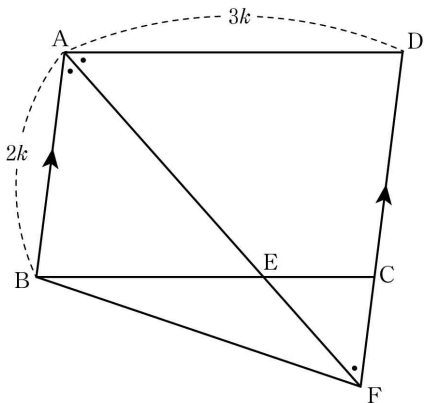
$$\text{따라서 } \overline{AD} = \overline{AH} + \overline{HD} = \overline{AB} + \overline{CD} = 9$$

[참고]

두 삼각형은 다음 각 경우에 서로 합동이다.

- ① 세 쌍의 대응변의 길이가 각각 같을 때
- ② 두 쌍의 대응변의 길이가 각각 같고, 그 끼인 각의 크기가 같을 때
- ③ 한 쌍의 대응변의 길이가 같고, 그 양 끝 각의 크기가 각각 같을 때

16. [출제의도] 도형의 답을 이용하여 삼각형의 넓이 구하는 과정을 추론한다.



$\overline{AB} \parallel \overline{DF}$ 이므로 $\angle DFA = \angle BAF$
 그러므로 삼각형 DAF는 $\overline{DA} = \overline{DF}$ 인 이등변삼각형이다.

$\overline{AB} : \overline{AD} = 2 : 3$ 이므로 양수 k에 대하여

$\overline{AB} = 2k$, $\overline{AD} = 3k$ 라 하면

$\overline{CF} = \overline{DF} - \overline{DC} = \overline{DA} - \overline{AB} = k$ 이므로

$$\overline{CF} = \frac{1}{2} \times \overline{AB}$$

$\triangle ABE \sim \triangle FCE$ 이므로

답음비가 $\overline{AB} : \overline{FC} = 2 : 1$

즉, $\overline{AE} : \overline{FE} = 2 : 1$

$$\text{그러므로 } \overline{EF} = \frac{1}{3} \times \overline{AF}$$

두 삼각형 ABF와 ABD의 밑변 AB는 공통이고 선분 AB와 DF는 평행하므로 높이가 같다.

그러므로 두 삼각형 ABF와 ABD의 넓이는 같다.

$$\triangle ABD = \frac{1}{2} \square ABCD = \frac{1}{2} \times 30 = 15$$

그러므로 $\triangle ABF = 15$

$\overline{EF} = \frac{1}{3} \overline{AF}$ 이므로 삼각형 BFE의 넓이는 $\frac{1}{3} \times 15 = 5$

이다.

$$\text{따라서 } a = \frac{1}{2}, b = \frac{1}{3}, c = 5 \text{ 이므로 } abc = \frac{5}{6}$$

17. [출제의도] 제곱근의 값을 이용하여 자연수의 개수 구하는 문제를 해결한다.

$f(n) = 2$ 는 \sqrt{na} 가 자연수가 되도록 하는 가장 작은 자연수 a가 2라는 의미이다.

즉, $\sqrt{2n}$ 이 자연수가 되어야 하므로 2n은 어떤 자연수의 제곱이다.

그러므로 n은 $2k^2$ (k는 자연수)로 나타내어지는 수이다.

$k = 1, 2, 3, \dots$ 을 대입하여 300 이하의 자연수 n을 구하면 다음과 같다.

$$2 = 2 \times 1^2$$

$$8 = 2 \times 2^2$$

$$18 = 2 \times 3^2$$

⋮

$$242 = 2 \times 11^2$$

$$288 = 2 \times 12^2$$

따라서 자연수 n의 개수는 12

[다른 풀이]

$f(n) = 2$ 는 \sqrt{na} 가 자연수가 되도록 하는 가장 작은 자연수 a가 2라는 의미이다.

즉, $\sqrt{2n}$ 이 자연수가 되어야 하므로 2n은 어떤 자연수의 제곱이다.

n은 $2k^2$ (k는 자연수)로 나타내어지는 수이고 300 이하의 자연수이므로 k^2 은 150 이하의 자연수이다.

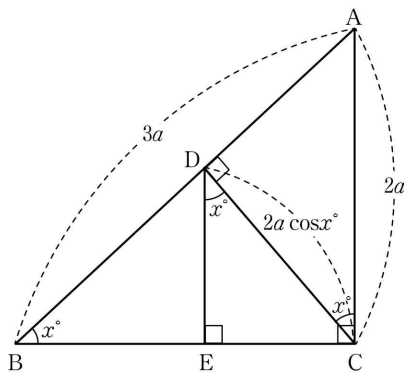
$12^2 = 144$, $13^2 = 169$ 이므로 k^2 이 150 이하의 자연수가 되는 k는 1, 2, 3, ..., 11, 12

그러므로 $f(n) = 2$ 인 300 이하의 자연수 n은

2, 8, 18, ..., 242, 288

따라서 12개

18. [출제의도] 피타고라스 정리와 삼각비를 이용하여 주어진 조건에 맞는 값을 구한다.



삼각형 ABC에서 피타고라스 정리에 의해

$$\overline{BC}^2 = \overline{AB}^2 - \overline{AC}^2 = (3a)^2 - (2a)^2 = 5a^2$$

$$\overline{BC} = \sqrt{5}a$$

$\angle ABC = x^\circ$ 라 하면 삼각형 ABC에서

$$\cos x^\circ = \frac{\overline{BC}}{\overline{AB}} = \frac{\sqrt{5}a}{3a} = \frac{\sqrt{5}}{3}$$

$\angle ABC + \angle BAC = \angle ACD + \angle CAD = 90^\circ$

이고 $\angle BAC = \angle CAD$ 이므로

$\angle ACD = \angle ABC = x^\circ$

삼각형 ADC에서

$$\cos x^\circ = \frac{\overline{CD}}{\overline{AC}} \text{ 이므로}$$

$$\overline{CD} = \overline{AC} \times \cos x^\circ$$

$$= 2a \cos x^\circ$$

$$= 2a \times \frac{\sqrt{5}}{3}$$

$$= \frac{2\sqrt{5}}{3}a$$

$\overline{AC} \parallel \overline{DE}$ 이므로 엇각의 성질에 의해

$\angle CDE = \angle DCA = x^\circ$

삼각형 CDE에서

$$\cos x^\circ = \frac{\overline{DE}}{\overline{CD}} \text{ 이므로}$$

$$\overline{DE} = \overline{CD} \times \cos x^\circ = \frac{2\sqrt{5}}{3}a \times \frac{\sqrt{5}}{3} = \frac{10}{9}a$$

따라서 $\overline{DE} = \frac{10}{9}a$ 가 자연수가 되도록 하는 자연수 a의 값 중 가장 작은 수는 9

[다른 풀이]

위의 풀이에서 $\overline{BC} = \sqrt{5}a$

삼각형 ABC에서

$$\frac{1}{2} \times \overline{BC} \times \overline{AC} = \frac{1}{2} \times \overline{AB} \times \overline{CD}$$

$$\frac{1}{2} \times \sqrt{5}a \times 2a = \frac{1}{2} \times 3a \times \overline{CD}$$

$$\overline{CD} = \frac{2\sqrt{5}}{3}a$$

삼각형 ADC에서 피타고라스 정리에 의해

$$\overline{AD}^2 = \overline{AC}^2 - \overline{CD}^2$$

$$= (2a)^2 - \left(\frac{2\sqrt{5}}{3}a\right)^2$$

$$= \frac{16}{9}a^2$$

$$\overline{AD} = \frac{4}{3}a$$

$$\overline{BD} = \overline{AB} - \overline{AD}$$

$$= 3a - \frac{4}{3}a$$

$$= \frac{5}{3}a$$

삼각형 BDC에서

$$\frac{1}{2} \times \overline{BD} \times \overline{CD} = \frac{1}{2} \times \overline{BC} \times \overline{DE}$$

$$\frac{1}{2} \times \frac{5}{3}a \times \frac{2\sqrt{5}}{3}a = \frac{1}{2} \times \sqrt{5}a \times \overline{DE}$$

$$\overline{DE} = \frac{10}{9}a$$

따라서 $\overline{DE} = \frac{10}{9}a$ 가 자연수가 되도록 하는 자연수 a

의 값 중 가장 작은 수는 9

[다른 풀이]

두 삼각형 ABC와 ACD에서

$\angle BAC = \angle CAD$ 이고 $\angle ACB = \angle ADC = 90^\circ$ 이므로

$\triangle ABC \sim \triangle ACD$

$\overline{AB} : \overline{AC} = 3a : 2a = 3 : 2$ 이고 두 삼각형 ABC와

ACD는 닮음이므로 $\overline{BC} : \overline{CD} = \overline{AB} : \overline{AC} = 3 : 2$

위의 풀이에서 $\overline{BC} = \sqrt{5}a$ 이므로

$$\overline{CD} = \frac{2}{3} \overline{BC} = \frac{2}{3} \times \sqrt{5}a = \frac{2\sqrt{5}}{3}a$$

두 삼각형 ACD와 CDE에서

$\angle ACD = \angle CDE$ 이고 $\angle ADC = \angle CED = 90^\circ$ 이므로

$\triangle ACD \sim \triangle CDE$

$\overline{AC} : \overline{CD} = 2a : \frac{2\sqrt{5}}{3}a = 3 : \sqrt{5}$ 이고 두 삼각형 ACD와

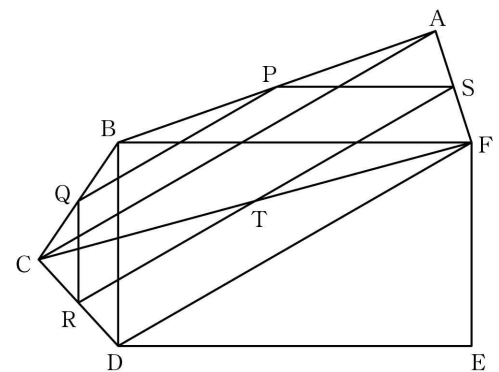
CDE는 닮음이므로 $\overline{CD} : \overline{DE} = \overline{AC} : \overline{CD} = 3 : \sqrt{5}$

$$\text{그러므로 } \overline{DE} = \frac{\sqrt{5}}{3} \overline{CD} = \frac{\sqrt{5}}{3} \times \frac{2\sqrt{5}}{3}a = \frac{10}{9}a$$

따라서 $\overline{DE} = \frac{10}{9}a$ 가 자연수가 되도록 하는 자연수 a

의 값 중 가장 작은 수는 9

19. [출제의도] 삼각형의 성질을 이용하여 사각형의 둘레의 길이를 구한다.



선분 CF와 선분 RS의 교점을 T라 하면,

$\overline{RT} \parallel \overline{DF}$ 이므로 $\triangle CRT \sim \triangle CDF$

답음비는 $\overline{CR} : \overline{CD} = 1 : 2$ 이므로 $\overline{RT} : \overline{DF} = 1 : 2$

$$\overline{RT} = \frac{1}{2} \overline{DF}$$

$\overline{TS} \parallel \overline{CA}$ 이므로 $\triangle FST \sim \triangle FAC$

답음비는 $\overline{FS} : \overline{FA} = 1 : 2$ 이므로 $\overline{TS} : \overline{CA} = 1 : 2$

$$\overline{TS} = \frac{1}{2} \overline{CA} \text{ 이므로}$$

$$\overline{RS} = \overline{RT} + \overline{TS}$$

$$= \frac{1}{2} (\overline{DF} + \overline{CA})$$

$$= \frac{1}{2} \times (32 + 38) = 35$$

삼각형의 두 변의 중점을 연결한 선분의 성질에 의해

삼각형 ABC에서 $\overline{AC}=38$ 이므로 $\overline{PQ}=\frac{1}{2}\overline{AC}=19$

$\overline{BD}=a$, $\overline{BF}=b$ 라 하면

직사각형 BDEF의 둘레의 길이는 $2(a+b)=88$

$a+b=44$

삼각형의 두 변의 중점을 연결한 선분의 성질에 의해

$$\overline{QR}=\frac{1}{2}\overline{BD}=\frac{1}{2}a$$

$$\overline{PS}=\frac{1}{2}\overline{BF}=\frac{1}{2}b$$

따라서 사각형 PQRS의 둘레의 길이는

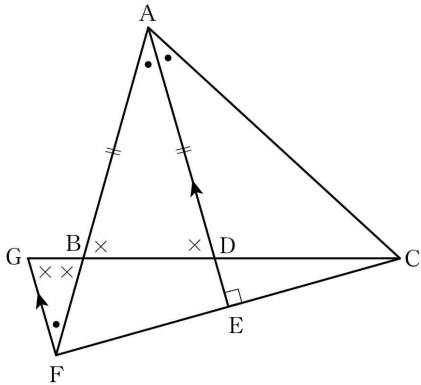
$$\overline{PQ}+\overline{QR}+\overline{RS}+\overline{PS}$$

$$=19+\frac{1}{2}a+35+\frac{1}{2}b$$

$$=54+\frac{1}{2}(a+b)$$

$$=54+22=76$$

20. [출제의도] 삼각형과 닮음의 성질을 이용하여 주어진 <보기>의 참, 거짓을 판별한다.



ㄱ. 삼각형 ABD는 $\overline{AB}=\overline{AD}$ 인 이등변삼각형이므로

$\angle ABD=\angle ADB$

$\overline{AD} \parallel \overline{EG}$ 이므로 $\angle ADB=\angle FGB$ (엇각),

$\angle ABD=\angle FBG$ (맞꼭지각)

즉, $\angle FGB=\angle FBG$ 이므로 삼각형 FBG는

이등변삼각형이다.

그러므로 $\overline{BF}=\overline{GF}$ (참)

ㄴ. 두 삼각형 AFE, ACE에서

$\angle FAE=\angle CAE$ (선분 AE는 $\angle A$ 의 이등분선)

$\angle AEF=\angle AEC=90^\circ$ ($\overline{AE} \perp \overline{CF}$)

\overline{AE} 는 공통

삼각형의 합동조건에 의해 $\triangle AFE \cong \triangle ACE$

그러므로 $\overline{FE}=\overline{CE}$ 이고 두 삼각형 CDE와 CGF는

닮음비가 1:2인 닮음인 도형이다.

즉, $\overline{DE}=\frac{1}{2}\overline{GF}$ 이고 ㄱ에서 $\overline{BF}=\overline{GF}$

그러므로 $\overline{DE}=\frac{1}{2}\overline{BF}$ (거짓)

ㄷ. $\overline{DE}=\frac{1}{2}\overline{BF}$ 이고, $\overline{AF}=\overline{AC}$ 이므로

$$\overline{AE}=\overline{AD}+\overline{DE}=\overline{AB}+\frac{1}{2}\overline{BF}$$

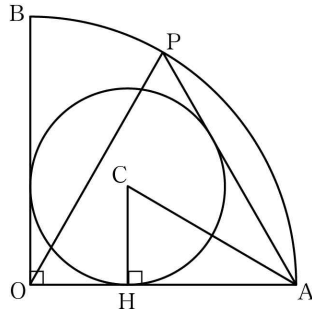
$$=\frac{1}{2}(\overline{AB}+\overline{AB}+\overline{BF})$$

$$=\frac{1}{2}(\overline{AB}+\overline{AF})$$

그러므로 $\overline{AE}=\frac{1}{2}(\overline{AB}+\overline{AC})$ (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

21. [출제의도] 삼각비를 이용하여 원의 반지름의 길이 구하는 문제를 해결한다.



세 선분 OA, OB, AP에 모두 접하는 원의 중심을 점 C, 점 C에서 선분 OA에 내린 수선의 발을 H라 하자.

점 P는 호 AB를 삼등분한 점 중 점 B에 가까운 점이므로 $\angle AOP=60^\circ$ 이고, $\overline{OA}=\overline{OP}$ 이므로 삼각형 OAP는 정삼각형이다.

그러므로 $\angle OAP=60^\circ$

선분 AO와 선분 AP는 점 A에서 중심이 C인 원에 그은 접선이므로 선분 AC는 $\angle OAP$ 의 이등분선이다.

그러므로 $\angle OAC=\frac{1}{2}\angle OAP=30^\circ$

한편 원의 반지름의 길이를 x라 하면

$$\overline{OH}=\overline{CH}=x$$

$$\overline{AH}=\overline{OA}-\overline{OH}=4-x$$

삼각형 CHA에서 $\tan(\angle HAC)=\tan 30^\circ=\frac{x}{4-x}$

$$\tan 30^\circ=\frac{\sqrt{3}}{3} \text{ 이므로}$$

$$\frac{x}{4-x}=\frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$3x=4\sqrt{3}-\sqrt{3}x$$

$$(3+\sqrt{3})x=4\sqrt{3}$$

$$\text{따라서 } x=\frac{4\sqrt{3}}{3+\sqrt{3}}=\frac{4\sqrt{3}(3-\sqrt{3})}{(3+\sqrt{3})(3-\sqrt{3})}$$

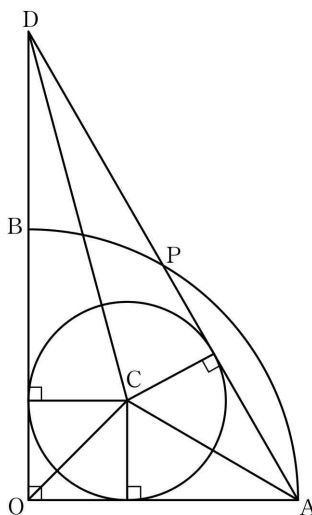
$$=\frac{4\sqrt{3}(3-\sqrt{3})}{9-3}$$

$$=\frac{12\sqrt{3}-12}{6}$$

$$=2\sqrt{3}-2$$

[다른 풀이]

선분 OB의 연장선과 선분 AP의 연장선이 만나는 점을 D라 하면 구하는 원은 삼각형 DOA의 내접원이다.



위의 풀이에서 $\angle OAP=60^\circ$ 이므로 삼각형 DOA에서 $\angle OAD=\angle OAP=60^\circ$, $\angle DOA=90^\circ$

그러므로 $\overline{DA}:\overline{AO}:\overline{OD}=2:1:\sqrt{3}$

$\overline{AO}=4$ 이므로 $\overline{DA}=8$, $\overline{OD}=4\sqrt{3}$

$$\triangle DOA=\frac{1}{2}\times 4\times 4\sqrt{3}=8\sqrt{3}$$

구하는 원의 중심을 C, 반지름의 길이를 x라 하면

$$\triangle COA=\frac{1}{2}\times 4\times x=2x$$

$$\triangle CDO=\frac{1}{2}\times 4\sqrt{3}\times x=2\sqrt{3}x$$

$$\triangle CAD=\frac{1}{2}\times 8\times x=4x$$

이때, $\triangle COA+\triangle CDO+\triangle CAD=\triangle DOA$ 이므로

$$2x+2\sqrt{3}x+4x=8\sqrt{3}$$

$$(6+2\sqrt{3})x=8\sqrt{3}$$

$$(3+\sqrt{3})x=4\sqrt{3}$$

$$\text{따라서 } x=\frac{4\sqrt{3}}{3+\sqrt{3}}=\frac{4\sqrt{3}(3-\sqrt{3})}{(3+\sqrt{3})(3-\sqrt{3})}$$

$$=\frac{4\sqrt{3}(3-\sqrt{3})}{9-3}$$

$$=\frac{12\sqrt{3}-12}{6}$$

$$=2\sqrt{3}-2$$

22. [출제의도] 거듭제곱의 뜻을 알고 식의 값을 계산한다.

$$9^2 \times (2^2)^2 \div 3^3 = (3^2)^2 \times (2^2)^2 \div 3^3$$

$$=3^4 \times 2^4 \div 3^3$$

$$=2^4 \times 3^4 \div 3^3$$

$$=16 \times 3$$

$$=48$$

[참고]

m, n 이 자연수일 때,

$$\textcircled{1} a^m \times a^n = a^{m+n}$$

$$\textcircled{2} (a^m)^n = a^{mn}$$

$a \neq 0$ 일 때,

$$m > n \text{ 이면 } a^m \div a^n = a^{m-n}$$

$$m = n \text{ 이면 } a^m \div a^n = 1$$

$$m < n \text{ 이면 } a^m \div a^n = \frac{1}{a^{n-m}}$$

$$\textcircled{4} (ab)^m = a^m b^m, \left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a^m}{b^m} \quad (b \neq 0)$$

23. [출제의도] 일차함수를 이해하여 일차함수 그래프의 y절편을 구한다.

y절편을 b라고 하면 기울기가 4이므로 구하는 일차함수의 식은

$$y=4x+b \quad \textcircled{1}$$

$\textcircled{1}$ 의 그래프가 점 (2, 30)을 지나므로

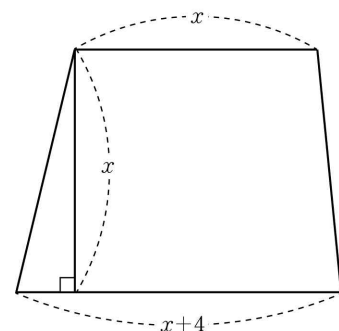
$\textcircled{1}$ 에 $x=2, y=30$ 을 대입하면

$$30=4 \times 2+b$$

$$b=22$$

따라서 구하는 일차함수 그래프의 y절편은 22

24. [출제의도] 이차방정식을 이해하여 사다리꼴의 변의 길이를 구한다.



사다리꼴의 넓이는 120이므로

$$\frac{1}{2} \times x \times \{x+(x+4)\}=120$$

$$\frac{1}{2} \times x \times (2x+4)=120$$

$$x^2+2x=120$$

$$x^2+2x-120=0$$

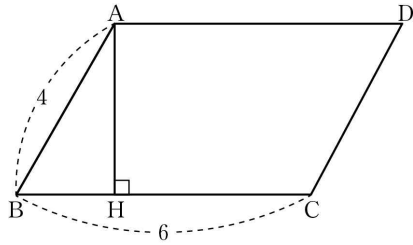
$$(x+12)(x-10)=0$$

$$x=-12 \text{ 또는 } x=10$$

x는 사다리꼴의 밑변의 길이이므로 $x > 0$

따라서 $x=10$

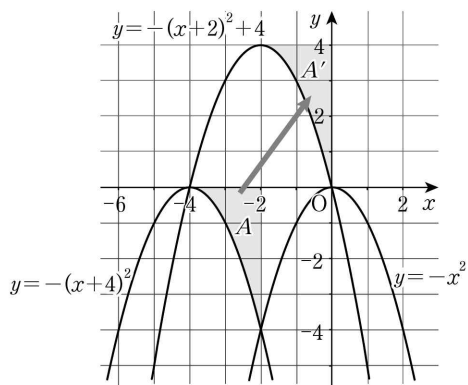
25. [출제의도] 피타고라스 정리를 이해하고 주어진 식의 값을 구한다.



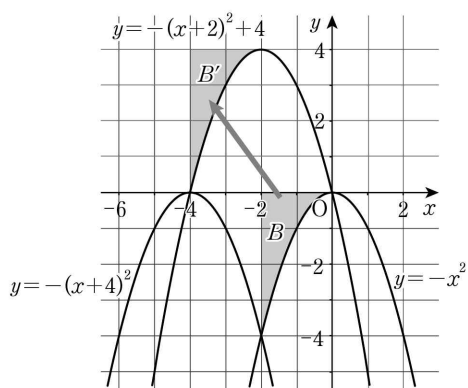
평행사변형 ABCD의 넓이는 $6\sqrt{11}$ 이므로
 $\overline{BC} \times \overline{AH} = 6\sqrt{11}$
 $6\overline{AH} = 6\sqrt{11}$
 $\overline{AH} = \sqrt{11}$
삼각형 ABH는 직각삼각형이므로
피타고라스 정리에 의해
 $\overline{AB}^2 = \overline{BH}^2 + \overline{AH}^2$
 $4^2 = \overline{BH}^2 + (\sqrt{11})^2$
따라서 $\overline{BH}^2 = 5$

26. [출제의도] 이차함수의 그래프를 이해하여 도형의 넓이를 구한다.

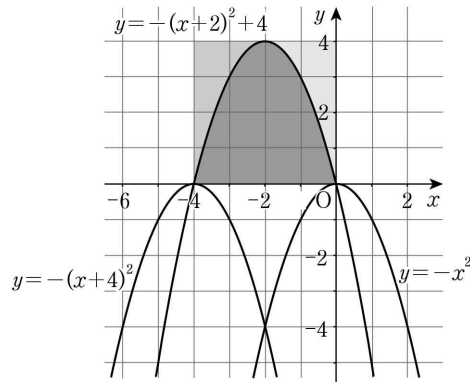
세 이차함수 $y = -x^2$, $y = -(x+2)^2 + 4$, $y = -(x+4)^2$ 은 x^2 의 계수가 모두 -1 이므로 세 이차함수 그래프의 폭과 모양은 서로 같다.



(i) $y = -(x+2)^2 + 4$ 의 그래프의 꼭짓점의 좌표는 $(-2, 4)$
 $y = -(x+4)^2$ 의 그래프의 꼭짓점의 좌표는 $(-4, 0)$
그러므로 $y = -(x+2)^2 + 4$ 의 그래프는 $y = -(x+4)^2$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 2만큼, y 축의 방향으로 4만큼 평행이동한 것이다.
그러므로 두 도형 A와 A'은 서로 합동이다.



(ii) $y = -x^2$ 의 그래프의 꼭짓점의 좌표는 $(0, 0)$
 $y = -(x+2)^2 + 4$ 의 그래프의 꼭짓점의 좌표는 $(-2, 4)$
그러므로 $y = -(x+2)^2 + 4$ 의 그래프는 $y = -x^2$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 -2 만큼, y 축의 방향으로 4만큼 평행이동한 것이다.
그러므로 두 도형 B와 B'은 서로 합동이다.

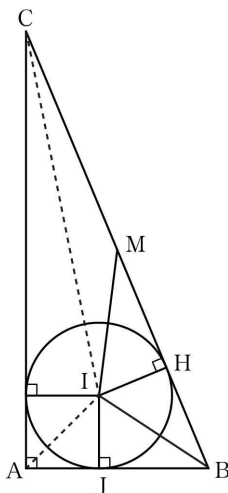


따라서 그림에서 구하는 넓이는 한 변의 길이가 4인 정사각형의 넓이와 같으므로 $4 \times 4 = 16$

[참고]

- 이차함수 $y = ax^2$ 의 그래프는
- ① y 축을 축으로 하고, 원점을 꼭짓점으로 하는 포물선이다.
 - ② $a > 0$ 이면 아래로 볼록하고, $a < 0$ 이면 위로 볼록하다.
 - ③ a 의 절댓값이 클수록 그래프의 폭은 좁아진다.
 - ④ $y = -ax^2$ 의 그래프와 x 축에 대칭이다.

27. [출제의도] 삼각형의 내심의 성질을 이해하고 조건을 만족시키는 값을 구한다.



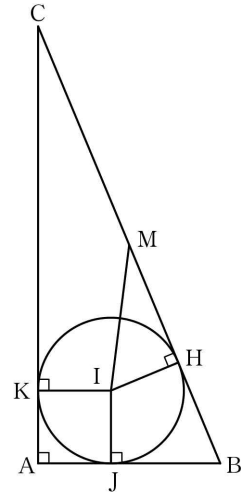
삼각형 ABC의 내접원의 반지름의 길이를 r 라 하면 삼각형 ABC의 넓이는
 $\frac{1}{2} \times \overline{AB} \times \overline{AC} = \frac{1}{2} r (\overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CA})$
 $\frac{1}{2} \times 10 \times 24 = \frac{1}{2} r (10 + 26 + 24)$
 $r = 4$

점 I에서 변 AB에 내린 수선의 발을 J라 하면 두 삼각형 BIH와 BIJ에서
 $\overline{IH} = \overline{IJ}$, \overline{BI} 는 공통, $\angle H = \angle J = 90^\circ$ 이므로
 $\triangle BIH \cong \triangle BIJ$
 $\overline{BH} = \overline{BJ} = \overline{AB} - \overline{AJ} = 10 - 4 = 6$
 $\overline{BM} = \frac{1}{2} \overline{BC} = 13$
 $\overline{MH} = \overline{BM} - \overline{BH} = 13 - 6 = 7$
따라서 삼각형 IHM의 넓이는
 $\frac{1}{2} \times \overline{MH} \times \overline{IH} = \frac{1}{2} \times 7 \times 4 = 14$

[다른 풀이]

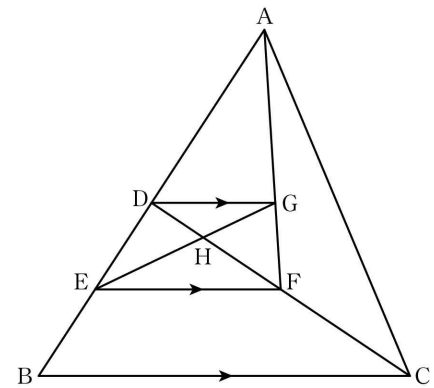
위의 풀이에서 $r = 4$ 이고 $\triangle BIH \cong \triangle BIJ$
 $\overline{JB} = \overline{AB} - \overline{AJ} = 10 - 4 = 6$
그러므로 삼각형 BIJ의 넓이는
 $\frac{1}{2} \times \overline{JB} \times \overline{IJ} = \frac{1}{2} \times 6 \times 4 = 12$
따라서 삼각형 IHM의 넓이는
 $\triangle BIM - \triangle BIH = \triangle BIM - \triangle BIJ = \frac{1}{2} \times 13 \times 4 - 12 = 14$

[다른 풀이]



위의 풀이에서 $r = 4$
점 I에서 변 AB, 변 AC에 내린 수선의 발을 각각 J, K라 하고 $\overline{HM} = x$ 라 하면
 $\overline{AJ} = \overline{AK} = 4$ 이므로 $\overline{CK} = 20$, $\overline{CH} = 13 + x$
 $\overline{CK} = \overline{CH}$ 이므로 $20 = 13 + x$ 에서 $x = 7$
따라서 삼각형 IHM의 넓이는
 $\frac{1}{2} \times \overline{MH} \times \overline{IH} = \frac{1}{2} \times 7 \times 4 = 14$

28. [출제의도] 삼각형의 닮음을 이용하여 두 삼각형의 넓이의 비를 구하는 문제를 해결한다.



두 점 E, F가 각각 선분 BD, CD의 중점이므로,
 $\overline{EF} \parallel \overline{BC}$ ㉠

문제의 조건에서 $\overline{DG} \parallel \overline{BC}$ 이고 ㉠이 성립하므로
 $\overline{EF} \parallel \overline{DG}$
두 삼각형 DBC, DEF에서
 $\angle DBC = \angle DEF$, $\angle DCB = \angle DFE$ (동위각)이므로
 $\triangle DBC \sim \triangle DEF$
 $\overline{DB} : \overline{DE} = 2 : 1$ 이므로 $\triangle DBC = 4 \triangle DEF$ ㉡

두 삼각형 ADG, AEF에서
 $\angle ADG = \angle AEF$, $\angle AGD = \angle AFE$ (동위각)이므로
 $\triangle ADG \sim \triangle AEF$
 $\overline{DG} : \overline{EF} = \overline{AD} : \overline{AE} = 2 : 3$
두 삼각형 DHG, FHE에서
 $\angle HDG = \angle HFE$, $\angle HGD = \angle HEF$ (엇각)이므로
 $\triangle DHG \sim \triangle FHE$

$\overline{GH} : \overline{EH} = \overline{DG} : \overline{FE} = 2 : 3$ 이므로
 $\triangle FHE = \frac{9}{4} \triangle DHG$, $\triangle DEH = \frac{3}{2} \triangle DHG$
 $\triangle DEF = \triangle DEH + \triangle FHE$
 $= \frac{3}{2} \triangle DHG + \frac{9}{4} \triangle DHG$
 $= \frac{15}{4} \triangle DHG$ ㉢

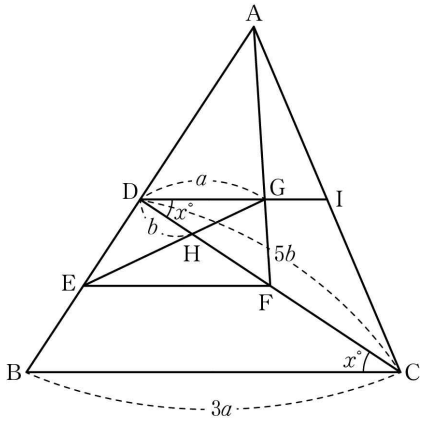
㉡, ㉢에 의해

$\triangle DBC = 4 \times \frac{15}{4} \triangle DHG = 15 \triangle DHG$

삼각형 DBC의 넓이는 삼각형 DHG의 넓이의 15배이다.

따라서 $k = 15$

[다른 풀이]



선분 DG의 연장선이 선분 AC와 만나는 점을 I라 하자.

삼각형 ABC에서 점 D, I가 각각 선분 AB, AC의 중점이므로 $\overline{BC} = 2\overline{DI}$

삼각형 ADC에서 선분 DI, AF는 중선이므로 두 중선의 교점인 G는 삼각형 ADC의 무게중심이다.

$$\overline{DG} = a \text{ 라 하면 } \overline{DI} = \frac{3}{2}\overline{DG} = \frac{3}{2}a$$

$$\overline{BC} = 2\overline{DI} = 3a$$

삼각형 DBC에서 점 E, F가 각각 선분 BD, CD의 중점이므로 $\overline{EF} = \frac{1}{2}\overline{BC} = \frac{3}{2}a$, $\overline{EF} \parallel \overline{BC}$

$$\overline{DG} \parallel \overline{BC} \text{ 이므로 } \overline{DG} \parallel \overline{EF}$$

두 삼각형 DHG, FHE에서

$$\angle HDG = \angle HFE, \angle HGD = \angle HEF \text{ (엇각) 이므로}$$

$$\triangle DHG \sim \triangle FHE$$

$$\overline{DH} : \overline{FH} = \overline{DG} : \overline{FE} = 2 : 3$$

$$\overline{DH} = b \text{ 라 하면 } \overline{FH} = \frac{3}{2}\overline{DH} = \frac{3}{2}b$$

$$\overline{DF} = \overline{DH} + \overline{FH} = b + \frac{3}{2}b = \frac{5}{2}b$$

$$\overline{DC} = 2\overline{DF} = 5b$$

$$\angle HDG = \angle HCB \text{ (엇각) 이므로 } \angle HDG = x^\circ \text{ 라 하면}$$

$$\triangle DHG : \triangle DBC = \frac{1}{2} \times a \times b \times \sin x^\circ : \frac{1}{2} \times 3a \times 5b \times \sin x^\circ = 1 : 15$$

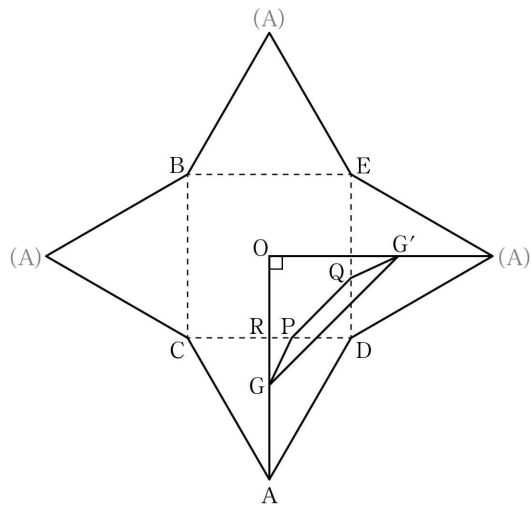
따라서 $k = 15$

[참고]

- ① 답음비: 서로 닮은 두 도형에서 대응하는 선분의 길이의 비
- ② 닮은 두 평면도형의 답음비가 $m:n$ 이면 넓이의 비는 $m^2:n^2$ 이다.
- ③ 닮은 두 입체도형의 답음비가 $m:n$ 이면 부피의 비는 $m^3:n^3$ 이다.

29. [출제의도] 입체도형의 전개도를 추측하여 선분의 길이의 합의 최솟값을 구한다.

구하려는 사각뿔의 한 모서리의 길이를 x 라 하고, 면 BCDE의 대각선 BD와 대각선 CE의 교점을 O라 하자. 사각뿔 ABCDE의 전개도를 그리면 다음과 같다.



전개도에서 선분 CD와 선분 OA의 교점을 R라 하

자. 점 G는 삼각형 ACD의 무게중심이므로

$$\overline{AG} : \overline{GR} = 2 : 1, \overline{GR} = \frac{1}{3}\overline{AR}$$

전개도에서

$$\overline{OG} = \overline{OR} + \overline{GR} = \overline{OR} + \frac{1}{3}\overline{AR}$$

$$= \frac{1}{2}x + \frac{\sqrt{3}}{2}x \times \frac{1}{3}$$

$$= \frac{1}{2}x + \frac{\sqrt{3}}{6}x$$

$$= \frac{1}{6}(3 + \sqrt{3})x$$

삼각형 GOG'은 직각이등변삼각형이므로

$$\overline{GG'} = \sqrt{2} \times \overline{OG} = \frac{\sqrt{2}}{6}(3 + \sqrt{3})x$$

전개도에서 $\overline{GP} + \overline{PQ} + \overline{QG'}$ 의 값이 최소가 되는 경우는 네 점 G, P, Q, G'이 한 직선 위에 있을 때이다.

그러므로

$$\frac{\sqrt{2}}{6}(3 + \sqrt{3})x = 30(3\sqrt{2} + \sqrt{6})$$

$$\frac{3\sqrt{2} + \sqrt{6}}{6}x = 30(3\sqrt{2} + \sqrt{6})$$

$$\frac{1}{6}x = 30$$

따라서 $x = 180$

30. [출제의도] 일차방정식을 이용하여 실생활 문제를 해결한다.

$K+2$ 에 3을 곱해서 만든 수가 여전히 네 자리의 수이므로 $a = 2$

그러므로 $K = 2 \times 10^3 + b \times 10^2 + 8 \times 10 + c$ 이고

$M = 8 \square 6 \square$ 이다.

(i) $c = 2$ 인 경우 $M = 8 \square 68$ 이고

$$3(K+2) = 6 \times 10^3 + 3b \times 10^2 + 24 \times 10 + 12 \text{ 이므로 } M \neq 3(K+2)$$

(ii) $c = 8$ 인 경우 $M = 8 \square 66$ 이고

$$3(K+2) = 6 \times 10^3 + 3b \times 10^2 + 24 \times 10 + 30 \text{ 이므로 } M \neq 3(K+2)$$

(iii) $c \neq 2, c \neq 8$ 인 경우

$$3(c+2) = 10k + c \quad (k=0, 1, 2) \text{에서}$$

$$2c = 10k - 6 \text{ 이므로}$$

$$c = 7$$

$$K = 2 \times 10^3 + b \times 10^2 + 8 \times 10 + 7 \text{에서}$$

$$3(K+2) = 6 \times 10^3 + 3b \times 10^2 + 24 \times 10 + 27 = 6267 + 3b \times 10^2$$

이고 $M = 8 \square 67$ 이다.

$M = 3(K+2)$ 가 성립하려면 $b \geq 7$ 이다.

$b = 7$ 인 경우 $K = 2787, M = 8767$ 이므로

$M \neq 3(K+2)$

$b = 8$ 인 경우 $K = 2887, M = 8667$ 이므로

$M = 3(K+2)$ 가 성립하여 $b = 8$

따라서 $a+b+c = 2+8+7 = 17$

[다른 풀이]

$$3(K+2) = 3K+6$$

$$= 3a \times 10^3 + 3b \times 10^2 + 24 \times 10 + 3c + 6$$

$3(K+2)$ 의 일의 자리의 숫자는 $3c+6$ 의 일의 자리의 숫자와 같으므로 $3c+6$ 의 일의 자리의 숫자와 M 의 일의 자리의 숫자를 비교해 보면 다음 표에서 $c = 7$ 임을 알 수 있다.

| c | $3c+6$ | $3c+6$ 의 일의 자리의 숫자 | M 의 일의 자리의 숫자 |
|-----|--------|--------------------|-----------------|
| 1 | 9 | 9 | 1 |
| 2 | 12 | 2 | 8 |
| 3 | 15 | 5 | 3 |
| 4 | 18 | 8 | 4 |
| 5 | 21 | 1 | 5 |
| 6 | 24 | 4 | 6 |
| 7 | 27 | 7 | 7 |
| 8 | 30 | 0 | 6 |

$$3(K+2) = 3a \times 10^3 + 3b \times 10^2 + 24 \times 10 + 3 \times 7 + 6$$

$$= 3a \times 10^3 + 3b \times 10^2 + 267$$

$$= 3a \times 10^3 + (3b+2) \times 10^2 + 6 \times 10 + 7$$

$3(K+2)$ 의 백의 자리의 숫자는 $3b+2$ 의 일의 자리의 숫자와 같으므로 $3b+2$ 의 일의 자리의 숫자와 M 의 백의 자리의 숫자를 비교해 보면 다음 표에서 $b = 2$ 또는 $b = 4$ 또는 $b = 8$ 임을 알 수 있다.

| b | $3b+2$ | $3b+2$ 의 일의 자리의 숫자 | M 의 백의 자리의 숫자 |
|-----|--------|--------------------|-----------------|
| 1 | 5 | 5 | 1 |
| 2 | 8 | 8 | 8 |
| 3 | 11 | 1 | 3 |
| 4 | 14 | 4 | 4 |
| 5 | 17 | 7 | 5 |
| 6 | 20 | 0 | 6 |
| 7 | 23 | 3 | 7 |
| 8 | 26 | 6 | 6 |

$3(K+2)$ 와 M 모두 네 자리의 수이고 천의 자리의 숫자가 같으므로 $a = 2$ 이다.

이때, $b = 2$ 와 $b = 4$ 의 경우 $M \neq 3(K+2)$ 이고 $b = 8$ 인 경우 $M = 3(K+2)$ 이므로 $b = 8$ 이다.

따라서 $a+b+c = 2+8+7 = 17$

[참고]

풀이를 좀 더 상세하게 알아보자.

$$3(K+2) = 3K+6$$

$$= 3a \times 10^3 + 3b \times 10^2 + 24 \times 10 + 3c + 6$$

$M = 3(K+2)$ 이므로 $3(K+2)$ 는 네 자리의 자연수이다. 즉, $3a$ 는 한 자리의 수이므로

$a = 1$ 또는 $a = 2$ 또는 $a = 3$ 이다.

(i) $a = 1$ 인 경우

M 의 천의 자리의 숫자가 1이고

$3(K+2)$ 의 천의 자리의 숫자가 3 이상이므로

$M \neq 3(K+2)$

(ii) $a = 2$ 인 경우

M 은 K 의 각 자리의 숫자 중 2를 8로 바꾸었으므로 M 의 천의 자리의 숫자는 8이고

$3(K+2)$ 의 천의 자리의 숫자는 6 이상이므로

$M = 3(K+2)$ 가 성립할 수 있다.

(iii) $a = 3$ 인 경우

M 의 천의 자리의 숫자가 3이고

$3(K+2)$ 의 천의 자리의 숫자가 9이므로

$M \neq 3(K+2)$

(i), (ii), (iii)에 의해 $a = 2$ 이다.

$$\text{그러므로 } K = 2 \times 10^3 + b \times 10^2 + 8 \times 10 + c$$

한편 $3(K+2)$ 의 일의 자리의 숫자는 $3c+6$ 의 일의 자리의 숫자와 같다.

(iv) $c = 2$ 인 경우

M 은 K 의 각 자리의 숫자 중 2를 8로 바꾸었으므로 M 의 일의 자리의 숫자는 8이고

$3(K+2)$ 의 일의 자리의 숫자는 2이므로

$M \neq 3(K+2)$

(v) $c = 8$ 인 경우

M 은 K 의 각 자리의 숫자 중 8을 6으로 바꾸었으므로 M 의 일의 자리의 숫자는 6이고

$3(K+2)$ 의 일의 자리의 숫자는 0이므로
 $M \neq 3(K+2)$
 (vi) $c \neq 2, c \neq 8$ 인 경우
 M 의 일의 자리의 숫자는 c 이고
 $3(K+2)$ 의 일의 자리의 숫자는 $3c+6$ 의 일의 자리 숫자와 같으므로
 $3c+6 = c+10k \quad (k=0, 1, 2)$
 $2c = -6+10k$
 즉, $2c$ 는 1의 자리가 4인 수이다.
 그러므로 $c=2$ 또는 $c=7$
 그런데 $c \neq 2$ 이므로 $c=7$
 (iv), (v), (vi)에 의해 $c=7$
 그러므로 $K=2 \times 10^3 + b \times 10^2 + 8 \times 10 + 7$
 $3(K+2) = 6 \times 10^3 + 3b \times 10^2 + 24 \times 10 + 27$
 $M = 8 \times 10^3 + b' \times 10^2 + 6 \times 10 + 7$
 (단, $b=2$ 인 경우 $b'=8, b=8$ 인 경우 $b'=6, b \neq 2, b \neq 8$ 인 경우 $b=b'$)
 $M=3(K+2)$ 이므로
 $8 \times 10^3 + b' \times 10^2 + 6 \times 10 + 7$
 $= 6 \times 10^3 + 3b \times 10^2 + 24 \times 10 + 27$
 $8067 + b' \times 10^2 = 6267 + 3b \times 10^2$
 $1800 + b' \times 10^2 = 3b \times 10^2$
 $18 + b' = 3b$
 (vii) $b=2$ 인 경우
 $b'=8$ 이므로 $18+b' \neq 3b$
 (viii) $b=8$ 인 경우
 $b'=6$ 이므로 $18+b' = 3b$ 가 성립한다.
 (ix) $b \neq 2, b \neq 8$ 인 경우
 $b=b'$ 이고 b 는 1 이상 8 이하의 자연수이므로
 $18+b=3b$ 을 만족하는 b 는 존재하지 않는다.
 (vii), (viii), (ix)에 의해 $b=8$
 $a=2, b=8, c=7$ 이므로
 $a+b+c=2+8+7=17$